



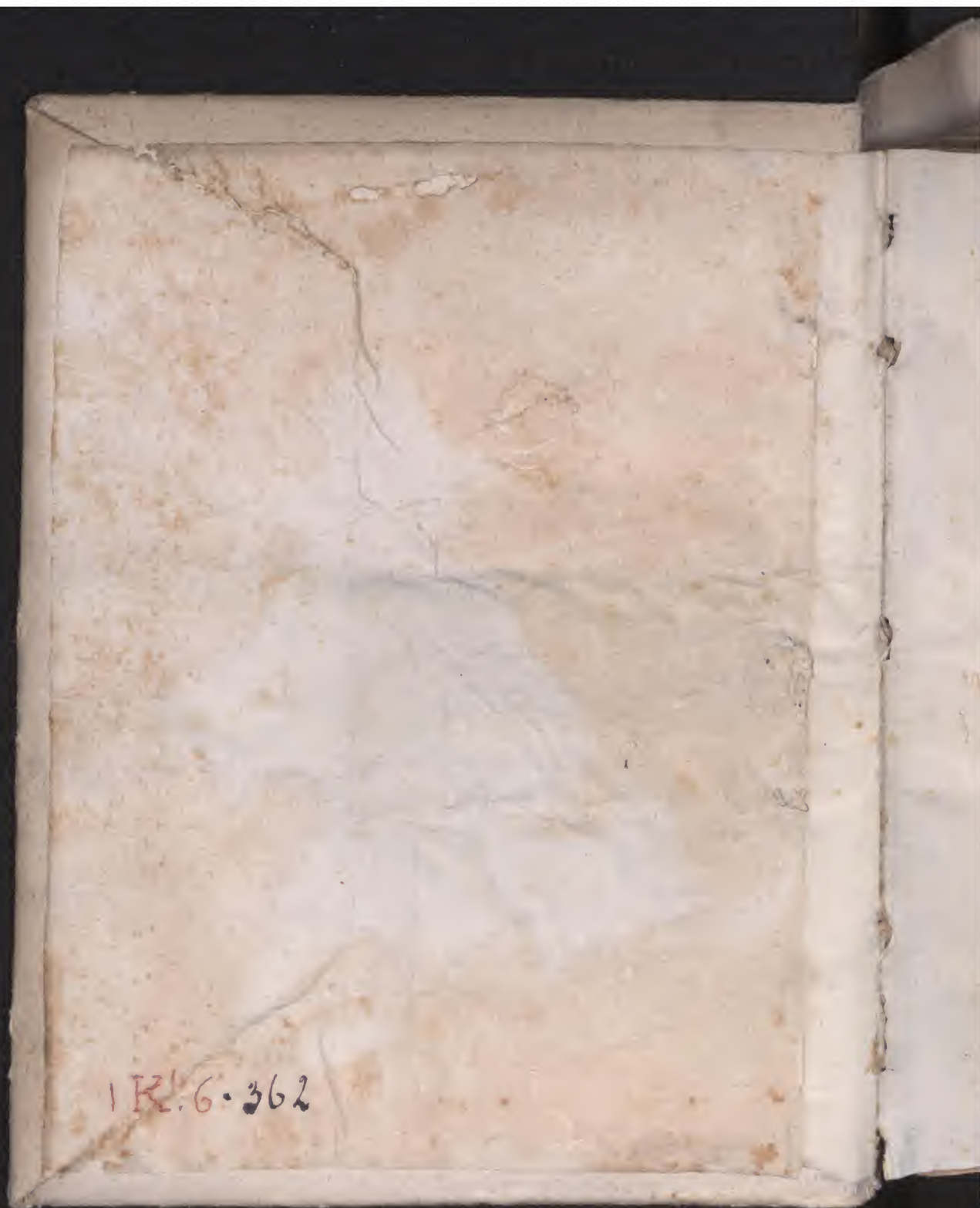
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.362



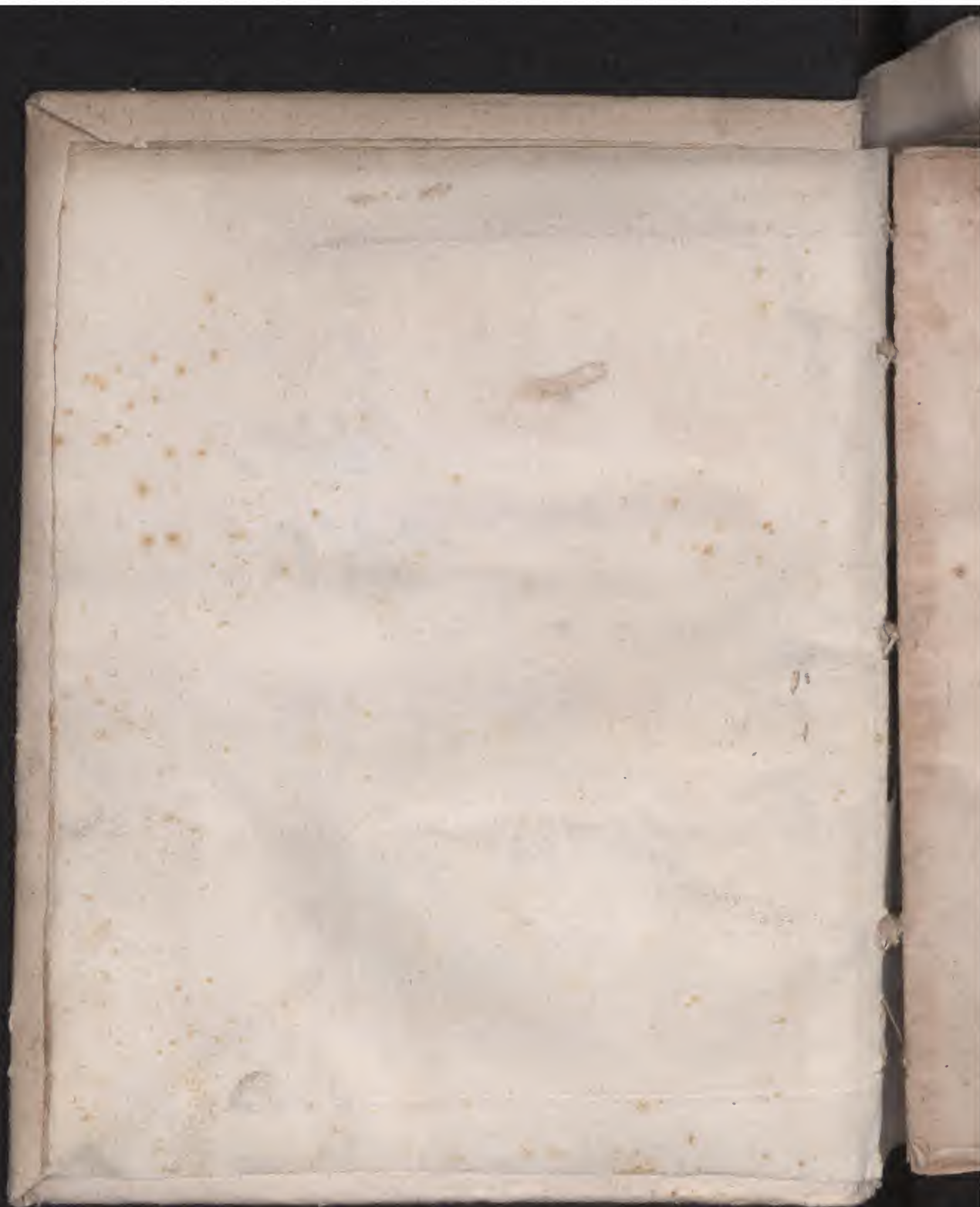
Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.362



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di
Firenze.
CFMAGL. 1.6.362



XI
~~WALL~~
WALL



MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

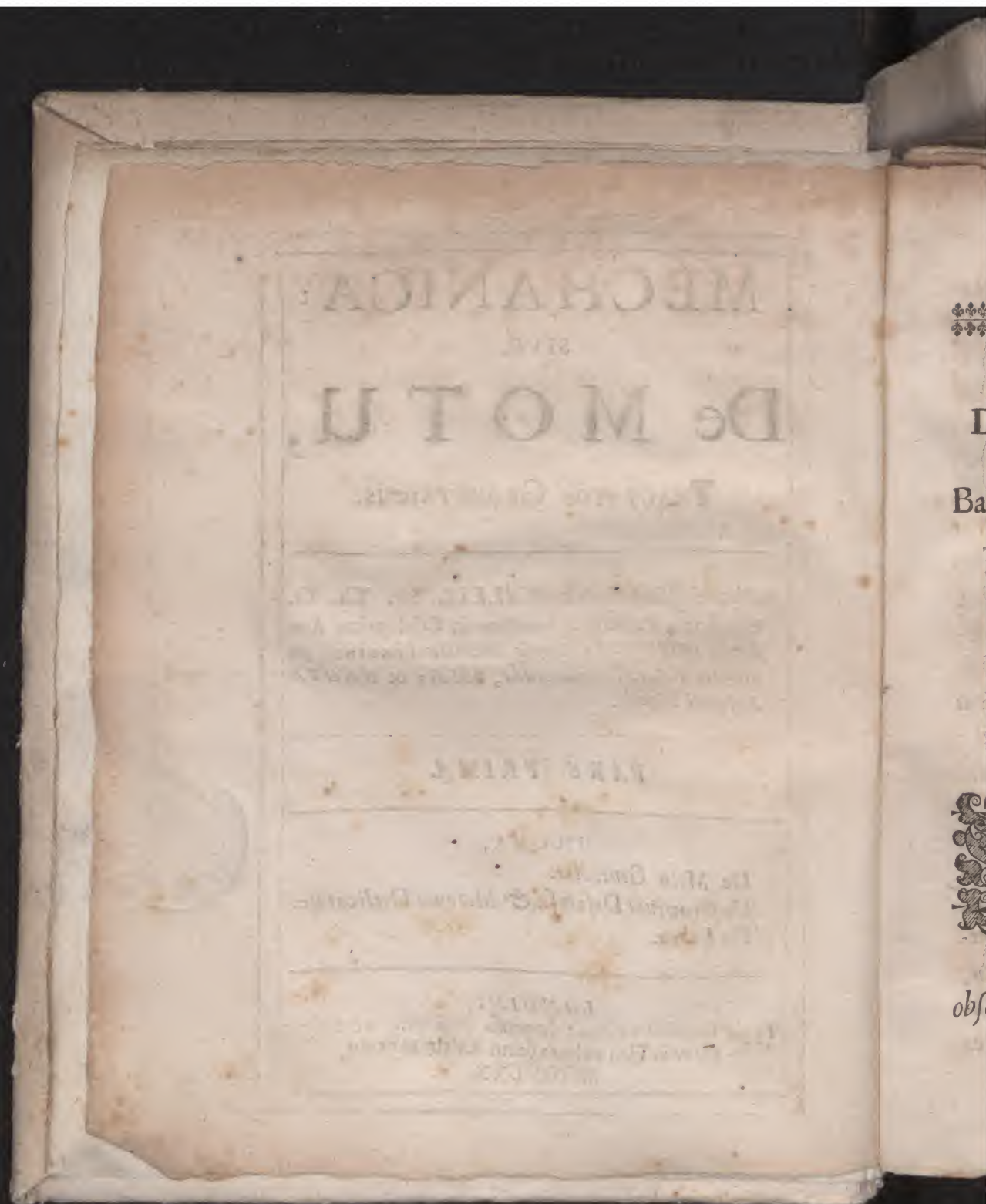
Authore JOHANNE WALLIS, SS. Th. D.
Geometriæ Professore Saviliano in Celeberrima Aca-
demia OXONIENSI; Regalis Societatis LONDINI, pro
Scientia Naturali promovenda, Sodali; & REGIÆ
Majestati à Sacris.

PARS PRIMA.

IN QUA,
De Motu Generalia.
De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.
De Libra.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid; Impensis Moss Pitt, ad Insigne
Cervi in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXX.





[]



HONORATISSIMO DOMINO
D. GULIELMO BROUNCKER,
EQUITI AURATO;

Baroni BROUNCKER de *Newcastle*,
Vicecomiti BROUNCKER de *Lions*;
Serenissimæ REGIÆ Majestatis,
pro Re NAUTICA Commissario;
Serenissimæ REGINÆ Cancellario:
Regalis Societatis LONDINI, pro
Scientia Naturali promovenda, Præsidi
Dignissimo.



N habes tandem (Honora-
tissime Domine,) eorum par-
tem, quæ, Tuis Regiæque
Societatis (cui Tu jam à
pluribus annis summo cum
honore Præsides) mandatis
obsequens, anno ab hinc secundo, prælo com-

A 2

mi-

[]

miseram. Sperâram equidem Opus integrum breviori tempore absolvendum fore: Sed, partim ob eam, quam causantur Typothetæ, rei difficultatem, & insolentiorum typos ponendi modum; partim ob meam (Oxonio agentis) perpetuam ferè à prælo absentiam; partim quod aliis subinde occurrentibus negotiis impediti Typothetæ non huic potuerint semper intenti esse; factum est, ut in longius protractum sit negotium quam speraverim. Hinc est, quòd, quem totum unâ vice proditutum Tractatum destinaveram, jam particulatim prodeat. Cujus jam habes Partem Primam, quæ totius Fundamenta continet; & speciatim, De Libra doctrinam. Quam propediem sequetur Secunda, (quæ De Centro Gravitatis erit; ejusque Calculo, in figuris quam plurimis curvilineis, atque ex his oriundis solidis, & superficiebus curvis, satis intricato:) Utpote cujus partem maximam jam absolverunt operæ. Et, post illam, Tertia; quam primum per Preli difficultates.

[]

tes licebit. Hoc autem, quicquid est, Tuo
potissimum nomini dicandum duxi ; non tan-
tum ob eam quam Tibi debemus observan-
tiam , (quæ tamen maxima est,) eamque
quam à pluribus annis expertus sum tuam in
me propensam Amicitiam : Sed & ob eam,
quam cum summâ Nobilitate conjunctam ha-
bes, summam hujusmodi rerum Intelligenti-
am. Quanquam enim gravissimis negotiis
aliàs occupatus ; tum quæ rem Nauticam
spectant, quibus Serenissimo Regi inservis ;
tum quæ Serenissimam Reginam, cujus tu
curas negotia ; tum quæ , cui Tu Præsides,
Societatem Regiam : Eâ tamen in rebus
Mathematicis perspicaciâ, summoque inge-
nij acumine fretus es , quasi tu huic tantum
negotio intentus esses, & nulli secundus. Ve-
rum quidem est, tum ea quæ hic habes, tum
eorum quæ mox inscutura sunt partem
maximam, ante plures annos scripta fuisse,
(quod norunt saltem ij in quorum privatos
usus exscripta fuerunt exemplaria ; & qui-
bus.

[]
*bus jam urgentibus prodeunt :) Sed eò
audacius in lucem jam emitto : quòd Tibi
antebac perlustrata non displicuerint, & Te
jubente prodeant, Tu porro perge, quod facis,
rem literariam & ornare & promovere :
Nec averteris interim,*

Novemb. 10. 1669.

Tui observantissimum

Joh. Wallis.

Mechanica :

MECHANICA:

Sive,
De MOTU,
Tractatus Geometricus.

CAP. I. DE MOTU GENERALIA.

DEFINITIONES.

I. MECHANICEN, appello, *Geometriam de Motu.*



Mechanica artes, per contemptum dici solent illiberales illæ Cerdonum artes, & his similium, quas rude vulgus exercet: ad quas Labore magis quàm Ingenio videtur opus. Et distingui solent, non à Geometriâ tantum, sed ab aliis etiam Ingeniis, (quæ mente magis quàm manu exerceri solent; atque acumen animi vel postulant vel faciunt;) Liberalibus dictis; ut quæ Liberos deceant, ut, Servos, Serviles illæ & illiberales.

In re Geometricâ; *Mechanicè* quid factum, non Geometricè, dici solet: quando rudi *χρησιμότητι*, vel materialis instrumenti applicatione, aliisve mediis non absimilibus, aliquid metimur: non, *ἀποδείξει*. Puta: Si quis, admoto Filo, ad Diametrum primo, deinde ad Perimetrum Circuli, quam hæc ad illam rationem habeat, investigatum iret; eamque, experimento factò, triplâ paulò majorem inveniret, vel triplam sesquiseptimam proximè: *Mechanicè* factum diceretur. Secus autem;

B

quum

quum *Archimedes*, modo Geometrico, & Demonstrationibus ab ipsâ Circuli naturâ petitis, eandem in libro *ᾧ τὸ κύκλου μέγεθος* inquisivit.

Nos neutro dictorum sensu *Mechanicen* dicimus. Sed eam Geometriæ partem intelligimus, quæ *Motum* tractat : atque Geometricis rationibus, & *ὑποκειμένης*, inquit, Quâ vi quisque motus peragatur.

Nomen *Μηχανῆς* sortitur : quia *Machinis* construendis maximè inserviat. An autem *Mechanica*, *Μεχανικα*, dicatur, (numero singulari,) an (pluraliter) *Mechanica*, *Mechanicorum*; perinde est. Id est, τὰ *ᾧ τῶν Μηχανῶν*, an 'H *ᾧ τῶν Μηχανῶν*, (scil. τέχνη vel ἐπιστήμη, vel διδασκαλία.) Nam ad eandem formam dicuntur, *Grammatica*, *Logica*, *Physica*, &c. ut intelligatur, vel ἡ *γραμματική*, *λογική*, *φυσική*; vel τὰ *γραμματικά*, *λογικά*, *φυσικά*. Hoc est, 'H *ᾧ τῶν γραμματικῶν*, *ᾧ τῶν λόγων*, *ᾧ τῶν φύσεως*, (τέχνη, ἐπιστήμη, διδασκαλία,) aut τὰ *ᾧ τῶν*, &c. Quâ de re videatur, si libet, *H. Stephanns, De abusu Græcæ Linguae*.

Sed & (ab *ἵσμι*, *pendo*, *pondo*,) etiam *Statica*, dici solet, vel *Mechanice* tota, vel ea saltem pars quæ de *Ponderibus* agit; quæ, quanta sint, ad *Libram* (*σαβῶν*) solent examinari.

II. Per Motum intelligimus, Motum localem.

Quamquam enim de pluribus Motuum generibus agant Logici, alique; puta Generatione, Augmentatione, Alteratione, &c. (quæ omnes an ad Motum Localem reduci possint, non libet hic disquirere.) Nos *Motum* hic in famosiori significato intelligimus de Motu Locali; quæ *τόπος*, *Latio*, dici solet.

Circa Motum autem, multa consideranda veniunt : ut *Vis*, *Tempus*, *Resistentia*, *Longitudo*, *Momentum*, *Impedimentum*, *Celeritas*, *Gravitas*, *Pondus*, &c.

III. Momentum, appello, id quod motui efficiendo conducit.

IV. Impedimentum, id quod motui obstat, vel eum impedit.

Momentum, eâdem ratione à verbo *Moveo* descendit, atque *Impedimentum* ab *Impedio* : Eâdem scilicet Analogiâ, quâ & alia verbalia, in *men* & *mentum* finita, à suis verbis. Nam, ut à *Luceo*, *Lumen* : à *Fluo*, *flui* ; *Flumen* : à *Nuo*, *Numen* : à *Fulgeo*, *fulsi* ; *Fulmen* : à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum* ; *Fulcimen*, & *fulcimentum* : à *Moneo*, *monui*, *Monumentum*, & à *Monitum*, *Monimentum* : à *Flo*, *flavi*, *flatum* ; *Flamen* : à *Fari*, *fatum* ; *Famen* : à *Frango*, *fregi*, *fractum* ; *Fragmen*.

CAP. I. DEF. V.

3

men & *fragmentum* : ab *Ago*, *egi*, *actum* ; *Agmen* : ab *Arceo*, *arctui*, *arctum* ; *Armentum* : à *Rado*, *raſi*, *raſum* ; *Ramentum* : à *Cælo*, *ceçidi*, *caſum* ; *Cementum* : à *Noſco*, *novi*, *notum* ; *Nomen*, & *nobile* : Sic, à *Moveo*, *movi*, *motum* ; *Momen*, *Momentum*, & *Mobile*. Sed & *Moles*, *molior*, *molimen* : niſi quis hæc à *εωχμειω*, deducta malit.

Ad *Momentum* refero, *Vim motricem*, & *Tempus*. Quæ, quò majora ſunt, eò magis efficitur motus.

Ad *Impedimentum*, refero, *Reſtentiam*, & *Distantiam*. Quæ, quò majora ſunt, eò magis motus *Impeditur*.

V. *Vim motricem*, vel etiam *Vim ſimpliciter*, appello *Potentiam efficiendi motum*.

VI. Per *Tempus*, intelligo, *Temporis ſpatium id, in quo motus tranſigitur*.

VII. *Reſtentiam*, ſive *Vim reſtendi*, *Potentiam Motui contrariam* ; ſive *quæ motui reſſtit*.

VIII. Per *Distantiam* ſive *Longitudinem motus*, intelligo, *Longitudinis ſpatium illud quod motu tranſigitur*.

IX. *Celeritas*, eſt *affectio motus ex comparatione Longitudinis & Temporis reſultans* : *Utpote quæ, Quo Tempore quanta Longitudo tranſigitur, determinat*.

X. *Æqualis Celeritas*, eſt, *quæ Æqualem Longitudinem, Æquali tempore, tranſigit*.

XI. *Major Celeritas*, eſt, *quæ Majorem Longitudinem Æquali Tempore tranſigit* : vel, in *Minori Tempore, Longitudinem Æqualem*. Et quidem, in eâ ratione *Major*, quâ, vel illa *Longitudo, Major eſt* ; vel *Tempus, Minus*. *Minor* ; quæ contrà.

XII. *Gravitas*, eſt *vis motrix, deorſum* ; ſive, *ad Centrum Terræ*.

Quodnam ſit, in conſideratione *Phyſicâ*, *Gravitatis principium*, non hic inquiremus. Neque etiam, An *Qualitas* dici debeat, aut, *Corporis Affectio* ; aut, quo alio nomine cenſeri par ſit. Sive enim ab innatâ qualitate in ipſo gravi corpore ; ſive a communi circumſtantium *vergentiâ ad centrum* ; ſive ab *electricâ* vel *magneticâ Terræ facultate*, quæ *gravia ad ſe allicit* ; & *effluviis ſuis, tamquam catenulis, attrahat* ; ſive aliaſ undecunque proveniat, (de quo non eſt ut hic moveamus litem :) ſufficit,

B 2.

ut

ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam sensu deprehendimus; Vim deorsum movendi, tum ipsum Corpus grave, tum quæ obstant minus efficacia impedimenta.

Et quidem, quamquam de Naturali Gravitate (prout concipi solet) seu ipsâ corporis affectione, quâ, suâ sponte (ut solet dici) deorsum tendit, directè intelligatur: Tamen, quoniam nihil incommodi inde proventurum videtur in sequente propositionum serie, etiam si de externâ vi continuâ deorsum premente recta ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram sollicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. Quæ enim de Gravitate affirmantur, de quâcunque Vi continuâ, recta ad Terræ Centrum movente, perinde vera sunt; sive sit ea vis innata, sive adventitia.

Quæ autem de Gravitate dicta sunt, respectu Centri Terræ; perinde de quâvis alia motrice Vi continuâ poterunt intelligi, respectu sui quò tendit termini. Adeoque si vox ea, particulari significatui hætenus accommodata, quatenus Terræ Centrum respicit, latiori sensu intelligatur, de quâvis vi motrice continuâ, recta ad suum terminum movente; non minus vera erunt quæ traduntur, sed & forsan magis accuratè dicta; dum generalia generaliter efferuntur. Sed quoniam de Gravitate solent ea speciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici universaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accommodavi, ut interim moneam, generaliter esse vera, quæ speciatim efferuntur. Ut mox dicetur fufius.

XIII. Per Pondus intelligo gravitatis mensuram.

Pendo seu Pendeo, & Pondus, parem habent inter se cognationem atque apud nos *weigh & weight*; (quæ à Latinorum *Veha* videntur descendisse: sicut etiam *Wayu & Wagon*, quæ Latinis *Vehes & Vehiculum* dicuntur.)

An verò *Pondus* à *Pendo*, an hoc ab illo dicatur, non magni interest; an, quod ego malim, utrumque.

Est utique Verborum *Pendo & Pendeo* duplex significatus. Prior est *To Hang*: A quo significatu *Pondus* dictum puto; (sicut a *Tego*, *Toga*; a *πέπρω*, *Pompa*; a *ῥέμβω*, *Rhombus*, &c.) idemque significare quod Græcis *ὄακν*, & propriè de *Gravi pendente* dictum: Adeoque, ab *Onere* distingui, quod Græcis *ὄνυς*, (unde & *Onus* descendisse videtur;) ut *Pondus*, sit quod *Appendet*; *Onus*, quod *incumbit*, Grave: *Βάρος*, utrumque. Sed &, ab *ἀγω*, *Agōs*, etiam adhuc latius videtur; quod quocunque *Adigit*, vel impellit; cum illa tria Graviorum nomina (*ὄακν*, *ὄνυς*, *βάρος*) non nisi *deorsum tendentia* designent: utut laxiori sensu promiscuè non raro usurpentur omnia.

Posterior

Posterior Verborum significatus, qui est *To Weigh*, à Pondere ortum traxisse videtur: quod est, *Appensa ad libram pondera examinare*.

A priori significatu, dicimus, *Appendo, Suspendo, Dependeo, Tendulus*, &c. A posteriori, *Perpendo, Expendo, Impendo, Rependo, Pensum, Pensio*, &c. (ex more veterum, qui *Pendere* solebant Nummos, quos nos *Numeramus*.) Sed & *Perpendo, Expendo*, &c. sensu Metaphorico, ad Animum transferuntur; à posteriori significatu, quando ut ad Libram Pondera, sic Res Animo pensitamus: sicut, à priori, dicitur, *Animi pendere, suspensus animus, spe pendulus*, &c.

Differunt autem *Pendo*, & *Pendeo*, non aliter quam Transitive ab Intransitivo. Quod in ejusmodi formæ Verbis, usu venit. Ut *Pando, Patco; Mando, Maneo; Tendo, Teneo*; (*carceri Mando, in carcere Maneo*; *morem Obtendo, mos Obtinet; Tenet sententia, ad me Attinet, Pertinet*, &c.) *Vendo, Veneo; Venundo, Venum eo; Circundo, Circum eo*; reliquæque fere a *Do* & *Eo* composita; ut *Subdo, Subeo; Prodo, Prodeo; Reddo, Redeo; Trado, Transeo; Edo, Exeo; Condo, Coco; Abdo, Abeo; Addo, Adeo; Indo, Ineo; Obdo, Obco; Perdo, pereco*; & siqua sunt similia.

Ego autem, neglecto si quod est inter *Pondus* & *Onus* discrimine, (quo *Libram*, illud; hoc, *Vellem*, magis spectet;) per *Pondus* jam intelligo, illam, in utrovis, Gravitatis mensuram, quam ad Libram solemus examinare.

Pondus sic intellectum, aut Gravitatis etiam, prout vel in Movente, vel in Mobili, consideratur; ita vel ad Movendi, vel ad Resistendi vim pertinebit: Adeoque nunc ad Momentum, nunc ad Impedimentum referetur.

Et quidem, cum ex omnibus Virium generibus, non aliud sit quod accuratius ad examen revocari solet, quam *Pondus*; solemus, ad hujus normam, reliquas tum vires tum Resistencias æstimare; easque tantas reputare, quanto Ponderi æquipollent.

Et quamquam tum *Pondus*, tum *Vis* etiam, ex æquo respiciant, vel vim Movendi, vel vim Resistendi: cum tamen, ut plurimum, quod motum itur *Pondus* sit, seu *Grave*; *Vis* autem, quæ efficiendò motui adhibetur, sit non rarò *Vis Humana*, aut *Animalium*, aut *Ventus* etiam, aut *vis Elastica*, aliæque plures, non minus quam *Grave Pondus*: Ponderis nomine, plerumque, vim Resistentiæ, in sequentibus designabimus; & Virium nomine, vim Motricem. Ubi secus erit intelligendum; dictorum series satis indicabit.

XIV. Directionem Mobilis, aut etiam Motûs, appello, rectam qua tendit Mobile. (Motûsque mensuram secundum hanc æstimatam, Motûs Longitudinem appello.) Sin curvâ feratur Mobile, (cujus Directio in singulis punctis immutetur;) ea est, pro singulis punctis, motûs Directio, quæ curvam in illis punctis Recta contingit.

XV. Directionem Virium, seu Moventis, appello, Rectam quâ tendit vis Motrix. Motûsque mensuram secundum hanc æstimatam, appello Motûs Altitudinem.

Etque hæc Virium directio in Descensu Graviorum, Recta deorsum ad Centrum Terræ, quo Gravia sponte sua tendunt. Quales quidem Rectæ, quamquam in Centro coeant omnes, pro Parallelis tamen haberi solent: Tum quod sensuum judicio tales sint (non enim valent sensus distinguere inter verè parallelas, & quæ tantillum à parallelismo declinant;) Tum etiam quia si intelligatur, verbi gratiâ, Libræ Jugum adhuc longius à Terra removeri, ad infinitam distantiam; erit ea declinatio quâvis assignabili minor.

XVI. Declivitatem, seu Gradum Declivitatis, appello, Respectum illum, qui ex motûs Altitudine & Longitudine comparatis, (ob variam Directionis Motûs ad Directionem Moventis positionem,) emergit. Atque Acclivitatem similiter; quæ à Declivitate non aliter differt quàm quod altera Descensum, Ascensum altera respiciat.

Fig. 1. Puta, FO, declivis; OF, acclivis recta.

XVII. Æqualem Declivitatem, appello, quæ, equali peractâ Longitudine, æqualem Altitudinem peragit. Atque Acclivitatem, similiter.

XVIII. Majorem Declivitatem, vel Acclivitatem, dico, quæ, equali peractâ Longitudine, majorem Altitudinem peragit; vel, minori Longitudine, Altitudinem æqualem. Et quidem, eâ ratione majorem, quâ vel Altitudo illa major est, vel Longitudo, minor. Minorem; quæ contrâ.

Verbi

Verbi gratiâ. Sit FP, directio moventis, (puta, recta ad Horizon- Fig. 1.
tem perpendicularis;) FO, FB, vel FC, directio motus, (puta,
obliqua quolibet, per quam descendat Grave.) Si FO, EC, longitu-
dine æquales, sint Æque-altæ: *Æqualiter declives*, dico: sin verò, Lon-
gitudine æqualium altera, ut FO, sit Altior; eandem & *Magis declivem*
dico. Similiter, si Æque-altæ FO, FB, (quarum altitudo sit ipsi FP,
æqualis,) sint & Longitudine æquales; *Æqualiter declives* dico: Sin
altera, ut FO, sit brevior; eandem & *Magis declivem* dico. Et utro-
bique, eadem ratione *magis declivem*, quâ vel FO est Altior quam FC,
vel Brevior quam FB.

XIX. Obliquitatem verò, *hujusve mensuram*, appello, *Angulum quem facit cum Perpendiculo, (vel Directione Moventis,) Directio Motus, seu Linea quâ fertur Mobile.*

Putâ, OFP.

XX. Inclinationem verò ad Horizontem, appello, *obliquitatis complementum, sive quem facit Angulum ad Horizontem, aut ad rectam Directioni moventis perpendicularem.*

Ut FOP.

Declivitatem autem ab *Obliquitate, & Inclinatione*, (quamquam ex unâ reliquâ dependant,) distinguere necesse duxi; quoniam *Obliquitas & Inclinatione* Angulis mensurari solent; Ea verò *Declivitatis* ratio mihi tractanda videbatur, quæ rectarum inter se rationes respiciat. Quippe quæ inde dependent, non quidem vel Obliquitatis vel Inclinationis Angulo, sed Altitudini rectarum longitudine æqualium proportionalia, vel in reciproca ratione Rectarum Altitudine æqualium, in sequentibus deprehenduntur.

Porro; Cum ea quæ de Gravitate diserte dicta sunt in sequentibus, non ita Gravitati sint peculiaris, quin ut plurimum alii cuivis continuæ vi motrici accommodanda veniant; adeoque & universaliter tradi debere videntur, (ut modo dictum est:) Cur illud nominatim de Gravitate pro-
rulerim, causa est, quod, cum Graviorum motus frequentius considerationi hominum exponi soleat, adeoque vocabula huic accommodata, menti familiarius se offerant, citius animo percipienda duxerim quæ de hoc motu (qui ex multis unus est, sed præ cæteris magis notabilis,) traderentur, atque ad hujus deinde normam intelligerentur reliqui.

Ea verò sient generalia (nec minus interim demonstrata) interpositâ laxiori hac Gravitatis (cum connexis) definitione.

XXI.

XXI. Per Gravitationem, laxius acceptam, intellige, *Vim quam vis continuam in quamcunque plagam motricem* : per Terræ Centrum, intellige, *Terminum quò tendit vis illa motrix* ; Per Perpendicularum, vel Rectam ad Terræ Centrum, vel etiam Rectam Horizonti perpendicularem, intellige, *Lineam Directionis Vis motricis* : Per Descensum & Ascensum ; *Appropinquationem & Elongationem à Terminò Vis Motricis* : Per Rectam Horizontalem, vel Horizontale Planum ; Rectam, seu planum, *lineæ directionis moventis ad angulos rectos* : Per Descensum, vel Ascensum Obliquum ; *Lationem secundum Lineam quæ Lineam Directionis moventis oblique secat, ad moventis Terminum Accedendo, vel inde Recedendo. Cæteraque similiter accommodanda sunt.*

XXII. Machinas, appello, *Instrumenta motibus examinandis, vel etiam facilitandis, forinsecus adhibita.*

Qualia sunt *Libra, Væltis, Trochlea, Cochlea, Axis in Peritrochio, Cuneus*, & similia. Quorum Definitiones suis locis sequuntur.

Priusquam autem ad Machinas illas separatim considerandas accedamus, quas Mechanicorum scriptores tractare solent : Præmittenda erunt communia quædam, quæ omnes ex æquo spectant. Quæ sint Principiorum loco, & à quibus reliqua dependent, quæ de singulis postea tradenda erunt.

Idque eò magis mihi faciendum incumbere videatur : Quia qui antehac tractandum hoc susceperunt negotium, videntur citra Principia constituisse : nec ab imis eruta fundamentis, etiam ea quæ sana sunt, tradidisse : Sed postulasse potius, quæ, utut vera sint, Demonstratione tamen aliquâ videntur indigere : Unde, tum, in iis quæ consequuntur, minus acquiescat animus *inmodicè* avidus, tum & ea minus valeat, in novâ materiâ, ampliare.

PRO-

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Quæ ad æqualia eandem habent rationem, sunt inter se æqualia. Et contra.

$$A = E. \quad 2A = 2E. \quad 3A = 3E. \quad rA = rE.$$

Fig. 2.

Putæ; Si A, E, sint inter se æqualia; erunt & inter se æqualia 2 A, 2 E; item 3 A, 3 E; Et, universaliter, r A, r E; cujuscunque rationis Index sit r. Per 7, 9, 11. Prop. 5 El. *Euclidis*.

PROP. II.

Ubi ratio ex duabus pluribusve componitur; Datis componentibus, datur composita. Nempe, Multiplicatis invicem exponentibus componentium, ut habeatur Exponens Compositæ.

$$a \times e = ae = a.$$

$$2 \times 3 = 6.$$

Fig. 3.

$$\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

Sunt, datarum Rationum componentium, dati Indices, seu Exponentes (rationum *παιδείας* appellat *Euclides*; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; malim *Quotientes*; id enim vult quod ex termini Antecedentis per consequentem divisione emergit,) a, e. Datur, inquam, Ratio ex his composita; Ea nempe cujus Exponens est $a = a \times e$. (per 5. Def. 6. Elem.) Quod erat demonstrandum. Similiter ostenditur si plures essent rationes componentes, puta l ad n, m ad s, n ad t; quæ ex his componitur, est ratio l m n ad r s t. Propter $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$

C

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Quò hæc rectius intelligantur, notandum erit (quod non pauci perperam accipiunt,) Rationes, puta Dupli, Tripli, &c. Indices seu Exponentes habere 2 , 3 , &c. Unde denominationem sumunt: Nempè Quotientes terminorum Antecedentium per suos Consequentes divisionum. Adeoque Rationis 4 ad 2 , Exponens est 2 ; quia 2) 4 (2 : quam itaque Dupli rationem dicimus. Rationis 6 ad 2 , Exponens est 3 ; quia 2) 6 (3 : quæ propterea dicitur Tripli ratio. Et universim, Rationis l ad r , Exponens est $\frac{l}{r}$: nempè Quotiens Antecedentis l per Consequentem r divisi

Hos Indices sive Exponentes, appellat Euclides, *Rationum πλῆθῆς*; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; exposuissent tutius *Quotientes*. Quippe illud vult Euclides, quod ex Antecedentis per consequentem divisione emergit. Dixit autem *πλῆθῆς* potius quam *ποσῆς*, ut illos etiam Quotientes comprehenderet quæ non essent numeri integri, sed Fracti, aut Surdi, &c. Nam *Quotientis* sive *ποσῆς* vocem, strictè sumptam, non de aliis Quotientibus usurpabant quàm qui essent numeri integri; qui ostenderent *Quotuplus*, *ποσάπλῆς*, esset Antecedens Consequentis: At *πλῆθῆς* de Quotiente quolibet, utcunque Fracto, vel Irrationali, dicebatur; qui non modo *Quotuplus*, (puta, Duplus, Triplus, Quadruplus, &c.) Sed & *πλῆκαπλάσιος* *Quantuplus* esset Antecedens Consequentis, ostenderet: puta Duplus cum semisse, Triplus cum quadrante, Quadruplus cum besse, &c.

Definit autem Euclides, § Def. 6. *Rationem ex Rationibus compositam*, dici, quando illius Exponens (*πλῆθῆς*) ex harum Exponentibus invicem multiplicatis conficitur. Adeoque, ex Rationibus Dupli & Tripli, componi, *Rationem Sextupli*; (quia scilicet $2 \times 3 = 6$;) nihil aliud est quod vulgò dicimus, *Duplum Tripli*, esse *Sextuplum*. Item, Ex Dupli & Sesquialteri rationibus, componi *rationem Tripli* (quia $2 \times \frac{3}{2} = 3$;) idem est atque, *Duplum Sesquialteri*, *Triplum* esse. Quoniam verò hoc in omnibus rationum compositionibus non ita commodè, ad posteriorem hanc formam, proferri possit; priorem itaque adhibere solent. Puta; *Rationem 9 ad 4*, ex rationibus 3 ad 4 & 3 ad 1 , componi; potius dicunt, quàm *Duplum Sesquiquartum*, ($\frac{3}{2} = 2 \frac{1}{2}$) esse, *Subsesquiertii*, *Triplum*; quia scilicet $\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times 3$. Idipsum tamen utrobique significatur. Quod quidem qui probè advertunt, tum Euclidis definitionem rectius intelligunt, tum & de perplexâ in componendis rationibus difficultatè minùs fortasse conquerentur. Saltem quid

nos

PROP. III. *De Motu, Generalia:*

11

nos in hac & sequentibus propositionibus intellectum volumus, satis assequantur; qui Rationes solemus per earum Indices vel Exponentes designare. Pura, 2 A, Duplum quantitatis A; 3 A, Triplum A; $\frac{1}{2}$ A, Sesquialterum; $2 \times \frac{1}{2}$ A, Duplum Sesquialteri; $\frac{1}{r}$ A, quod est ad A, in ratione l ad r; $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s}$ A, quod est ad A, in ratione quæ ex l ad r, & m ad s, componitur. Et in reliquis similiter.

PROP. III.

Ubi Ratio ex duabus componitur; Datâ Compositâ, & componentium unâ; datur altera. Nempe, Diviso exponente Compositâ, per Datâ componentis Exponentem, ut habeatur Exponens reliquæ. Similiter; si ex quotlibet componitur; Datâ compositâ, & vel unâ, vel quotlibet componentium, vel ex his compositâ; datur composita ex reliquis.

$$a) e(e).$$

$$2) 6(3$$

Fig. 3.

$$\frac{l}{r}) \frac{lmn}{rst} (\frac{mn}{st}$$

$$\frac{lm}{rs}) \frac{lmn}{rst} (\frac{n}{t}$$

Si Rationis Compositæ Exponens datus a; datûsque unius ex componentibus Exponens a: Datur, inquam, reliquæ Exponens e. Cum enim (per præced.) Sit $a \times e = a$: si dividatur a per a; prodibit e, Exponens reliquæ componentis.

Similiter; Si compositæ ex pluribus Exponens $\frac{lmn}{rst}$ detur, uniusque ex componentibus $\frac{l}{r}$; illo per hunc diviso, prodit exponens compositæ ex reliquis $\frac{mn}{st}$. Datûsque tum Exponente compositæ $\frac{lmn}{rst}$, tum aliquot componentium, aut ex his compositæ, $\frac{l}{r}$ & $\frac{m}{s}$ vel $\frac{lm}{rs}$; datur exponens reliquæ, vel ex reliquis (si plures sint) compositæ, $\frac{n}{t}$.

C 2

SCHOLIA.

SCHOLIUM.

MOnendum interim est, Intelligendam esse hanc Propositionem (& quæ hinc dependent) de ejusmodi Ratione Componente datâ, cujus Exponens est verè quantitas, & finita: Non 0, vel Infinitum.

Quippe, si, quæ supponitur componentium altera data sit nullius quantitatis (puta, ut 0 ad 1;) quæcunque sit Componens reliqua, Composita etiam nullius erit quantitatis: Adeoque, ex compositâ, & illâ componente, quæ fuerat Componens reliqua non constabit. Est enim tam $0 \times 1 = 0$, quam $0 \times 2 = 0$, aut $0 \times 3 = 0$. &c. Nullies Unum, perinde nullum est, atque Nullies Duo, vel Nullies Tria, &c.

Similiter, Si sit Componentium altera, ratio Infiniti, (cujus index sit ∞ .) Est enim tam $\infty \times 1 = \infty$, quam $\infty \times 2$, vel $\infty \times 3$, &c. Infinites Unum, pariter sunt Infinita, atque infinites Duo, vel infinites Tria, &c. Non constat itaque, ex his datis, quænam sit illa Ratio, quæ intelligitur, cum Infinitâ composita, etiam Infinitam exhibere,

PROP. IV.

Si Ratio quævis cum Æqualitatis ratione componatur; eadem manet quæ prius ratio. Et contra; Quæ cum aliâ ratione composita, illam non immutat; est Æqualitatis ratio.

Fig. 4.

$$2 \times 1 = 2. \quad 3 \times 1 = 3. \quad r \times 1 = r.$$

$$\frac{A}{E} \times \frac{1}{1} = \frac{A}{E}. \quad \frac{A}{E} \times \frac{r}{r} = \frac{rA}{rE} = \frac{A}{E}.$$

Puta; Quæ ex Æqualis & Dupli rationibus componitur, est Dupli ratio: Quæ ex Æqualis & Tripli, est Tripli ratio, &c. Sive; Quod est Duplo Æquale, Duplum est: Quod Triplo, Triplum, &c.

Sequitur ex 2 hujus. Exponens utique Rationis Æqualium est 1; (Nam Æquale quodvis per suum Æquale divisum, Quotientem exhibet 1:) Qui quemvis alium exponentem multiplicans, eundem restituit; (quippe $r \times 1 = r$.) Adeoque constat Propositum. Con-

Conversa similiter patet. Quippe si $\frac{A}{E} \times r = \frac{A}{E}$; erit $r = 1$.

PROP. V.

Quantitates qualibet, in eadem ratione vel auctæ vel diminutæ; in eadem quâ prius ad invicem ratione constituuntur.

$$A. B. C. :: 2 A. 2 B. 2 C. :: \frac{1}{2} A. \frac{1}{2} B. \frac{1}{2} C. :: r A. r B. r C. \quad \text{Fig. 5, 6.}$$

Sequitur ex præcedente. Est utique $\frac{r A}{r B} = \frac{A}{B} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{B}$. Item $\frac{r A}{r C} = \frac{A}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{C}$. Et $\frac{r B}{r C} = \frac{B}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{B}{C}$. Adeoque $r A. r B. r C.$ in eadem ad invicem ratione atque $A. B. C.$

Idem demonstrabitur ex 16 Element. 5. Cum enim sit, ex hypothesi, ut $r A$ ad A , sic $r B$ ad B ; erit (permutando) $r A$, ad $r B$, ut A ad B . Et de reliquis similiter.

PROP. VI.

Quæ ex Reciprocis Rationibus componitur Ratio, est ratio Æqualitatis. Et contra; Æqualitatis Ratio, ex Reciprocis componitur.

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1. \quad \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1. \quad \frac{A}{E} \times \frac{E}{A} = \frac{AE}{AE} = 1. \quad \text{Fig. 7, 8.}$$

Putæ, Dupli Dimidium, Triplum Trientis, Quadrantis Quadruplum; Sesquialteri Subsesquialterum, &c. tantundem valent atque Æquale.

Sequitur ex 2 hujus. Quippe si ratio A ad E , cum ejusdem reciproca E ad A , componatur: prodibit ratio AE ad AE , quæ æqualitatis est.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Hæc quæ præcedunt Lemmata, ex Rationum doctrinâ desumptâ, huc transfulimus, ob frequentem eorum in sequentibus usum.

Demonstrationes verò ita comparatæ sunt (tum hic tum in sequentibus passim) ut & Praxin Arithmeticæ quam *Speciosam* vocant, directè respiciant; & ad appositâ figuras lineares (si cui id grâtius videbitur) facile accommodentur.

Exempli gratiâ. Ad propositionem primam; perinde est sive A & E habeantur pro Symbolis sive speciebus Arithmeticis; sive pro linearum adscriptarum, his notis designatarum indiciiis. Utrovis enim modo procedit demonstratio, sive de Lineis, sive de Literis.

Sic ad Prop. 2 & 3 perinde succedit demonstratio, sive sint a, e , Symbola Arithmeticæ speciosæ, adeoque a quod ex harum invicem multiplicatione oritur: sive designet a Altitudinem, e Basim, Parallelogrammi a . Quippe Parallelogramma in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus compositâ constitui notum est. Adeoque, ut Parallelogrammorum similium Lateribus homologis repræsentari solent rationes Componentes; ita Parallelogrammis ipsis, eorumve Areis, rationes Compositæ.

Sic ad Prop. 4. Perinde est, sive intelligamus quantitates A, E , per eandem r multiplicatas, ipsas rA, rE (multiplicatione factas) in eadem ratione exhibere cum ipsis A, E ; sive Parallelogramma rA, rE , (propter æquales Altitudines r ,) esse ad invicem ut eorum Bases A, E .

Et similiter ad Prop. 5. Sive dicamus quantitates A, B, C , per eandem r multiplicatas, producere rA, rB, rC , ipsis A, B, C , proportionales; Sive parallelogramma rA, rB, rC , (propter æqualem altitudinem) Basibus proportionalia; Sive etiam, in similibus triangulis latera A, B, C , & rA, rB, rC , in eadem ad invicem esse ratione: perinde est.

Item in Prop. 6. Perinde est sive intelligamus $A \times E = E \times A = AE$: sive æqualia dicamus Parallelogramma quorum Altitudines sunt ut A ad E , Bases verò his reciprocar, nempe ut E ad A .

Id saltem interest; Quod demonstrationes, si tanquam Arithmeticæ habeantur; Universaliores sunt, & de quocunque Quantitatum genere pariter concludunt: Si verò ad Lineas vel Parallelogramma speciatim respiciant; de his solum directè concludunt, (idque ex vi Propositionum particularium de his in Elementis demonstratarum: quales sunt, Parallelogrammorum rationes componi ex rationibus Laterum Homologorum circa æquales angulos; Parallelogramma æqualia, esse ut Bases;

Bases; Parallelogramma quorum Bases & Altitudines sunt reciproce proportionales, esse Aequalia, &c.) de aliis vero, non nisi accommodando ad alias quantitates (puta, Vires, Pondera, Velocitates, Declivitates, &c.) easdem analogias quas in Lineis vel Parallelogrammis, &c. demonstrare fuerant.

Ego interim, utut Demonstrationes hujusmodi, prout Arithmetice speciosæ praxin directè respiciunt, (adeoque universaliore existunt,) potiores existimem; adeoque adscriptas figuras, non nisi unum aliquem ex multis casum, qui sub Universali propositione continetur, (cui reliqui tamen, in aliis quantitatibus sunt conformes,) exhibere: Si tamen malint alii (quibus Demonstrationes Lineares magis arrident) ut rationes omnes, in quibuscunque quantitatibus (quamquam Lineis sint Heterogeneæ) Lineis utcunque exhibeantur; atque hinc ad ipsas de quibus agitur quantitates transferantur, His etiam satisfacere vellem. Idque eò magis, ut quàm inter se conjunctæ sint hæ binæ demonstrandi methodi, perspiciatur; & quàm facili negotio, demonstrationes Rationum Lineares, Lineis exutæ, simplicius simul & universalius exhiberi possint.

PROP. VII.

Effectus sunt, causis suis adæquatis, proportionales.

$C.E :: 2C.2E :: 3C.3E :: rC.rE.$

Fig. 9.

Nam, si Causa ut C, efficit ut E; etiam altera C, cæteris paribus, alterum E efficit; tertia tertium, &c. Adeoque 2 C, 2 E; 3 C, 3 E; & quotlibet C, totidem E. Hoc est Dupla C, duplum E; tripla triplum; & similiter in quavis aliâ Multiplicium ratione.

Sin dicatur, Propter circumstantias evenire posse, ut C altera, priori parem, non producat effectum: Jam non erit hæc aut illa C, ut C, adæquata Causa; sed potius, hæc vel illa C, his aut illis circumstantiis adjuncta vel impedita; Quod est contra Hypothesin.

Atque idem ostendetur, de quavis ratione Submultiplicium. Verbi gratiâ: Si 2 C efficiat ut 2 E; etiam C efficiet ut E. Si enim C efficiat vel plus vel minus quam E; etiam 2 C similiter efficeret plus vel minus quam 2 E, (per primam partem hujus demonstrationis:) Quod est contra hypothesein. Similiter ostendetur, de quavis aliâ submultiplicium ratione; Puta, Si 3 C efficiat ut 3 E; etiam C efficiet ut E, &c.

Idem

Idem de quavis *Commenſurabilium* ratione, ſic oſtenditur. Eſto, verbi gratiâ, expoſita Cauſarum ratio 2 ad 3, ſive n ad m : erit eadem & effectuum ratio. Nam ſi cauſa ut 2 C, efficiat ut 2 E; etiam Cauſa ut C, efficiet ut E; (per ſecundam partem huius;) adeoque (per partem primam) 3 C, ut 3 E. Quod erat propoſitum. Et ſimiliter de quâvis *commenſurabilium* ratione oſtendetur, aſumptâ in demonſtrationem communi menſurâ. Puta; Si cauſa ut n C efficiat ut n E; etiam C efficiet ut E; adeoque m C, ut m E.

Quodque de *Commenſurabilibus* oſtenditur; Cùm nulla cauſa concipi poſſit, cur non de *Incommenſurabilibus* ſimiliter verum ſit; (poſſitque etiam, de his, ſi opus ſit, Demonſtratione Apagogicâ evinci;) de omnibus pariter verum erit, Effectus Cauſis ſuis adequatis proportionales eſſe. Quod erat demonſtrandum.

S C H O L I U M.

U Niverſalem hanc Propoſitionem præmittendam etiam duxi; quoniam viam aperit, quâ, ex purè Mathematicâ ſpeculatione, ad Phyiſicam tranſeatur; ſeu potius hanc & illam connectit.

P R O P. VIII.

Contrariorum, quatenus contraria ſunt, Aggregatum; aequipollet Exceſſui præpollentis: Congruentium verò; eorundem Summæ.

Fig. 10.

$+A$	$+3A$	$-3A$	$+A$	$-A$	$+3A$	$-3A$
$-A$	$-2A$	$+2A$	$+A$	$-A$	$+2A$	$-2A$
$+0$	$+1A$	$-A$	$+2A$	$-2A$	$+5A$	$-5A$

S unto Contrariorum Signa + & -. Adeoque; Si illud *Suſum* deſignet; deſignabit hoc *Deorſum*: Si illud, *Addendum*; hoc, *Anferendum*, deſignabit; Et de aliis contrariis ſimiliter. Sintque contrariorum quantitates A, 2 A, 3 A, &c. Erit $+A - A = 0$, $+3A - 2A = +A$, $-3A + 2A = -A$, &c. (Ut ex Additionum legibus conſtat.) Hoc eſt, Aggregatum, æquivaler Exceſſui præpollentis. Quod erat propoſitum.

At

PROP. IX. *De Motu, Generalia.*

17

At $+A+A=+2A$. $-A-A=-2A$. $+3A+2A=+5A$.
 $-3A-2A=-5A$. (ut ex Additionum legibus similiter constat.)
 Quod item erat propositum.

Exempli gratiâ. A sursum, & A deorsum, se mutuò destruunt:
 3 A sursum, & 2 A deorsum, tantundem valent atque 1 A sursum:
 3 A deorsum & 2 A sursum, æquivalent atque 1 A deorsum: Adeoque,
 Qui (verbi gratiâ) unum passum ascendit, & tantundem descendit;
 nihilo est vel altior vel humilior: Qui ascendit 3 passus, & 2 passus de-
 scendit, est uno passu altior: Qui 3 passus descendit iterumque ascen-
 dit 2 passus, est uno passu humilior.

Item, Qui unum Addit, & tantundem Aufert, nihilo vel Auget
 vel Minuit: Qui addit 3, & Aufert 2, uno Auget: Qui 3 Tollit, &
 2 Restituit, uno Minuit. Et de Contrariis aliis similiter judicandum.

Contra verò: Qui 3 passus ascendit, & insuper 2 alios, est 5 passi-
 bus altior: Qui 3 passus descendit, & deinde 2 alios, est 5 passibus
 humilior.

Item: Qui 3 Addit, & insuper 2, quinario auget: Qui tum 3,
 tum 2 Tollit, quinario minuit. Et de reliquis similiter.

PROP. IX.

Equipollens si vel Augeatur, vel Contrarium Minuatur;
 fit Præpollens: Si Minuatur, vel Contrarium Augeatur;
 fit minus-pollens.

$$A + E > A. \quad A - E < A.$$

Fig. 11.

Quia Totum est sui Parte majus. Puta: Totum $A + E$, præpol-
 ler ipsius parti A. Et Totum A, ipsius parti $A - E$.

SCHOLIUM.

Suntque hæ Propositiones Novem, totidem Lemmata; quæ non
 magis spectant præsentem Motuum Doctrinam, quam quavis
 aliam; Sed frequentissimi usus erunt in sequentibus, quare in vestibulo
 demonstrandas duxi.

D

PROP.

PROP. X.

Ubi conjuncta sunt Momentum & Impedimentum : Si Momentum præpollet, pro Momento simul habenda sunt; pro Impedimento verò, si præpollet Impedimentum; Et utrobique Tanto, quantus est præpollentis Excessus; Sin æquipollent, pro Neutro.

Sin plura sint conjuncta vel Momenta, vel Impedimenta : Tanta simul habenda sunt, quanta est eorundem summa.

Cum enim Contraria sint Momentum & Impedimentum; hoc est, Causa ut sit, &, Causa nè sit : Constat propositum, per 8 hujus.

PROP. XI.

Si Momentum Impedimento præpollet : Motum efficit. Adeoque; Si nullus fuerit, Inchoatur : Si jam fuerit, Augetur.

Si præpollet Impedimentum : Impedit. Adeoque Motum, siquis jam sit, vel Tollit, vel saltem Minuit.

Et quidem in eâ ratione plus minúsve Efficit aut Impedit, quâ major est vel minor Excessus præpollentis.

Si Æquipollent : Neque Ponitur motus, neque Tollitur. Adeoque quæ priùs erat vel Quies vel Motus, perseverat.

Sequitur ex præcedente. Nam prout utriusque Aggregatum pro vel Momento, vel Impedimento, vel Neutro habendum est; ita vel motum Efficit, vel Impedit, (& quidem in eâ ratione,) vel Neutrum, per 7 hujus.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

POstremam hujus Propositionis partem, Nempe, Inceptum Motum, (nisi obstaculum ponatur,) suapte sponte (sine continuo motore,) non minus quam jam existentem Quietem (nisi accedat Motor) perseverare; Galileus, Cartesius, Gassendus, alique, videntur Postulare; atque hinc non levis momenti multa inferunt: Qui autem Demonstraret, non memini me vidisse quempiam. Erátque hoc nobis, in sequentibus, asserendum, ubi de Motuum Acceleratione dicitur: tam propere tamen, in ipso statim vestibulo, asserendo abstinuissem, nisi consequentiæ necessitatè viderem me coactum jam statim affirmare; non parvi postea momenti futurum.

PROP. XII.

Vis vi contraria, si æquipollet, sustinebit: Si minùs pollet; nè hoc quidem: Si præpollet, (neque aliud adsit impedimentum;) movebit. Et contrà: Si movet; præpollet: Si non movet; tum vel minus pollet, vel saltè æquipollet, vel aliud quid impedit.

$$\begin{aligned} +A - A &= 0. + 2A - 3A = -A. + 3A - 2A = +A. \\ +S - D &= 0. + S - D = -. + S - D = +: \end{aligned}$$

It, verbi gratià, S, vis sursum; D, deorsum. Si invicem æquipolent; nullis æquivalent, (per 8 hujus;) A deoque motum non efficiant; (per 7 hujus.) Si S præpollet; fit motus sursum: Si D, deorsum. Æquivalent utique Excessui præpollentis; per 8 hujus; Eritque motus consonus; per 7 hujus. Et similiter de quibusvis aliis Viribus contrariis ostenderetur.

Dico tamen, Nisi aliud adsit Impedimentum. Quoniam fieri potest, ut vel Medii densitas, vel durities, vel Obex aliquis obstet, quo minus à præpollente moveatur vis inferior; utut Obex ille, vim in contrarium Motricem non habeat, sed simpliciter Impediat. Ut, quum grave pavimento incumbit: quod vim habeat Impediendi ne descendat; non autem Motivam sursum; quia nec ipsum sursum nititur.

D 2

S C H O-

SCHOLIUM.

Procedit hæc tum Propositio, tum Demonstratio, potissimum de Mobili jam in Quiete constituto. Si verò jam sit in Motu; Hoc ipsum, esse in motu, accensendum erit causis ejusdem motus continuativis, vel impeditivis contrariis. Quippe sublatio motus, tam causam efficientem postulat, quam motus Positio; uti ex Prop. preced. constat. Unde est, quod Motus Penduli, verbi gratiâ, à gravitate inchoatus, non quidem à gravitate solâ continuatur, sed ab ipso impetu seu motu jam existente continuatur, etiam ultra perpendicularum, adeoque ascendendo; non obstante ipsius gravitatis in contrarium nisu, aliisque forsan non contemnendis obstaculis, quod & in aliis motibus ab impetu inchoato continuatis passim obtinet. Quodque ad hanc Propositionem monemus; etiam in sequentibus, prout res tulerit, intelligendum erit.

Hoc autem fundamento nititur, de contra-ponderantibus, seu contra-moventibus judicium: Adeoque vel Quietis, ob æquilibrium seu contra-moventium æquipollentiam; vel Motus, ob præponderantiam, seu præpollentiam.

PROP. XIII.

Quæ ex Mobilium pondere resultant motus Impedimenta; (cæteris paribus,) sunt Ponderibus proportionalia. Quodque de Pondere dicitur, de quavis aliâ contrariâ vi, similiter intelligendum, quæ ponderis instar erit. Et similiter in sequentibus.

Fig. 12.

$$P. 1 :: 2 P. 2 I :: 3 P. 3 I :: n P. n I.$$

Nam si pondus ut P, impedit ut I; etiam alterum P, cæteris paribus, ut alterum I impedit; tertium, ut tertium; &c. Adeoque 2 P, ut 2 I; 3 P, ut 3 I; & quotlibet P, ut totidem I. Quare & tantundem Ponderis, tantundem impedit; duplum, duplo; triplum, triplo, &c. Et in reliquis similiter proportionibus: per 7 hujus.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Dico autem, *Ceteribus paribus*; Quoniam idem Pondus, pro vario situ, aliisque circumstantiis, potest variè impedire. Ubi autem cetera sunt paria; tota quæ oritur diversitas, à solâ Ponderis diversitate, ut ab adæquatâ causâ, profuit. Cæteraque, quæ Æqualium rationem subeunt, proportionem non immutant. Per 4 hujus.

Quodque hic dictum est, etiam in aliis propositionibus pariter intelligendum erit, licet non difertè dicatur. Quod semel monuisse sufficiat.

PROP. XIV.

Quæ ex Longitudine transigendâ, resultant motus Impedimenta; sunt Longitudinibus proportionalia.

Quodque de Longitudinibus, dicitur; de Medii densitate, tenacitate, aut simili quovis Impedimento, pariter dicendum erit. Et similiter in sequentibus.

$$L. 1 :: 2 L. 2 I :: 3 L. 3 I :: m L. m I.$$

Fig. 13.

Putâ; Æqualis Longitudo transigenda, æqualiter Impedit; dupla, duplò; tripla, triplo, &c. Nam si Longitudo ut L, impedit ut I; Etiam altera L, ut alterum I impedit; & tertia, ut tertium, &c. Adeoque; Dupla, duplò; Tripla, triplo; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus.

PROP. XV.

Quæ ex Pondere simul, & Longitudine transigendâ, resultant motus Impedimenta; sunt in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compositâ.

$$\frac{P.}{L.} \frac{1}{1} :: \frac{2 P.}{2 L.} \frac{4 I}{4 PL.} :: \frac{2 P.}{3 L.} \frac{6 I}{6 PL.} :: \frac{n P.}{m L.} \frac{m n I.}{m n PL.}$$

Fig. 14.

Putâ;

PUta; Duplum Pondus, per Duplam Longitudinem ferendum; est Impedimentum Quadruplum; per Triplam, Sextuplum: Triplum Pondus, per Longitudinem Triplam, est Impedimentum Noncuplum; per Quadruplam, Duodecuplum, &c. Nam, si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impedit ut 1; etiam alterum P, per eandem Longitudinem ferendum, impedit ut 1 alterum; tertium, ut tertium, &c. Adeoque; Duplum, duplò; Triplum, triplo, &c. per eandem Longitudinem ferendum. Per 13 hujus. Cum itaque Pondus ut 2 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 1: Pondus idem per Longitudinem 2 L ferendum, impediat ut 4 I; per 3 L, ut 6 I, &c. per præced. Item; Cum Pondus 3 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 3 I: idem per 3 L ferendum, impediat ut 9 I; per 4 L, ut 12 I, &c. per præced. Et, universaliter, Si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 1: Pondus n P, per eandem L ferendum, impediat ut n I (per 13 hujus;) Adeoque, per m L, ut $m n$ I; (per præced.) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XVI.

Si, in duobus motibus, Pondera & Longitudines, vel utraque sint Æqualia, vel sint Reciproce proportionalia; Quæ hinc resultant Impedimenta, sunt Æqualia. Et contrà: Si quæ inde resultant Impedimenta sunt æqualia; Pondera & Longitudines sunt vel utraque Æqualia, vel saltem Reciproce proportionalia.

Fig.	P.	2 P.	2 P.	3 P.	n P.	m P.
14, 15.	$\frac{2 L.}{2 PL. I.}$	$\frac{L.}{2 PL. I.}$	$\frac{3 L.}{3 PL. I.}$	$\frac{2 L.}{6 PL. I.}$	$\frac{m L.}{mn PL. I.}$	$\frac{n L.}{mn PL. I.}$

PUta: Æquale Pondus, per Æqualem Longitudinem ferendum, Æqualiter Impedit. Item, Pondus Duplum per Æqualem Longitudinem, & Æquale Pondus per Longitudinem Duplam ferendum, Æqualiter impediunt. Sic, Pondus Triplum per Longitudinem Æqualem, & Æquale Pondus per Longitudinem Triplam. Item, Pondus

PROP. XVII. *De Motu, Generalia.*

23

Pondus Duplūm per Longitudinem Triplam, Et, Triplum Pondus per Longitudinem Duplam, &c.

Sunt enim Impedimenta, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita; (per præced.) Adeoque, (cū hæc sunt reciproca,) æqualia sunt: (per 6 hujus.) Unde & conversâ patet.

SCHOLIUM.

Posset quidem ea clausula, *Vel utraque æqualia*, tutò omitti, utpote quæ in sequenti, *Reciproce proportionalia*, continetur. Nam, ut Dimidio Duplum, sic & Æquale Æquali, reciprocum est. Mallem tamen, perspicuitatis gratiâ, tum in hac Propositione, tum in sequentibus aliquoties, illud etiam disertè inferere. Quod quidem non tantum ex 6 hujus, sed & 4 hujus, perinde patet.

Ex his autem quatuor Propositionibus proximè præcedentibus, æstimatur *Motuum* perficiendorum *Magnitudo*. Ea scilicet quæ ex mobilium Pondere, & motus Longitudine, simul consideratis emergit.

PROP. XVII.

Quæ respectivis Impedimentis æquipollent Momenta, sunt Impedimentis proportionalia.

(Adeoque Ponderibus, si reliqua sint paria; vel Longitudinibus, si reliqua sint paria; vel quæ ex Pondere & Longitudine resultant Impedimentis, si reliqua sint paria.)

Eaque Momenta, si augeantur; vel minuantur Impedimenta; movebunt.

Fig.

16, 17,
19.

$$M. I :: 2 M. 2 I :: 3 M. 3 I :: r M. r I.$$

Putâ; Æquale Momentum, Æquali Impedimento æquipollet; Duplum, Duplo; Triplum, Triplo, &c. Nam si Momentum ut M, æquipollet Impedimento ut I; etiam alterum M, alteri I æquipollebit; & Tertium, Tertio, &c. Adeoque, Duplum Duplo, Triplum, Triplo, &c. per 7 hujus.

Adeoque; vel Ponderibus, vel Longitudinibus, vel quæ ex utrisque simul resultant Impedimentis, (cæteris paribus,) sunt proportionalia.

Nam

Nam his proportionalia sunt, quæ ex his resultant Impedimenta. per 13, 14, 15. hujus.

Sin augeatur Momentum Æquipollens, vel Impedimentum minuat; Momentum præpollebit; adeoque, movebit. per 9, 10. hujus.

SCHOLIUM.

Atque hinc dependet de Æquilibrio, seu contra-nitentium Æquipollentiâ, judicium; &, quæ hinc sequitur, Quies: quique ex Præpollentiâ procedit, Motu.

PROP. XVIII.

Virium momenta, cæteris paribus, sunt Virium gradibus proportionalia.

Fig. 18.

$$V.M::2V.2M::3V.3M::nV.nM.$$

Pluta; Vis æqualis, tantundem movendo pollet; Dupla, duplo; Tripla, triplo, &c. Nam, si vis ut V, moveat ut M: etiam vis ut 2 V, movebit ut 2 M; 3 V, ut 3 M; n V, ut n M, &c. per 7 hujus.

PROP. XIX.

Virium, gradu æqualium, Momenta; sunt, cætaribus, Temporibus proportionalia.

Fig. 17.
19.

$$T.M::2T.2M::3T.3M::mT.mM.$$

Nam, si Vis exposita, Tempore T, moveat ut M: etiam altero T, tantundem efficiet; tertio, tantundem, &c. Adeoque, in 2 T, ut 2 M; in 3 T, ut 3 M; in m T, ut m M, &c. Hoc est, Duplo tempore, duplum efficiet; Triplo, triplum, &c. per 7 hujus.

PROP.

PROP. XX.

Quæ ex Virium gradu, simul & applicationum Tempore resultant Momenta; sunt in ratione ex Virium & Temporum rationibus compositâ.

$$\frac{V.}{T.} M :: \frac{2V.}{4T.} 4M :: \frac{2V.}{6T.} 6M :: \frac{nV.}{mT.} m n M. \quad \text{Fig. 21.}$$

Puta; Vis Dupla, duplo Tempore, Quadruplum potest; triplo, Sextuplum; Tripla, triplo tempore, potest Noncuplum; quadruplo, Duodecuplum, &c. Nam, si Vis ut V , Tempore T , moveat ut M : Vis ut $2V$, eodem Tempore, movebit ut $2M$; & $3V$, ut $3M$, &c. per 18 hujus. Cum itaque Vis ut $2V$, Tempore T , moveat ut $2M$; Vis eadem, Tempore $2T$, movebit ut $4M$; & tempore $3T$, ut $6M$, &c. Per 19 hujus. Item, Cum Vis ut $3V$, Tempore T , moveat ut $3M$; Vis eadem, Tempore $3T$, movebit ut $9M$; Tempore $4T$, ut $12M$, &c. Et, universaliter, Si Vis V , Tempore T , moveat ut M ; Vis nV , eodem Tempore T , movebit ut nM , (per 18 hujus:) Adeoque, Tempore mT , ut $m n M$, (per 19 hujus.) Hoc est, in ratione ex Virium & Temporum rationibus compositâ, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XXI.

Si Vires & Tempora, sint vel utraque Æqualia, vel sint Reciproce proportionalia; quæ hinc resultant Momenta sunt Æqualia. Et contrâ: Si Momenta illa sint Æqualia; Vires & Tempora, sunt, vel utraque æqualia, vel saltem Reciproce proportionalia.

$$\frac{V.}{2T.} M :: \frac{2V.}{T.} 2M :: \frac{2V.}{3T.} 6M :: \frac{3V.}{2T.} 6M :: \frac{nV.}{mT.} m n M :: \frac{mV.}{nT.} m n M. \quad \text{Fig. 20, 21.}$$

E

Puta;

Pluta; Vis æqualis, æquali Tempore, tantundem efficit. Item, Vis dupla æquali tempore, & Vis æqualis duplo Tempore, tantundem efficiunt. Sic, Vis, dupla triplo Tempore, & Vis tripla duplo Tempore, &c. Sunt enim Momenta in ratione ex Virium & Temporum rationibus composita; (per præced.) Adeoque (cum hæc sint Reciproca) Æqualia sunt. (per 6 hujus.) Unde & conversâ patet.

S C H O L I U M.

Ex his quatuor Propositionibus proximè præcedentibus, æstimantur, quæ ex Viribus & Temporibus simul consideratis emergunt, *Momentorum Magnitudines.*

P R O P. XXII.

In quibusvis Motibus invicem comparatis; Momenta sunt Impedimentis proportionalia.

Fig. 23, 25. $VT=M \cdot PL=I :: 2VT=2M \cdot 2PL=2I :: nVT=nM \cdot nPL=nI$

Fig. 22, 24. $M=VT \cdot \mu=VT :: I=PL \cdot \iota=\pi \lambda$

Pluta; si Vis V , Tempore T ; sive, quod ex his resultat, Momentum M ; movet Pondus P , per Longitudinem L ; sive tollit, quod ex his resultat, Impedimentum I : Duplum Momentum, tollit Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum, &c. Nam, si Momentum M , tollit Impedimentum I ; etiam alterum M , alterum I tollit; tertium, &c. Adeoque Duplum Momentum, tollit, Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum; & in reliquis similiter proportionalibus. Per 7 hujus. Quod erat propositum.

Sive, (ut in *Auræ Regulâ compositâ* dici solet;) Ut, Factum ex Pondere & Longitudine, in uno Motu; ad, Factum ex Pondere & Longitudine, in alio Motu: sic, Factum ex Vi & Tempore, in priori motu; ad, Factum ex Vi & Tempore, in posteriori motu; cæteris paribus.

S C H O L I U M.

Ex hac Propositione potissimum dependet Motuum inter se comparatio, quoad Vires, Tempora, Pondera, & Longitudines.

P R O P.

PROP. XXIII.

In Comparatis Motibus; Si Lationum Tempora sint æqualia; Celeritatum gradus sunt transactis Longitudinibus proportionales.

$$L. a :: C. x.$$

$$L. C :: 2 L. 2 C :: n L. n C.$$

Fig. 26.

HOc est: Ut Longitudo prima, ad secundam, eodem tempore transactam; sic Celeritas prima ad secundam.

Putat; Dupla Celeritate, (eodem Tempore,) Dupla Longitudo transigitur; Dimidia Celeritate, Subdupla Longitudo. Et similiter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXIV.

In comparatis Motibus; Si transactæ Longitudines sint æquales; Celeritatum gradus sunt Temporibus reciproce proportionales.

$$T. T :: C. x.$$

$$\frac{L}{T} C :: \frac{L}{2T} \cdot \frac{1}{2} C :: \frac{L}{nT} \cdot \frac{1}{n} C.$$

Fig. 27.

HOc est; Ut Tempus secundum, ad tempus primum; sic (reciproce) Celeritas prima ad secundam.

Putat; Dimidio Tempore, dupla Celeritate, transigitur æqualis Longitudo: Duplo Tempore, dimidia Celeritate. Et similiter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXV.

Comparatum Motuum Celeritates, sunt in ratione ex directâ Longitudinum & reciproca Temporum rationibus compositâ.

$$\text{Fig. 28. } \frac{L}{T} \cdot C :: \frac{2L}{\frac{1}{2}T} \cdot C :: \frac{3L}{\frac{1}{3}T} \cdot C :: \frac{nL}{\frac{1}{n}T} \cdot C$$

$$\frac{L}{T} \cdot C :: \frac{2L}{\frac{1}{2}T} \cdot C :: \frac{3L}{\frac{1}{3}T} \cdot C :: \frac{nL}{\frac{1}{n}T} \cdot C$$

Puta: Longitudo dupla, dimidio Tempore transigitur, Celeritate Quadruplâ: Tripla Longitudo dimidio Tempore, Celeritate Sextuplâ: Tripla Longitudo duplo Tempore, Celeritate Sesquialterâ, &c.

Nam, si Longitudo L , Tempore T , absolvatur Celeritate ut C : Longitudo $2L$, eodem Tempore T , absolvetur Celeritate ut $2C$; (per 23 hujus:) Adeoque dimidio Tempore seu $\frac{1}{2}T$, duplo adhuc celerius, sive Celeritate ut $4C$. (per præced.) Similiter, Longitudo $3L$ tempore T , celeritate ut $3C$; (per 23 hujus:) Adeoque Tempore $\frac{1}{3}T$, Celeritate ut $6C$; & Tempore $2T$, Celeritate $\frac{1}{2}C$: per præced. Et, uniuersaliter; Si Longitudo L , tempore T , transigitur Celeritate C : Longitudo nL eodem tempore transigitur Celeritate nC , (per 23 hujus:) adeoque Tempore mT , celeritate $\frac{n}{m}C$; (per præced.) Hoc est, in ratione quæ ex directâ Longitudinum & reciproca Temporum rationibus componitur. Quod erat propositum.

PROP. XXVI.

In comparatis Motibus; Si transactæ Longitudines, sint Temporibus proportionales: Celeritates sunt æquales.
Et contrâ. L.

$$L.T::2L.2T::3L.3T::nL.nT.$$

Fig. 29.

Sequitur ex præcedente. Quoniam, hoc casu, Reciproca Temporum (quæ eadem est cum reciproca Longitudinum) cum directa Longitudinum, compolita; æqualitatis ratio est. per 6 hujus.

Vel ex definitionibus Celeritatum. Cum enim Æqualis Celeritas, æquali Tempore, æqualem Longitudinem absolvit (per Def. 10.) Etiam Duplo tempore, duplam Longitudinem; Triplo, triplam, &c. absolveret. Et contrâ. per 7 hujus.

PROP. XXVII.

In comparatis motibus, Virium gradus (cæteris paribus) sunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur.

$$VT.vr::PL.\pi\lambda.$$

$$V.v::\frac{PL}{T}.\frac{\pi\lambda}{r}::PLr.\pi\lambda T::PC.\pi x.$$

$$\frac{T}{r})\frac{VT}{vr}=\frac{PL}{\pi\lambda}(\frac{V}{v}=\frac{PLr}{\pi\lambda T}=\frac{PC}{\pi x}.$$

Cum enim (per 22 hujus) Momentorum ratio, quæ ex Virium & Temporum rationibus componitur; eadem sit cum eâ, quæ ex Ponderum & Longitudinum rationibus componitur, ratione Impedimentorum: Si eximatur utrinque ratio Temporum, vel (quod eodem recidit) illius Reciproca accedat; Relinquetur Virium ratio, ea quæ componitur ex rationibus Ponderum, & Longitudinum, & reciproca Temporum; Hoc est, (per 25 hujus) ea quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

EX hac Propositione dependet Problematum aliquot, in Mechanicis maximè celeberrimum, generalis solutio. Nempe,

PROP.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi movere.

$$P. V :: nP. \quad P. V :: 2P. \\ \frac{C.}{PC.} \quad \frac{\frac{1}{n}C.}{PC.} V. \quad \frac{C.}{PC.} \quad \frac{\frac{1}{n}C.}{PC.} V.$$

Si exposita Vis V, quæ movere potis sit Pondus P, celeritate C: & requiratur, ut eadem vel æquali Vi, moveatur Pondus nP .

Dico; Si, cæteris paribus, res ita comparetur (interpositâ Machinâ) ut, quâ ratione Pondus nP majus sit minûsve quàm Pondus P; eadem, contra, minor fiat majorve celeritas, puta $\frac{1}{n}C$: eadem Vis V, expositum Pondus nP , movebit celeritate $\frac{1}{n}C$.

Cùm enim rationes nP ad P, & $\frac{1}{n}C$ ad C, sint reciproæ; quæ ex his componitur est Æqualitas, (per 6 hujus:) Adeoque (per præced.) æqualis Vis requiritur ad movendum Pondus P celeritate C, atque Pondus nP celeritate $\frac{1}{n}C$. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

Huic igitur potissimum negotio se applicet Mechanicus, ut istiusmodi machinas excogitet, easque in usum redigar, quibus Vi & Ponderi interpositis, motuum celeritatem ita moderetur, ut Ponderum Magnitudinem Tarditate motûs compenset; seu, Temporis Longitudine, Defectum Virium.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, datâ Celeritate movere.

$$P. V :: P. \\ \frac{C.}{PC.} \quad \frac{nC.}{nPC.} \quad nV.$$

Sit

SIt expositum Pondus P , quod, celeritate C , movere potis sit Vis V : & requiratur, ut Celeritate nC , moveatur.

Dico: Si, cæteris paribus, quâ ratione augenda sit aut minuenda celeritas, eâdem similiter augeatur vel minuat Vis adhibita: expositum Pondus datâ celeritate movebitur.

Cum enim (propter idem utrobique Pondus) eadem sit Celeritatum ratio, cum illâ quæ ex hac & Ponderum rationibus componitur, (per 4 hujus;) eadem erit & Virium requisitarum ratio; (per 27 hujus.) Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

NOtandum interim: Cum non ita in promptu sit, Vires pro arbitrio augere, atque Celeritatem motus minuire; non ita facile erit præfens Problema, atque illud quod proximè antecedit, magnis Ponderibus actu applicare.

PROP. XXX.

Datâ Vi , datâ Celeritate, motum efficere.

$$P.V::\frac{1}{n}P.$$

$$\frac{C}{PC} \quad \frac{nC}{PC} \quad V.$$

SIt exposita Vis V , quæ Pondus P , celeritate C movere potis sit: requiratur autem, ut Celeritate nC fiat motus.

Dico: Si, cæteris paribus, quâ ratione augenda sit aut minuenda Celeritas; eâdem, vice versâ, minuat vel augeatur Pondus: Eâdem Vi , datâ celeritate, movebitur. Puta, Pondus $\frac{1}{n}P$, eâdem Vi , celeritate nC movebitur.

Cum enim Ponderum $\frac{1}{n}P$ ad P , & Celeritatum nC ad C , rationes sint reciproæ: Quæ ex his componitur ratio, Aequalitatis est; (per 6 hujus;) Adeoque & Virium requisitarum. per 27 hujus,

SCHOLIUM.

S C H O L I U M.

NOtandum denique ; Ita calculum his Propositionibus institui, ac si in Medio Vacuo peragendus sit motus : Quare nec Resistentiæ in medio, vel Magnitudinis aut Figuræ rei Mobilis, habita est, consideratio : Sed conditione hac, *Cæteris paribus*, tum hæ tum aliæ circumstantiæ sic excludi intelliguntur, ut vel nullæ sint, vel ita saltem comparatæ ut non immutent aut turbent rationes. Adeoque, ubi adsunt, opus erit (quò calculi Mathematici *in signa* conservetur, vel ab eâ quàm minimum recedatur,) ut earum vel accurata consideratio etiam habeatur, & calculo æstimetur ; vel saltem, ut eo modo comparentur quo minimum turbentur reliquæ rationes.

CAP.

CAP II.

De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.

PROP. I.

Gravia, cæteris paribus, gravitant in ratione Ponderum.
Et, universaliter, Vires Motrices quælibet, agunt pro
Virium ratione.

$$P. G :: 2 P. 2 G :: 3 P. 3 G :: r P. r G.$$

Puta; Si Pondus ut P , Gravitat ut G : Etiam alterum P , ut
alterum G gravitabit: tertium, ut tertium, &c. Adeoque $2 P$,
ut $2 G$; $3 P$, ut $3 G$; & quolibet P , ut totidem G , &c.

Est enim Gravitatis, Vis Motrix; ejusque mensura, Pondus:
(per 12, 13. Def. Cap. 1.) Movet igitur Gravitatis, pro Ponderum
ratione; per 18. Cap. 1. Et similiter in Motibus aliis ostendetur.

PROP. II.

Grave, quatenus non impeditur, Descendit; seu propius
ad Terræ Centrum appropinquat.

Et, universaliter, Vis quævis Motrix, secundum Directi-
onem suam, quatenus non impeditur, procedit.

Nam (per Def. Gravitatis) Gravitatis est Vis deorsum movens, seu
versus Terræ Centrum. Hac igitur, quatenus non impeditur,
feretur Grave, gravitate sua. per 11 cap. 1.
Et similiter in aliis motibus ostendetur.

F

PROP.

PROP. III.

Grave tantundem Descendit, quantò fit Terræ Centro propius : Tantum Ascendit, quantò remotius.
 Et, universaliter, Cujusvis Vis Motricis Progreſſus tantus eſt, quantum ſecundum Directionem ſuam movetur ; Regreſſus, contrà.

Fig. 30. $CD=CB$. $CA-CD=CA-CB$. $CD-CE=CB-CE$.

SIt C, Terræ Centrum : unde ducantur æquales rectæ CB, CD. Continuetur CB ad A, & jungatur AD. Item, ſumpto ubivis in CB, puncto E ; jungatur ED. Dico ; Grave ab A, puncto altiore, ad B vel D motum ; tantundem Descendiſſe, quantò B vel D, minus quàm A, diſtat à Centro C : Motum verò ab E, puncto quovis humiliore, ad B vel D ; tantum Ascendiſſe, quantò B vel D, magis quàm E, à Centro diſtat.

Eſt enim (per Def. Gravitatis) Deſcenſus gravium, (ſeu Motus ſecundum Directionem ſuam,) Motus verſus Centrum Terræ. Tantò igitur Deſcendiſſe dicitur Grave, quantò ad Terræ Centrum propius acceſſerit. Putà, quantò Brevior eſt CB vel CD, quàm CA. Adeoque tantò Ascendiſſe, quantò fuerit contrario motu latum ; hoc eſt, quantò à Terræ centro remotius abſceſſerit ; putà, quantò Longior eſt CB, vel CD, quàm CE. Quod erat propoſitum.

Adeoque : Quamquàm AD vel ED recta, Longior ſit quàm AB vel EB ; non tamen Altior ſeu major Deſcenſus eſt vel Aſcenſus, Gravis per illam, quàm per hanc lati.

Quodque de Gravitate oſtenſum eſt, ſimiliter de aliâ Vi Motrice intelligendum erit. Quod enim eſt, reſpectu Gravitatis, Deſcenſio : idem eſt, reſpectu cujuſvis Vis Motricis, Latio ſecundum Directionem ſuam : Et contrà. per Def. 21. Cap. 1.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

NOtandum interim; pro Pèripheriâ BD, indifferenter ut plurimum sumi Rectam Horizontalem BH; quæ, propter immensam Centri distantiam, & planorum quibus maxime versamur parvitatem, cum illâ quasi coincidens haberi solet. Si quando tamen vel immensa plana tractanda veniant, vel accuratius philosophandum sit; secernenda erunt.

Necui interim mirum videatur; quòd de Gravi, tanquam in uno Puncto, verba faciamus; cum interim Grave non sit nisi Corpus solidum: Monendum erit, considerare nos hic loci, *Grave* ut abstractum à *Magno*, (abstractione, ut loquuntur, Mathematicâ.) Consideramus utique, non quàm Grande Corpus, nedum quâ Figurâ sit, sed quanta Ponderis Vis hoc in puncto applicatur: Perinde habentes, mole magnâ sit, an parvâ, aut etiam nullâ sed Punctulo vis illa insit; Item; planum sit, an rotundum; plenum, an excavatum; quod ita ponderat. Quamquam enim, in *Hydrostaticis*, aut alias etiam ubi de Medii resistentiâ agatur, aut alibi aliis de causis; magni intersit, quâ mole quâve figurâ, sit Grave ponderans: ea tamen omnia hic secludimus, (eâdem libertate quâ, post *Archimedes*, alii, de Planorum, Linearum, aut etiam Puncti gravitate philosophantur; quod & nos inferius facturi sumus.) Atque hoc ipsum ne à veritate Physicâ nimis abhorreere videatur; ostendetur, in sequentibus, (ubi de Centro Gravitatis agetur,) Gravis quantumvis magni vim totam ita distribui ut perinde omnino ponderando valeat atque si in unico illius puncto esset. Verum eâ consideratione posthabita, quæ hujus loci non est; (quippe quum nondum definivimus Centrum gravitatis, nedum esse demonstravimus, aut quanta vis huic insit; (adeoque, ut in Scholio, ubi laxius agimus, illius mentionem faciamus; in Demonstrationibus tamen non eâ libertate utimur;) sufficit hic loci monuisse, nos id saltem hic inquirere, quid futurum sit, si hoc aut illo puncto tanta vis Ponderis (aut etiam quæ ponderis instar erit,) adhibeatur, undecunque demum fuerit. Quod & subinde sapius, in sequentibus, intelligendum erit.

PROP. IV.

Fig. 31. Eà, cæteris paribus, propendet Grave, vel ex pluribus gravibus Aggregatum; (Hoc est, eà potiùs fertur:) quàm plus Descenditur: idque in eàdem ratione quàm plus Descenditur. Eàque magis repugnat, & in eadem ratione, quàm plus Ascenditur. Et contrà. Quà verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur; æqualiter vel Propendet vel Repugnat. Et contrà. Cæterisque motibus idem similiter accommodabitur. Eà potiùs feretur Mobile, (& in eà ratione potiùs,) quàm magis secundum virium Directionem proceditur.

Cum enim tendat Grave (per def. Gravitatis) simpliciter *Deorsum*; adeoque, quàm potest maximè; (Naturaliter siquidem agentia, non agunt ex delectu, sed cæco impetu pro summâ virium:) Eà potiùs feretur, cæteris paribus, quàm magis erit *Deorsum*, seu minus *Sursum*; (adeoque contrario motui magis repugnat:) Hoc est, quàm plus Descenditur, quàmque Ascenditur minus; (& contrà; Quàm minus Descenditur, quàmque Ascenditur magis, ægrius feretur.) Et quidem (per 7 cap. 1.) in eadem ratione. Quod erat propositum.

Qua verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur: Æqualiter vel Propendet vel Repugnat. A Gravitate siquidem (per def. Gravitatis) non nisi Descensus ergò, vel omnino fertur, vel hac magis quàm illac fertur.

Contrà verò; Quàm, cæteris paribus, æqualiter vel Propendet vel Repugnat; æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur. (Nam siquàm vel magis Descenderet, vel minus Ascenderet; eà magis propenderet, minusve repugneret; per jam Demonstrata.) Quod itidem erat propositum.

Et eàdem ratione ostendetur conversâ primæ partis; Nempè, quàm plus propendet Grave, eà magis Descenditur; & quàm plus repugnat, eà magis Ascenditur, &c. Cæteris paribus.

Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP.

PROP. V.

Gravium Descensus, invicem comparati, in eâ ratione pol-
lent, quæ ex Ponderum ratione & ratione Altitudinum
Descensuum componitur. Atque Ascensus similiter.

Adeoque; Si Pondera sint æqualia; in ratione Altitudi-
num: Si Altitudines sint æquales; in ratione Ponde-
rum: Si Pondera & Altitudines, vel utraque sint æqua-
lia, vel sint Reciproce proportionalia; Æquipollent.

Et, universaliter, Virium Motricium quarumcunque Pro-
gressus Regressusve, pollent in ratione, quæ, ex ratione
Virium, & Progressuum Regressuumve secundum lineam
Directionis Virium æstimatorum, componitur.

$$\frac{P. G. :: nP.}{D. PD.} \quad \frac{P. G. :: P.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: P.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: P.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: P.}{D. mD.}$$

Fig.

32, 33.

$$\frac{P. G. :: nP.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: nP.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: nP.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: nP.}{D. mD.} \quad \frac{P. G. :: nP.}{D. mD.}$$

Fig.

34, 35.

$$\frac{P.}{D. PD.} G. :: \frac{nP.}{D. PD.} nG. :: \frac{P.}{D. PD.} mG. :: \frac{nP.}{D. PD.} mG. :: \frac{nP.}{D. PD.} G.$$

Puta; Si Grave ut P, per D descendens, valet ut G; etiam alte-
rum P (cæteris paribus) tantundem descendens, valebit ut G
alterum; tertium, ut tertium, &c. Adeoque nP, ut nG; in rati-
one Ponderum. per 7 cap. 1.

Item; Si Ponderis ut P, descensus per D, valet ut G: ejusdem Pon-
deris (cæteris paribus) per D alterum descendens, tantundem valebit;
adeoque ut alterum G: per tertium, ut tertium, &c. Adeoque per
mD, ut mG; in ratione Altitudinum. per 7 cap. 1.

Si

Si itaque Pondus P, per D descendens, valet ut G: etiam n P, per D descendens, valebit ut n G; Adeoque, per m D descendens, ut m n G; (ut ostensum est :) Hoc est; in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compositā, (per 2 cap. 1.) Quod erat probandum.

Quæ quidem rationes si sint Reciproca; quæ ex his componitur, Equalitas est, &c. per 4, 6, cap. 1.

Similiter de Ascensu judicandum.

Et, in aliā quāvis Vi Motrice, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

Posset quidem hæc, & subsequens Propositionum aliquot, in plures distrahi, & similiter demonstrari, atque in capite præcedente factum est, in Prop. 13, 14, 15, 16. item, 17, 18, 19, 20. item 22, 23, 24, 25. Quum autem illud semel iterumque, perspicuitatis gratiā, factum fuerit; malebam tum hic tum in sequentibus succinctius agere, ne videam vel nauseam creare, vel propositionum numerum præter necessitatem in immensum augere velle. Ob quam rationem etiam Corollaria Propositioni principali toties subnectere visum est.

Ex hac autem Propositione (quæ Descensuum Ascensuumque Magnitudines, ex Graviū Pondere simul & Motuum Altitudine, æstimat,) potissimum dependet, de Machinarum quarumvis Potentiā, judicium.

PROP. VI.

Conjunctis invicem Descensu & Ascensu; Si præpollet Descensus, pro Descensu simpliciter habendi sunt: Pro Ascensu verò, si Ascensus præpollet: (Et quidem utrobique tanto, quanta est Præpollentia:) Sin æquipollent, pro Neutro.

Si verò vel plures Ascensus conjuncti sint, vel plures Descensus: tantundem simul pollent atque eorundem summa.

Idemque motis ab aliā Vi Motrice, mutatis mutandis, accommodabitur.

Patet ex Prop. 8. cap. 1.

PROP.

PROP. VII.

Comparata Gravia, ceteris paribus, eâ ratione Ponderant (Descensum moliendo, averſando Ascensum,) quâ pol-
lent eorum si moveantur Descensus Ascensûve; sive,
quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componi-
tur.

Idémque aliis motibus, mutatis mutandis, accommoda-
bitur.

Puta, Tantundem ponderant Unum Pondo per Duo Spacia, atque
Duo Pondo per Unum Spacium, fursum deorsumve (eodem tem-
pore) ferenda. (Quippe utrobique Duplum Unius Pondo per Unum
Spacium.) Adeoque Duo Pondo per Duo spacia, quadruplum ponde-
rabunt, Unius Pondo per Unum Spacium eodem tempore ferendi. Et
in reliquis proportionibus similiter.

Cum enim eâ ratione plus ponderant Gravia, ceteris paribus, quâ
sunt majoris Ponderis, (per 1 hujus;) quâque plus Descenditur, (per
4 hujus;) Eâ ratione ponderabunt (utriusque ratione habitâ) quâ pol-
lent eorum (secundum utramque considerationem) Descensus Ascen-
sûve: Hoc est, (per 5 hujus,) eâ quæ ex Ponderum & Altitudinum
rationibus componitur. Quod erat demonstrandum.

Exempli gratiâ: Si duo Gravia (seu Vires Motrices) V, P, sint, vel
Pondere æqualia & (pro situ quo ponuntur) æqualiter (dum moventur)
aut Descensura aut Ascensura, vel, quod Gravius est, in eâdem ratione
(eodem tempore) nîus sit Descensum; Æquiponderabunt: (propter
Descensus Ascensûve æquipollentes, per 5 hujus.) Sin alterius præ-
polleat, quæ ex Pondere & Altitudine oritur, Descensus magnitudo:
præponderabit illud; atque in eâdem ratione cum illâ præpollentiâ.
Putâ, Descensus Ponderis 2P per Altitudinem 3D, cum Descensu Pon-
deris 3P per Altitudinem 2D comparatus; Æquipollebit, propter
 $2 \times 3 = 3 \times 2$; adeoque quæ sic movenda sunt, Æquiponderabunt.
At, Descensus Ponderis 2P per Altitudinem 4D, Descensui Ponderis
3P per Altitudinem 2D, præpollebit, (propter $2 \times 4 > 3 \times 2$;) Adeoque, quod sic movendum erit, præponderabit. Et in aliis similiter.

Fig.
37, 38,
39, 40.

P R O P.

PROP. VIII.

Fig. 36. Si (cæteris paribus) ad duos (plurésve) motus æqualiter propendeat Grave (vel ex pluribus conjunctis Gravibus Aggregatum,) neque ad alium ullum magis propendeat: Nullo feretur.

Sin ad unum aliquem, præ cæteris, maximè propendeat: illo (nisi aliàs impeditum) feretur.

Idem intellige, mutatis mutandis, de quâcunque Vi Motrice.

Putà: Si ad A, B, æqualiter propendeat Grave G: neutrà feretur. Nam (per 12 Cap. 1.) propensiones contrariæ (siquidem utrinque simul ferri non possit) cum sint Æquales, se mutuo perimunt. (Et similiter si ad plures adhuc motus æqualiter propenderet.) Sed nec alio feretur motu (siquis sit) cui minus propendeat; putà ad C. Nam (per eandem) huic præpolleret utravis duarum ad A, B, Propensio; & grave præriperet. Adeoque, si ad nullum magis propendeat, nullo feretur. Quod erat primò probandum.

Sin ad unum aliquem motum, putà ad D, quàm ad cæterorum ullum, magis propendeat: singulis hæc præpollebit; Adeoque (nisi aliàs impeditum) hæc feretur Grave: (per eandem 12 Cap. 1.) Quod itidem probandum erat.

SCHOLIUM.

AT interim, nequis metuat, imperfectam esse hanc Demonstrationem, eo quod, utut conatus seu Propensio ad D uni cuivis ex reliquis præpolleat, non inde tamen sequatur, quod præpolleret, itaque & simul omnibus, cum tamen omnes huic advenfentur: Monendum hic erit; non cum simul omnibus reliquorum comparandum esse conatum hunc ad D, sed cum singulis sigillatim; eo quod non simul omnibus illis ferri possit, sed nec pluribus simul, sed uno saltem ex omnibus: Adeoque, conatus ad D, si sigillatim singulis præpolleat, omnibus præripiet grave.

Sécus

PROP. IX. *Et Motuum Declivitate.* 41

Secus autem omnino est, ubi plures consentientes conatus, uni alicui adversantur. Puta, si plura Minora gravia, uni alicui (singulis quidem, sed non omnibus) Majori, in opposita Libræ lance, contra-ponderarent. Quamquam enim Majus illud in unâ lance, reliquorum singulis in alterâ, præpolleat; Minora tamen hæc simul sumpta, Libram in suas partes trahent; Quia, cum simul omnes illi conatus minores in eundem motum conspirant, pro Conjunctis habendi sunt conatibus, non Disparatis. Contrâ quam hic obtinet.

Quòdque hic monemus, alibi (liqui similes occurrunt casus) intelligendum erit.

P R O P. IX.

Gravis in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, utcunque moti, nullus est vel Descensus vel Ascensus.

Idem dicendum est, de Plano Horizontali; dummodo, propter Parvitatem plani & immensam à Centro distantiam, quasi cum illâ Sphæricâ superficie coincidens habeatur.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi motrice.

$$CB = CD.$$

$$CB - CD = 0.$$

Fig. 30.

Putâ; Si à B ad D, in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, moveatur grave: (vel etiam in Horizontali Plano, quousque hoc cum illâ coincidens habeatur;) Nihilo fit vel Propius vel Remotius à Centro Terræ; (propter æquales CB, CD, Sphæræ radios:)

Adeoque (per 3 hujus) non vel Descendit quicquam vel Ascendit sic latum Grave. Quod erat propositum.

Idem in motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, similiter ostenditur. Nempe nihil vel profecisse, vel contrâ, Vim illam; dummodo secundum Vis Motricis Directionem nihil vel processerit vel recesserit, utcunque aliàs moveatur.

G

PROP.

PROP. X.

Gravis per rectam Horizonti perpendicularem Descendentis, Descensus tantus est quanta est ea recta per quam fertur. Et similiter Ascendentis Ascensus. Adeoque Obliquè vel Descendentis vel Ascendentis; tantus quanta est perpendicularis æquè alta. Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

Fig. 30.

$$ABC - BC = AB = ABC - DC.$$

$$DC - EC = BEC - EC = BE.$$

PVtâ: Si in ABE rectâ, quæ ad Horizontalem rectam HB perpendicularis sit, (adeoque ad C centrum Terræ rectâ tendit, per 19 Elemen. 3.) feratur Mobile, ab A vel E, ad B: Manifestum est, tantò vel propius vel remotius à Centro fieri, quanta est ipsa AB, vel EB, recta quâ fertur, (per 3 Elemen. 1.) Adeoque (per 3 hujus) tantundem vel Descendere vel Ascendere. Quod erat propositum.

Adeoque; Si utcunque Obliquè, ab A vel E, feratur ad D punctum, quod tantundem atque ipsum B à Centro distet: tantundem utrobique vel Descendisse vel Ascendisse censendum erit; per 3 hujus: Hoc est (per modò demonstrata) quanta est AB, vel EB, perpendicularis æquè alta. Quod item probandum erat.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi, similiter ostendetur.

PROP. XI.

Gravis, per rectam utcunque declivem descendantis, Descensuum Altitudines sunt emensis Longitudinibus proportionales. Atque Ascensuum similiter.

(Intellige; Dummodo planum Horizontale, cum superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, coincidens habeatur. Et similiter in sequentibus aliquot, quæ hinc dependent.)

Idem de aliâ Vi, mutatis mutandis, intelligendum.

F.O.

FO. FL :: FP. FD.

Si PO, Horizontalis recta; FP, ad Horizontem perpendicularis; Fig. 41.
 FO, inclinata recta, per quam vel Descendit vel Ascendit Grave;
 Et, rectæ PO, parallela DL, (trianguli crura secans proportionaliter,
 per 2 Elem. 6.) Ergo: ut FO, ad FL, Longitudo ad Longitudinem;
 sic FP, ad FD: Hoc est, (per 3 & 10 hujus,) Descensus ad Descen-
 sum (si Deorsum,) vel (si sursum moveatur) Ascensus ad Ascensum.
 Quod erat propositum.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi quâvis, similiter osten-
 detur.

S C H O L I U M.

Supponit hæc Demonstratio: Horizontalis rectæ PO, puncta omnia,
 ut P, O, æquæ-alta: adeoque P O rectam, quali in superficie Sphæ-
 ricâ, Terræ concentricâ, jacere. Sin *axiis* loquamur, pro rectis
 PO, DL, substituendi sunt arcus circulares, Terræ concentrici; (&
 quidem pro singulis in FO punctis, mutabitur Perpendiculari positio,
 & inclinatio declivis rectæ:) Sed tantillum à Rectis differunt Arcus
 illi, ut pro Rectis tutò usurpari soleant, ob causas ad Def. 15. Cap. 1.
 memoratas.

P R O P. XII.

Rectis, sive ad Horizontem perpendicularibus, sive utcun-
 que inclinatis; Si per Æquales Longitudines feratur
 Grave: Descensuum Ascensuumve Altitudines, sunt
 Longitudinibus portionum æquæ-altarum reciproce pro-
 portionales.

Si, per Inæquales Longitudines ferantur: Descensuum Af-
 censuumve Altitudines, sunt in eâ ratione quæ compo-
 nitur ex ratione Longitudinum per quas fit motus, & re-
 ciprocâ Longitudinum portionum æque-altarum.

Adeoque; Si emensæ Longitudines, sint Longitudinibus
 æquæ-altis proportionales: Descensus Ascensusve sunt
 æquales.

Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motricæ.

G 2

FO.

$$FO. FP :: FL = FP. FD :: FK. FM.$$

Fig. 41.

$$m L. L :: M = D. \frac{1}{m} D :: n M. \frac{n}{m} D.$$

Sit FP, ad Horizontem recta; FO, inclinata: per FP, descendat P Grave: in FO, grave L; per Longitudinem FL, rectæ FP æqualem. Jungatur PO Horizontalis recta, (abscindens portiones FP, FO, æquæ-altas:) & huic parallela, LD. Descensus itaque gravis P, tantus est quanta recta FP; gravis L, quanta est recta FD; (per 10 hujus.) Estque (per 2 Elem. 6.) ut FO (longitudo portio obliquæ,) ad FL, vel huic æqualem FP, (longitudinem perpendiculi æquæ-alti:) Sic, vice versa, FP (altitudo Descensus, in perpendiculo descendens, P,) ad FD (altitudinem descensus, obliquæ descendens L, per longitudinem æqualem.) Idemque de Ascendentium per easdem LF, PF, Ascensibus, similiter ostendetur. Quod erat probandum.

Adeoque; Si per Inæquales Longitudines ferantur; (puta, per FP; & FK = $\frac{1}{2}$ FP;) erunt Descensus Ascensive, in ratione quæ ex illâ, & longitudinum per quas feruntur, compositâ; (nempe FM = $\frac{1}{2}$ FD,) per præced. Quod porro probandum erat.

Ideoque; (per 6 Cap. 1.) Si rationes illæ, (nempe, reciproca portionum æquæ-altarum, & directæ longitudinum emensarum,) sint invicem reciprocæ; Hoc est, si longitudines emensæ, sint longitudinibus æquæ-altis proportionales; (Putâ, FL, FD, longitudines emensæ, ipsi FO, FP, longitudinibus æquæ-altis, proportionales:) Descensus Ascensive Altitudines, æquales erunt. Quod erat ultimò probandum.

Idem viribus aliis motricibus facillè accommodabitur.

PROP. XIII.

Gravium, per rectas utcumque ad Horizontem inclinatæ, Descensus, in eâ ratione pollent, quæ componitur ex rationibus & ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æquæ-altarum. Atque Ascensus similiter.

Idemque motis ab aliâ Vi motrice facillè accommodabitur.
Valent

Valent enim (per 5 hujus) in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus composita: Hoc est, (per præcedentem,) ex rationibus Ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

PROP. XIV.

Rectarum Declivitas Longitudine æqualium, est Altitudinibus proportionalis.

Rectarum Declivitas æque-altarum, est Longitudinibus Reciproce proportionalis.

Adeoque; Rectarum quarumvis Declivitas, est in ea ratione, quæ ex ratione Altitudinum & Reciproca Longitudinum componitur.

Atque; Si Rectarum Longitudines sint Altitudinibus proportionales; earum Declivitas æqualis est.

Quod & aliis perinde ac gravium motibus accommodabitur.

$$\frac{A}{L}, D. \frac{A}{L}, \frac{A}{L}, \frac{2}{1} D. \frac{A}{L}, \frac{1}{2} D. \frac{A}{L}, \frac{A}{L}, \frac{3}{2} D. \frac{A}{L}, \frac{A}{L}, \frac{2}{2} D = D.$$

$$\frac{A}{L} \cdot D :: \frac{mA}{L} \cdot mD :: \frac{A}{nL} \cdot \frac{1}{n} D :: \frac{mA}{nL} \cdot \frac{m}{n} D :: \frac{mA}{mL} \cdot \frac{m}{m} D = D. \quad \text{Fig. 42.}$$

A Puncto F, ducantur æquales rectæ quotlibet FP, FO, FB, quæ continuatæ occurrant Horizontali Rectæ (vel Plano saltem) in punctis P, S, T.

Rectarum FP, FO, FB, longitudine æqualium, Declivitates, sunt earum Altitudinibus, puta, FP, FQ, FR, proportionales. per Def. 17, 18. Cap. 1.

Rectarum FP, FOS, FBVT, æque-altarum, Declivitates, sunt earum Longitudinibus, hoc est, ipsis FP, FS, FT, Reciproce proportionales. per easdem Def. 17, 18. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

(Quas

(Quas quidem rationes easdem esse; adeoque geminam quæ habetur Def. 18. Cap. 1. *Majoris Declivitatis* definitionem tantundem valere, (& *Minoris* similiter;) hinc constat: Quoniam; Sive sumantur rectarum FP , FO , portiones longitudine æquales FP , FO , quarum Altitudines sint FP , FQ ; Sive portiones æque-altæ FP , FS , quarum longitudines reciprocæ sunt FS , FP , hoc est FS , FO ; Eadem utrobique provenit Declivitatum ratio: Nam, ut FP , ad FQ ; sic est FS ad FO : per 2 Elem. 6. Similiter, in rectis FP , FBT ; portionum æqualium FP , FB , altitudines FP , FR ; & portionum æque-altarum FP , FT , longitudines reciprocæ FT , FP , hoc est FT , FB ; proportionales sunt: per 2 Elem. 6. Item; rectarum FO , FBV , portionum æqualium FO , FB , altitudines FQ , FR ; & portionum æque-altarum FO , FV , longitudines reciprocæ FV , FO , hoc est FV , FB ; proportionales sunt: per 2 Elem. 6.)

Ideoque; rectarum, puta FP , FV , Declivitates, sunt in ratione FP ad FR ; nempe in ratione quæ componitur, ex Altitudinum ratione, puta FP ad FQ ; atque FQ ad FR , sive FV ad FB , hoc est FV ad FP , reciproca Longitudinum. Quod itidem demonstrandum erat.

Adeoque (per 6. Cap. 1.) Si rationes illæ (directa altitudinum, & reciproca Longitudinum) sint invicem reciprocæ; hoc est, si Altitudines sint Longitudinibus directe proportionales; Declivitates sunt æquales. Quod erat ultimò demonstrandum.

S C H O L I U M.

NOrandum hic; Dummodo Terræ Centrum intelligatur tamquam infinite distans; eadem est ubique ejusdem rectæ, puta FBT , Declivitas; propter parallelam Perpendicularum positionem: Si vero intelligatur ut in certâ distantia finitâ; varia est in singulis punctis Declivitas: Quippe cum Perpendiculara omnia in Centro coeant; quamquam eadem sit directio Motûs, Motricis tamen vis directio subinde mutatur: adeoque alia erit illius ad hanc Positio, aliûsque ad perpendiculum Angulus, puta in B quàm in F puncto: Quæque ex præsentî Figurâ & demonstratione colligitur Declivitas, soli F puncto convenit; aliæque pro aliis, ut B , V , T , punctis, similiter colligenda erit; de-
missis inde ad Terræ Centrum Perpendicularis.

P R O P.

PROP. XV.

Lineæ curvæ Declivitas, in singulis respectivè punctis; eadem est atque rectæ ibidem contingentis. Et superficiëi curvæ; eadem atque ibidem contingentis Plani. Quod aliis perinde atque Gravium motibus accommodabitur.

Si FP, perpendiculum; FC, curva; FT, recta contingens. Cum Fig. 43. eandem curvam in variis sui partibus variè declivem esse constet, (declivorem alibi, alibi minùs declivem:) Eandem dico, in F puncto, declivitatem FC curvæ, atque contingentis rectæ FT, censendam esse. Cum enim CFT angulus contactus (sive Circulorum, per 16 Elem. 3. sive Conicarum sectionum, per 32 Lib. 1. Apollonii; sive, quod similiter ostendetur, curvarum quarumvis;) sit vel nullius magnitudinis, (quod nos, peculiari Tractatu, *De Angulo Contactus*, multis ostendimus;) vel saltem, infinitè exigua, (utpote qui sit vel minimo possibili rectilineo minor, quod apud omnes in confesso est:) eadem erit, in puncto F, Directio, sive FC curvæ, sive FT contingentis rectæ; (saltem, differentia quavis assignabili minor erit:) Adeoque, & eadem utriusque in illo puncto Declivitas. Quod erat propositum. Idemque de superficiëi curvæ punctis singulis, similiter ostendetur.

PROP. XVI.

Si ad duos motus ita sit comparatum Grave, cæteris paribus; ut, altero si feratur, Descensurum sit; Ascensurum, si altero: Eà præponderat, quâ Descensurum est. Si, altero latum, plus Descendet; altero, minùs: Eà præponderat, quâ plus descendet. Si, altero, plus Ascendet; altero, minùs: eà minùs Repugnat, quâ minùs Ascendet.

Sim.

Sin æqualiter, utrovis feratur, vel Descendet, vel Ascendet: Æquiponderat utrinque.

Contrà verò: Quà, cæteris paribus, præponderat, vel minus Repugnat; Eà vel plus Descensurum est, vel Ascensurum minus: Sin neutrà; Æqualis utrinque futurus est vel Descensus vel Ascensus.

Fig. 31.

PUtà; Si in puncto G sit constitutum Grave; vel per G A, vel per G B ferendum: sitque G A, cæteris paribus, vel magis deorsum, vel minus sursum, quam G B: Per illam potius quam per hanc feretur. Sin æqualiter; neutra propendet magis. Et contra. Sequitur ex 4 hujus.

P R O P. XVII.

Eà præponderat Grave, cæteris paribus, & in eà ratione, quâ motus est Declivior: Quâque est Acclivior, magis repugnat.

Adeoque, omnium maximè in perpendiculo.

(Quare & Ponderis simpliciter tanta Vis censeri solet, quantum in Perpendiculo habet.)

Quâque æqualiter vel Declivis est vel Acclivis, æqualiter vel propendet vel Repugnat.

Sintque hæc perinde vel Gravium motibus, vel aliis, accommodanda.

Fig. 42.

PUtà; In rectis FP, FOS, FBT; eà ratione ponderat Grave, quâ sunt Declives illæ rectæ. Est enim Declivitas in Reciproca ratione Longitudinum æque-altarum; sive, quod eodem recidit, in Directâ Altitudinum æque-longarum; (per 14 hujus.) Hoc est, in ratione Descensuum (Ascensuumve) cæteris paribus; (per 10, 12, hujus:) Adeoque, in ea ratione ponderant; per 4 hujus. Quod erat propositum.

Quare &, in perpendiculo, omnium maximè: ut quæ ex æque-altis Brevissima est; & ex æque-longis Altissima.

Et

PROP. XVIII. *Et Motuum Declivitate.* 49

Et propterea (quod Definitionis instar esto) tantam Ponderis cuiusvis Vim censemus, quantam in Perpendiculo habet.

Quodque de FT rectâ ostensum est; idem de curvâ FC puncto F , intelligendum est. Utpote cuius Declivitas, adeoque Tendentia deor. Fig. 43. sum, eadem est atque Contingentis rectâ FT : (per 15 hujus:) Adeoque & gravitatio; per 4 hujus.

SCHOLIUM.

Monendum tamen est: In rectarum, ut FT , punctis singulis, Meandem intelligendam esse gravis Ponderationem, dummodo intelligatur Centrum Terræ tamquam infinitè distans; adeoque, propter Perpendicularorum quasi parallelismum, eandem ubique Declivitatem. Si tamen (quod ad Prop. 14 monuimus) Centrum intelligatur in certâ distantia finitâ; mutabitur, in singulis punctis, rectâ Declivitas; adeoque & Gravis, in eo puncto, ponderatio. Quo casu; quod de Curvâ modò dictum est, idem de rectâ pariter dicendum; Nempe eam esse Gravis, in rectâ FT puncto F , Ponderationem, quæ ex rectarum FT , FP , reciproca ratione colligitur: Atque in aliis punctis similiter judicandum. Quippe, ut in curvis, sic Rectis, pro mutata in singulis punctis Declivitate, mutabitur & Ponderatio.

Verùm cum Centrum soleat, tanquam infinitè distans, reputari; & Perpendiculara parallela: tutò solent (quoad sensum) & Rectæ in singulis sui punctis pariter Declives æstimari. Quamquam (quod & subinde antea monuimus,) si tantæ longitudinis Rectæ, Planæve tantæ amplitudinis, consideranda veniant; ut notabile hinc discrimen emergat; etiam hujus mutæ Declivitatis, adeoque & Ponderationis, habenda erit ratio.

PROP. XVIII.

Si Grave, ubivis in eodem Perpendiculo, vel Incumbat, vel Dependeat, vel in ipso sustentationis puncto intelligatur, (vel cum ipso ita utcumque connexum, ut vel simul quiescant, vel simul æqualiter moveantur contrariæ vires; altera secundum, altera contra directionem suam:) Quò sustineatur, requiritur, æqualis Ponderi, vis Impediens; atque hæc sufficit.

Idemque intellige, mutatis mutandis; de quacunque Vi motrice.

H

Intelligatur

Fig. 44. **I**ntelligatur Pondus (seu Vis quælibet Motrix) in P; atque ibidem vis Impeditiva motus V. Si Vis Ponderis (seu Motiva) Major sit; prapollebit: adeoque descendet (sive secundum Directionem suam feretur,) non sustinebitur. Si Æqualis, æquipollebit: adeoque sustinebitur Pondus. (per 11. Cap. 1.) Unde constat propositum. (Si Vis Impediens sit major; eò fortius impediet: Non requiritur tamen; quia æqualis sufficit.)

Idem ostendetur; Si ubivis in eodem perpendicularo (sive Directionis Lineâ) constituatur P; dummodo quantum Descendit (sive secundum directionem suam movetur) P, tantum deprimatur (seu contra directionem suam revellatur) contraria Vis V. Nam (per 5 hujus) æqualium virium æquales progressus æquipollent: Adeoque, cum sint contrariæ, (putâ, secundum directionem suam altera, altera contra suam,) propter Impedimentum Momento æquipollens, non fit motus; (nedum si Impedimentum majus sit:) Fit autem; si minus valet impedimentum, per 11 Cap. 1.

Fig. 45. Idem ostendetur; Si utcumque cum Pondere, seu Vi Motrice, ita connectatur Vis Impediens, ut contrarii motus (alter secundum, alter contra Virium Directionem,) sint æquales. Putâ; Si intelligatur P Pondus, ex funiculo P F (brevis an longo perinde est) liberè dependens, qui orbiculo circumpositus ex adversa parte pertingat ad V; ibique æquale Pondus seu Vis æqualis applicetur; ita quidem ut, descendente P pondere, tantundem ascenderet, vel contra directionem suam revelleretur, pondus seu Vis V; (sive contrâ; ascendente P, tantundem descenderet V, &c.) Nam (per 5 hujus) æqualium Virium, æquales progressus, æquipollent: Adeoque, contrariæ cum sint, non fiet motus; fiet autem, si Vis Impediens minor sit. Per 11 Cap. 1.

SCHOLIUM.

Hinc sequitur; Gravia ex filo longiori an breviori dependentia, tantundem ponderare: Item, propius an remotius distent quæ incumbunt pondera, aut dependent; dummodo in eodem perpendicularo.

Hinc etiam sequitur; In construendis Machinis; Veſtes, Juga, Fulera, Funes, cæteraque Machinarum armamenta, tantæ firmitudinis intelligenda esse singula, ut oneri quod respectivè sustinent sint ferendo paria. Alioqui citius rumpetur Machina, vel incurvabitur, quàm perficietur expectatus motus.

PROP.

PROP. XIX.

Gravia, cæteris paribus, in ea ratione gravitant, quæ componitur ex rationibus Ponderum & Declivitatum; (five Ponderum & Altitudinum rectarum longitudine æqualium; vel Ponderum & reciproca Longitudinum rectarum æque-altarum.)

Adeoque; Si Pondera sint Æqualia; in ratione Declivitatum: Si Declivitates sint Æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint Declivitibus reciproce proportionalia, (five proportionalia Longitudinibus æque-altis;) æqualiter gravitant.

Idemque aliis Viribus Motricibus accommodabitur.

$$\begin{array}{ccccc} P. & G. & :: & nP. & nG. :: P. & mG. :: nP. & mnG. :: nP. & G. \\ D. & & & D. & mD. & mD. & \frac{1}{n}D. \\ PD. & & & nPD. & mPD. & mnPD. & PD. \end{array}$$

Puta: Si Ponderus P, in Declivitate D, gravitet ut G: Ponderus nP, in eadem declivitate, gravitabit ut nG, (per 1 hujus:) Adeoque in Declivitate mD, gravitabit ut mnG, (per 17 hujus:) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Declivitatum rationibus composita, (per 2 Cap. 1.) Hoc est, (per 14 hujus,) ex Ponderum & Altitudinum rectarum Longitudine æqualium, vel ex Ponderum & reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

Corollaria constant, ex 4 & 6 Cap. 1.

Alia Demonstratio.

Idem sic aliàs demonstrabitur. In FP ad Horizontem rectâ; sit Ponderus D; & huic æquale L, in inclinata FO æque-altâ. Et connecti intelligantur Pondera D, L, filo flexili DFL, punctum F immobile ambiente: ut moto D, versus P, tantundem moveatur L versus F; & contrâ. Erit, ut FP ad FO; puta ut m ad 1; sic vice versâ, Descensus Ascensûve ponderis L in hac, ad Descensum Ascensûmve ponderis æqualis D in illa; (per 12 hujus:) adeoque & (quæ huic proportionalis est, per 5 & 17 hujus,) Gravitatio Ponderis in L, ad æqualis ponderis D gravitationem. Hoc est, si D gravitat ut G; æquale pondus L, gravitabit ut mG; hoc est, in reciproca Longitudinum æque-altarum; five in Declivitatum ratione.

H 2

Adeoque

Adeoque; Si Inæqualia sint L, D , pondera; Puta $L = nD$; gravitabit illud L , ut $m \propto G$: (per 1 hujus:) Hoc est, in ratione quæ ex Ponderum & Declivitatum rationibus componitur; sive ex ratione Ponderum & reciproca Longitudinum æque-altarum.

Quapropter; Si Pondera sint Declivitatis reciproce proportionalia, sive Proportionalia Longitudinibus æque-altis; æquè gravitant, per 6 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

PROP. XX.

Si, circa Punctum quodvis (extra Terræ Centrum) in Horizontali rectâ, ut Centrum, Recta linea, manente uno extremo, altero describat Circuli peripheriam, in plano ad Horizontem sive recto, sive utcumque inclinato: Altissimum peripheriæ punctum, illud est, quod supra Horizontalem rectam est in rectâ ad illam perpendiculari; Humillimum, illud quod est in eadem perpendiculari infra Horizontalem rectam: Punctorum verò in peripheriâ intermediorum; illud Altius est, quod est supremo propius; Inferius, illud quod est propius infimo, seu à supremo remotius: Quæ autem æqualiter utrinque vel à summo vel ab imo distant; sunt æque-alta. Idem, mutatis mutandis, aliis motibus accommodabitur.

Fig. 46. Circa Punctum F (quod Terræ Centrum non sit) in Horizontali rectâ AB , (cui ad rectos angulos insistit SFP recta,) conversa recta FA intelligatur peripheriam $ASBP$ describere, in plano ad Horizontem vel recto vel utcumque inclinato. Erit, inquam, peripheriæ punctum Altissimum, S ; Infimum, P ; Intermediorum verò, ut G, H , quod propius ab S distat, ut G , Superius; quod propius à P , ut H , inferius; Quæque æqualiter vel ab S , vel à P distant; puta G, G ; vel H, H ; æque-alta.

Sit primum $ASBP$ peripheria, in plano ad Horizontem recto: Adeoque Centrum Terræ in eodem plano, (per 19 Elem. 3.) putâ, in C , extra Circulum. Ductis, ab assignatis punctis, lineis rectis, in C Terræ Centro coeuntibus: constabit propositum; per 8. Elem. 3.

Sin

PROP. XX. *Et Motuum Declivitate.*

53

Sin tantæ magnitudinis intelligatur Circulus A S B P, ut ad ipsum Terræ Centrum, vel ultra, pertingat; sitque C, verbigratiâ, vel intra Circulum, vel in ipsa peripheria. Constat propositum, per 7 Elem. 3.

Sit deinde, Circuli planum A S B C non ad Horizontem rectum, sed utcumque inclinatum: Adeoque nec Centrum Terræ in eodem Circuli plano, puta in C; sed extra planum, ut in K: Unde, ad obliquum Circuli planum, duci intelligatur K C perpendicularis, (punctum C, omnium in obliquo Circuli plano punctorum, proximum ad Terræ Centrum, adeoque omnium infimum designans.) Et jungantur tum S C, G C, H C, P C; tum S K, G K, H K, P K. Ostendetur, ut prius, (sive contingat C intra vel extra Circulum,) omnium ad C ductarum, longissimam esse S C, brevissimam, P C; item G C, longiorem quam H C; æquales autem tum G C, G C; tum H C, H C. Adeoque, sumptis quadratis; Quadratum S C, maximum; P C, minimum; G C, majus quàm H C; Quadrata G C, G C, item H C, H C, invicem æqualia. Ideoque, addito communi augmento, quadrato C K; erunt quadratorum S C, C K, aggregatum, hoc est (per 47 Elem. 1.) quadratum S K, omnium maximum; quadratorum P C, C K, hoc est quadratum P K, minimum; quadratorum G C, C K, hoc est quadratum G K, majus quàm quadratorum H C, C K, hoc est quadratum H K; quadratorum G C, C K, & G C, C K, hoc est quadrata G K, G K, invicem æqualia; & similiter, quadratorum H C, C K, & H C, C K, hoc est quadrata H K, H K, invicem æqualia. Ergo &, sumptis lateribus; Recta S K, omnium ad K ductarum, maxima; P K, minima; G K, longior quàm H K; & G K, G K, item H K, H K, invicem æquales. Adeoque, punctum S, omnium à Terræ Centro Altissimum; P, Infimum; G, altius quam H; & C, C, vel H, H, æquè alta. Quod erat propositum.

Alia Demonstratio.

Idem ostenderetur, Si intelligatur Centrum Terræ tanquam infinite Fig. 47. distans. Nam, ductis à punctis S, P, G, H, ad subjectam rectam Horizontalem quamvis perpendicularibus: Si planum Circuli sit, ad Horizontem Rectum; constabit propositum, ex Prop. 15. Elem. 3.

Si verò planum Circuli ad Horizontem sit Obliquum. Intelligantur ab assignatis punctis S, P, G, H, demitti ad planum Horizontale quodvis subjectum perpendiculares S σ , P π , G γ , H η ; & ab iisdem punctis, ad communem planorum Horizontalis & Inclinati Sectionem, totidem ad angulos rectos, S s, P p, G g, H h: (& compleantur Triangula.) Ostendetur

Ostendetur, (ex 10 Elem. 11.) has illis (propter similia triacula $S\sigma s$, $P\pi p$, $G\gamma g$, $H\eta h$.) proportionales esse. Adeoque; quæ à communi Sectione $g s p h$ longius distant puncta in obliquo plano posita, eadem ab illo Horizontali plano longius distabunt, eruntque (secundum perpendiculum) altiora. Ostenso igitur ut prius (ex 15 Elem. 3.) à communi sectione $g s p h$ (quæ ipsa est Horizontalis recta;) ostendetur etiam, ab ipso subjecto plano Horizontali $g s h \gamma \sigma$; punctum S , maxime; P , minime; G, G , & H, H , æqualiter; & G , magis quam H , distare. Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

Quoniam (ut supra monitum est aliquoties) consideratur Terræ Centrum nunc quasi infinitè distans, nunc autem tanquam in distantia finita; adeoque perpendiculara, nunc ut parallela, nunc ut in puncto concurrentia. Visum est propositionem hanc secundum utramque suppositionem demonstrare.

Notandum interim in propositione disertè dici, *In plano ad Horizontem vel Recto, vel utcumque Inclinato*: Quoniam in Horizontali plano, hoc est, in plano Horizonti parallelo, nullum erit peripheriæ vel Altius vel Humilius punctum, sed æque-alta omnia.

PROP. XXI.

Descendens Grave, cæteris paribus, rectâ ad Horizontem Perpendiculari feretur: Ex obliquis verò, eâ potiùs quæ minùs est obliqua.

Ascendens; contrâ.

Ponderat autem (pro variâ Ascensuum Descensuumve obliquitate) in ratione Rectorum Sinuum, Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi Obliquitatis.

Idemque aliis motibus accommodabitur.

Ostendetur enim (ex præcedente) rectarum longitudine æqualium, perpendicularem (ut FP) esse omnium altissimam; adeoque, & maximè declivem (per 14 hujus.) Hac igitur, præ cæteris feretur Descendens grave; contrâ vero, Ascendens. per 17 hujus.

Ex

PROP. XXII. *Et Motuum Declivitate.* 55

Ex obliquis verò, ut FO, FB; similiter ostenderetur (ex præced.) Fig. 42. illam quæ minus est obliqua, Puta FO, altiore esse; adeoque (per 14 hujus) & magis declivem. Ideoque (per 17 hujus) per hanc potius latum iri Descendens Grave; Ascendens, contra.

Utrobique verò ponderat Grave (Descensum promovendo, adeoque Ascensum impediendo) in ratione FP, FQ, FR, altitudinum rectarum Longitudine æqualium FP, FO, FB, (per 14 & 17 hujus:) Hoc est (quod ex Trigonometricis constat) in ratione Sinuum rectorum, angulorum Inclinationis FPS, FOQ, FBR; qui sunt angulorum Obliquitatis PFP, PFO, PFB, complementa. Quod erat propositum.

PROP. XXII.

Grave, quatenus non impeditur; per rectam Horizonti perpendicularem descendet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliis motibus.

Descendet enim, quatenus non impeditur; per 2 hujus. Et, hac præ cæteris; per præcedentem.

PROP. XXIII.

Super impenetrabili Plano Horizontali constitutum Grave, vel superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ; Gravitate suâ non movebitur.

Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis motrix. Nempe quum planum est Directioni virium ad angulos rectos.

Sit, in B, Grave, impenetrabili Plano Horizontali HBO incum- Fig. 30. bens; vel superficiei Sphæricæ, quæ sit Terræ concentrica, DDB. Manifestum est (propter æquales Sphære radios) nullum in ipsâ DDB Sphæricâ superficie punctum, (nec quod supra ipsam est, aut etiam supra planum Horizontale,) propius à Terræ Centro distare, quàm ipsum B punctum. Adeoque; si nec superficiem illam (sive Sphæricam,

cam, sive Horizontalem,) penetrare possit, (quod supponitur,) in nullas movendo partes, descendet, (per 3 hujus) Cum itaque (per Def. Gravitatis) non nisi Descensus ergo, gravitate suâ moveatur grave, nec possit (per jam demonstrata) descendere: Non movebitur, gravitate suâ, sic constitutum Grave. Quod erat Demonstrandum.

SCHOLIUM.

Idem ostenderetur de Gravi, in B, superficieî concavæ incumbenti quæ in B tangat Horizontale planum, seu cujus punctum infimum sit ipsum B. Item, de convexâ Sphæricâ cujus Centrum sit ultra Centrum Terræ, quam tamen in B continget planum Horizontale; utpote cujus punctum infimum sit ipsum B. Idem verum est de superficie minoris Sphære quam sic contingat B: non autem ob hanc causam, quia punctum illud non sit reliquis altius, (est enim,) sed propter Prop. 8 hujus: quippe non est una aliqua declivitas, reliquis omnibus major.

Per *Impenetrabile planum*, &c. illud intelligimus, quod, eâ saltem quæ adhibetur Vi, non penetrabitur; utut Vi majore penetrari possit.

Notandum est hic porro; Dummodo, ob immensam Centri Terræ distantiam, & expositi plani parvitatem, intelligatur Horizontale planum, cum superficie Sphæricâ, terræ concentricâ, coincidere; adeoque ipsius puncta singula, quasi-æqualiter à Terræ Centro distare: perinde est, sive in B, sive in H, aliôve Horizontalis plani HBO puncto, intelligatur Grave constitutum. Sin *angustior* consideretur; non erit illud, nisi unius B puncti respectu, planum Horizontale. Quare & in H constitutum grave, poterit ad B moveri gravitate suâ; utpote punctum inferius.

PROP. XXIV.

Super impenetrabili plano ad Horizontem sive recto, sive utrunque inclinato, constitutum Grave; nec aliàs impeditum; per illam Plani rectam descendet quæ est rectæ Horizontali ad angulos rectos, deorsum. Quæ quidem recta, in erecto plano, est ipsum *Perpendicularum*; in obliquo plano, *Perpendiculari succedaneum*, appello.

(Adeoque

PROP. XXIV. *Et Motuum Declivitate.* 57

(Adeoq; eadem est, Descensus Gravis in Declivi plano, ipsiusque Declivis plani, tum Declivitas, tum Obliquitas, & Inclinationo.)

Et, universaliter; in quacunque superficie Declivi, illo præ cæteris ductu feretur (siquis sit) qui est reliquis omnibus Declivior.

Idem intellige, mutatis mutandis, de motis ab aliâ quavis Vi motrice; Nempe secundum illam plani rectam feretur Mobile, (nisi aliàs impeditum,) quæ est ad angulos rectos illi rectæ quæ Lineam Directionis Virium ad angulos rectos secat.

It, in Declivis Plani puncto E, constitutum Grave; rectæque Horizontali AFB ad angulos rectos FP recta, in eodem Plano, descendit. Ostenditur (ex 10 & 14 hujus) omnium quæ in illo plano sunt (necum quæ supra planum) longitudine æqualium, ad F ductarum, Unicam FP rectam, maxime declivem esse. Adeoque (cùm, propter impenetrabile planum, ad illas infra Planum ne transeat, impediri intelligatur) per ipsam FP (per 17 & 5 hujus,) nisi aliàs impediatur, descendit Grave. Quod erat demonstrandum. Fig. 46, 47.

Idem aliis superficiebus accommodandum erit, pro re natâ; Nempe, cæteris paribus, illo semper ductu (siquis sit) latum iri Grave, qui est cæteris omnibus declivior: per 17 & 5 hujus. Sin talis nullus sit (reliquis omnibus declivior) ductus; non movebitur. per 8 hujus.

Alia Demonstratio.

Potest hoc idem demonstrari, ex Prop. 21. propter Obliquiorem Fig. 48. alibi Descensum: hoc modo.

In Declivis Plani PGOH puncto G, constitutum intelligatur Grave: Atque, in eodem plano, tum Horizontalis recta PG (nempe ea recta secundum quam Horizontale planum, per G transiens secat Declive planum,) tum huic ad angulos rectos GO: Indèque ad subiectum Planum Horizontale HOR, demissa perpendicularis GR: (Per quam itaque, nisi impediatur, descendit Grave; per 22 hujus.) Intelligatur autem, ob duritiem Declivi Plano subiectam, impediri ne penetret. Dico per GO descensum Grave.

Cùm enim duo Plana Horizontalia, adeoque Parallela, alterum in HO, alterum in PG, secet idem declive planum PGOH (per constructionem:) erunt HO, PG, parallelæ rectæ. per 16 Elem. 11.

Item, propter PG rectam, rectis GO, GR, ad angulos rectos, (per

(per constructionem,) erit ad planum OGR recta, (per 4 Elem. 11.) Adeoque & (huic parallela) HO , eidem OGR plano recta erit, (per 8 Elem. 11.) rectisque OG , OR , ad angulos rectos; per 3 Def. Elem. 11.

Et, si Centro RS in plano HOR , ducatur per O , peripheria OS , eam contingens HO , extra peripheriam jacebit; per 16 Elem. 3.

Si itaque ad rectam HO , aliud quam O , punctum quodvis T , ducatur GT recta, & RT jungatur; secabit hanc peripheriam; Puta in S . Et, juncta GS , erit (propter GR ad planum Horizontale rectam, adeoque angulos GRO , GRS , æquales rectos; & RO , RS , æquales radios, rectamque GR communem) SG recta, æqualis rectæ OG ; & angulus SGR æqualis angulo OGR ; per 4 Elem. 1.

Est autem angulus TGR , major angulo SGR (parte sui,) ergo & (huic æquali) angulo OGR major est. Adeoque Descensus obliquior est per GT , quam per GO .

Cum igitur Gravis, quam potest recta ad Centrum descendat, (per 21 hujus,) per GO potius quam GT feretur.

Atque similiter de aliis ejusdem Plani rectis ostendetur. Adeoque a fortiori, de rectis ultra planum, aut etiam curvis.

Ideoque (cum nec Planum penetrare possit) per rectam GO (nisi alias impeditum) descendet Gravis in G , (ut qui reliquis rectior est Descensus:) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Hanc Demonstrationem præcedenti subungere visum est, propter ea quæ apud Mechanicorum Scriptores de Obliquitate Descensuum occurrunt, Angulique Obliquitatis magnitudine. At prioram ego prætulerim, quæ ex Declivitate, hoc est, ex Altitudine rectarum longitudine æqualium, vel Longitudine æque altarum, dependet: tum ut simplicior, tum, præcipue, quoniam quod ex Obliquitate hac oritur Gravitationis impedimentum, Augmento longitudinis Descensuum æque altorum proportionale est; & non Obliquitatis Angulo; (quod ex jam dictis & post dicendis manifestum erit:) Adeoque illi potius, quam huic, ut veræ causæ referendum.

Hinc autem sequitur, Eandem esse Descensus Gravis in Declivi Plano, ipsiusque Declivis Plani, ad Horizontem Inclinationem; (Nam, per Def. 5 & 6, Elem. 11. Angulus GOR est Inclinationis Mensura, tum rectæ GO , tum plani PGO , ad Horizontem HOR ;) Adeoque eandem utriusque tam Obliquitatem, tam Declivitatem. Nempe idem Obliquitatis Angulus OGR ; eademque Declivitas sive rectæ GO , ad GR , ratio.

P R O P.

PROP. XXV.

Obliquitas motûs, eâ ratione minuit Gravitationem, (adeoque Descensum impedit, adjuvat Ascensum;) quâ Longior est obliqua recta, illam determinans, quàm perpendicularis æque-alta; sive Secans Anguli Obliquitatis, quàm Radius.

Idemque aliis motibus accommodabitur.

NAm (per 17 hujus) Grave, pro variâ Declivitate, gravitat in ipsâ Declivitate ratione; hoc est (per 14 hujus) in reciproca ratione rectarum æque-altarum. Puta, quâ ratione longior est FS vel FI obliqua, quàm perpendicularis æque-alta; sive (quod in Trigonometricis dicitur) FS vel FI Secans Anguli Obliquitatis PFS vel PFI, quàm Radius; Eâ minùs gravitat in FS vel FI ferendum grave, quàm in FP. Quod erat probandum.

Adeoque (per 17 Cap. 1.) in eâdem ratione minùs Descensum promovet, vel Ascensui repugnat; sive (quod eodem recidit) in eâ ratione Descensus Obliquitate impeditur, & facilitatur Ascensus. Quod itidem probandum erat.

PROP. XXVI.

Obliquatio Plani in quo fit Motus; in eâdem ratione minuit omnium in illo ferendorum Gravitationem: eâ nempe quam ipsâ Plani Obliquitas postulat. Et in aliis motibus similiter.

SIt in Obliquo Plano GOT, recta quævis GT. Atque à puncto Fig. 48. G, demittatur, ad Horizontale Planum TOR, perpendicularis GR. Atque, ad communem Planorum intersectionem TO normalis GO; (ut sit GOR Inclinatio Plani, per Def. 6. El. 11. & OGR Obliquitas.) Si igitur intelligatur GOT planum, super Horizontalem rectam OT erectum esse; erit utriusque rectæ GO, GT, communis

I 2

Altitudo

Altitudo GO : In eodem vero Plano Obliquo, Communis Altitudo est GR . Ideoque, quâ ratione GR brevior est quàm GO , (hoc est, Radius quàm Secans Anguli Obliquitatis,) Eâdem ob Plani Obliquationem minuitur Altitudo (adeoque Declivitas, & Gravitatio, per 14 & 17 hujus) sive per GO , sive per GT , ferendi Gravis. Quod erat probandum.

PROP. XXVII.

Grave, situ Declivi ferendum; sponte suâ movebitur: Situ Horizontali (sive secundum Superficiem Sphæricam Terræ concentricam;) Vi quantumvis exiguâ: Situ Acclivi; eâ Vi movebitur quæ Impedimento ex Acclivitate (cum Pondere comparatâ) orto præpollet. Idem aliis motibus accommodabitur.

Fig. 49.

Per Declivem ductum, ut FP , FS , (adeoque Descendentem, per Def. 16. Cap. 1.) sponte suâ (nisi aliâs impeditum,) feretur grave; per 2 hujus. Per Horizontale Planum, vel superficiem Sphæricam, Terræ concentricam, ut PH , (cum nullus sit vel Descensus vel Ascensus; per 9 hujus,) nec sponte suâ movebitur, (per 23 hujus;) nec tamen motui adversatur, (per 4 hujus;) adeoque Vi quantumvis exiguâ movebitur, per 11 Cap. 1. Per Acclivem ductum, ut PF , PO , (adeoque Ascendentem, per Def. 16. Cap. 1.) motui adversatur Gravitatio, (per 4 hujus,) impeditque, (per 8 vel 10 Cap. 1.) Huic tamen Impedimento Vis præpollens, movebit; per 11 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

Notandum verò, tum hic, tum toto hoc Capite, (aut etiam alibi,) ubi variam planorum motuumve, sive Declivitatem, sive Acclivitatem; quodque hinc oritur motus vel Adjumentum vel Impedimentum; consideramus: Nullam omnino habitam esse rationem vel Resistentiæ mediæ, vel Asperitatis aut scabritiæ planorum aut superficierum super quibus movetur, & siquæ sunt ejusmodi Impedimenta alia: Sed solius, quod ex Obliquitate Descensuum Ascensuumve oritur, Impedimenti vel Adju.

PROP. XXVIII. Et Motuum Declivitate. 61

Adjumenti: tanquam si in medio vacuo peragendus esse motus, nullâque aliunde remora adveniret. Quippe illa omnia sunt huic considerationi planè extrinseca; & seorsum, si opus est, perpendenda. Quamquam igitur, verbi gratiâ, super Horizontali Plano, aut etiam aliquantum Declivi, nonnisi magnâ Boum aut Equorum Vi trahatur Plaustrum: Non tamen illud ex plani Positione oriri censendum est; sed ex aliis insuper superandis motus impedimentis, quorum hic rationem non habemus.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi, movere; pro variâ motuum Acclivitate.

Idem intellige, de quâvis aliâ Vi Impediente, per aliam quam Directionis suæ lineam revellendâ.

V. G:: nV . nG .

Sint PH, FG, rectæ Horizontales; FP, GH, perpendiculares. Fig 50.
Atque intelligatur elevandum Pondus, in P: & huic affixum Filum flexile, seu Funiculus, PFGV; puncta fixa F, G, ambiens: & in V, Vis Motrix applicata. Adeo ut, quantum trahatur funiculi extremum, secundum Vis applicatæ directionem GV; tantundem elevetur, contra directionem suam, pondus P, in PF perpendiculari. Atque intelligatur Vis V, Vi ponderis P æqualis. Æquipollebit igitur, (per 7 hujus;) Adeoque sustinebit; &, si vel augeatur, vel Ponderis Vis minuat, (rectâ PF vel tantillum reclinatâ, puta in situm PO, per 25 hujus;) movebit. per 9, 11. Cap. 1.

Requiratur autem, ut idem vel Æquale Pondus, Vi minore moveatur, (Nam de Æquali, vel Majore, jam constat:) Puta Vi nV ; quæ nempe sit ad V, in ratione datâ n ad 1.

Dico; Si aptetur angulo PFG, recta PO, quæ sit ad PF, ut 1 ad n , (nempe, in reciproca ratione virium,) & movendum Pondus, super Acclive Planum, in PO rectâ; per POGV Filum flexile trahatur: Vis data nV , ponderi P, in hoc situ Æquipollebit; &, si tantillum adhuc augeatur Obliquitas, movebit.

Nam, propter PO ad PF, in ratione 1 ad n : Si P in PF Gravitet ut G, idem in PO gravitabit ut nG , (per 14 & 17 hujus;) Ideoque, cum illi æquipolleat Vis V, huic æquipollebit Vis nV , (per 17 Cap. 1.) Adeoque (per 25 hujus) si fiat PO adhuc vel tantillum longior, Vis præpollebit, adeoque movebit; per 9, 11, Cap. 1.

PROP.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, per Datam Acclivitatem movere.
Idem intellige, de quavis aliâ Vi impediēte.

$$V. G :: m V. n G.$$

Fig. 50. **R**eliquis, ut prius, constructis : Intelligatur Vis V , æquipollens Ponderi P , per Acclivitatem PO movendo. Et requiratur, ut per Acclivitatem Majorem (nam de Minore satis constat) puta PF , moveatur.

Dico ; Si, quâ ratione Brevior est PF quàm æqui-alta PO , eâdem augeatur Vis V ; æquipollebit ; Adeoque, si ulterius augeatur ; movebit.

Nam, ut PO ad PF , puta ut m ad 1 ; Sic, vice versa, Gravitatio ponderis P in PF , ad ejusdem gravitationem in PO : (per 14 & 17 huius.) Adeoque, cum Vis ut V , æquipolleat huic ; Vis ut mV , æquipollebit illi, (per 17 Cap. 1.) & aucta, movebit. per 9, 11. Cap. 1.

PROP. XXX.

Datâ Vi, in Acclivitate datâ, motum efficere.
Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis impediens.

$$V. P :: n V. n P.$$

Fig. 50. **C**æteris, ut prius, constructis : Intelligatur Vis V , Ponderi P , per Acclivitatem datam PO movendo, æquipollens. Et requiratur, ut datâ Vi, nV , (puta quæ sit ad V , ut n ad 1 .) fiat motus.

Dico ; Si pro P pondere, substituatur nP , (quæ nempe sit ad P pondus, in eâdem ratione quâ data Vis nV ad V .) huic æquipollebit data Vis (per 17 Cap. 1.) Adeoque, Si tantillum adhuc minuatur Pondus ; Vis præpollebit, adeoque movebit. per 9, 11. Cap. 1.

SCHOLIA

S C H O L I U M.

Si porro in tribus proximè præcedentibus Problematis, Celeritatis ratio habenda erit; ut non tantum motus utcumque fiat, sed & datâ celeritate fiat. Huic satisfactum erit ex Prop. 29, 30. Cap. 1. Nempe invento (per tres Propositiones præcedentes, respectivè,) quo pacto motus fieri possit aliquâ saltem celeritate: Quâ ratione augenda erit celeritas; eâdem augenda erit, in Prop. 28 hujus, inventa longitudo rectæ PO; &, in Prop. 29, inventa Vis; &, in Prop. 30, eâdem minuendum erit inventum Pondus.

P R O P. XXXI.

Grave, ex puncto fixo liberè dependens; Si in Perpendiculo constituitur; manebit: Si extra Perpendiculum, ad Perpendiculum feretur. (Et quidem per arcum circuli in plano ad Horizontem recto.)

In plano autem ad Horizontem obliquo; ad eam rectam feretur quæ est Horizontali rectæ ad angulos rectos; (quam Perpendiculari Succedaneum appello:) & in eâ si ponatur, consistet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi Motrice.

Si FG, Horizontalis recta; FP, perpendicularis. Atque ex F puncto fixo, dependeat, per FP filum, pondus P. Adeoque; Si Fig. 49. extra perpendiculum quocunque moveatur, putâ ad S; describet (propter eandem fili longitudinem) arcum circuli PS, (saltem aliquod in superficie Sphæricâ, centro F descriptâ, punctum S designabit, quod PS circuli arcum terminabit.) Est autem (per 20 hujus.) Punctum P (utpote omnium in illa peripheriâ, aut etiam Sphærâ, infimum) ipso S humilius. Non igitur ad S feretur; per 2 hujus. Quod demonstrandum erat.

Si verò extra P constituitur: Propter punctum P omnium infimum, ductumque SP continuè descendentem, (per 20 hujus,) omniumque maximè (utpote per circuli peripheriam in Sphæra maximi, in perpendiculi

culari plano positi,) per 24, 25, 26. hujus; eò feretur; per 4 & 8 hujus. Quod itidem erat demonstrandum.

Idem similiter ostendetur: Si in F P G plano ad Horizontem obliquo ferendum intelligatur Grave; propter punctum P omnium in illo plano infimum, per 20 hujus: ductumque circuli, maximè Declivem, per 24, 25, 26. hujus. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

Supponit hæc Propositio, Filum *non-Extensile*; sed non & *Inflexile*; adeoque disertè procedit de Gravi Pendulo; quod itaque humiliter intelligitur, saltem non altius, quàm F punctum fixum. Verum quidem est; si esset in eadem P G peripheriâ, supra Horizontalem rectam F G continuatâ; descenderet hoc ad Perpendicularum, at non statim hac de causâ, neque statim secundum peripheriam; sed secundum Perpendicularum, ut Grave adhuc absolute liberum, (non tantum liberè Pendulum,) per 21 hujus: donec, extenso ad suam longitudinem filo coërceretur ne diutius rectâ descenderet, sed secundum Peripheriam, Vi. Propositionis hujus.

Sin Filum illud etiam Inflexile intelligatur; ubicunque in eâ peripheriâ (extra perpendicularum) ponatur; (sive supra sive infra Horizontalem lineam;) secundum peripheriam descendet, circa Centrum motus rotando. Verum illud hujus loci non est; sed ad Libram spectat, & infra demonstrabitur.

P R O P. XXXII.

Grave pendulum, in Perpendiculo constitutum, Vis quantumvis exigua, à Perpendiculo dimovebit.

Idem de Perpendiculari Succedaneo, in Obliquo plano, intelligendum. Déque aliis motibus, mutatis mutandis.

Fig. 49. **E**X puncto F, in Perpendiculo F P, dependeat ex Filo Pondus P: Quod, ex perpendiculo motum, describat P S G Circuli quadrantem; Cui circumscribatur F H quadratum. Et exponatur, secundum directionis lineam P H Horizontalem, Vis quantumvis exigua: puta, quæ sit ad Vim Ponderis P, ut n ad 1 (hoc est, si intelligatur Vis V, Ponderi P in perpendiculo æquipollens, sit exposita Vis n V.) Et ponatur

PROP. XXXIII: Et Motuum Declivitate. 65

ponatur (ex praescripto Prop. 28 hujus.) PO recta, ita declivis, ut Ponderi P in PO movendō aequipolleat Vis $\propto V$. Nempe, sumatur, in HG recta, recta HO quæ sit ad PH in ratione virium exposita \propto ad 1; & jungatur PO . Cum enim sit, ut Vis ad Pondus, sic Altitudo HO in perpendicularo (quæ est Directio Ponderis) ad HP lineam directionis Vis Moventis: Exposito Ponderi per PO movendo, aquipollebit Vis exposita; adeoque auctâ vel tantillum Obliquitate, Movebit. per 28 hujus. Est autem (propter SPH angulum contactûs, minorem angulo rectilineo OPH , per 16 Elem. 3.) Obliquior Ascensus per PS quàm per PO . Movebit igitur datum Pondus, Vis Exposita, in PS peripheriâ. Quod erat probandum.

Alia Demonstratio.

Idem demonstrabitur ex 15 hujus: Propter eandem PS peripheriâ in puncto P declivitatem, atque Contingentis rectæ PH ; quæ cum Horizontalis sit, constabit propositum, per 27 hujus.

PROP. XXXIII.

Grave Pendulum datum, quousque extra perpendicularum, datâ Vi, movebitur; determinare.

Fig. 49.

Constructis ut prius: Dico, Per arcûs PA (quem abscindit PO recta) Semissilem PS , nec ultra, Expositâ Vi motum iri Pondus P . Nam, quæ PA arcum (adeoque & subtensam, per 30 Elem. 3.) bifecat è Centro recta FS , secat subtensam PA ad angulos rectos; per 1 Elem. 3. Huic igitur subtensæ, hoc est PO rectæ, parallela est quæ Circulum in S tangit ST recta (per 16 Elem. 2.) Adeoque & pariter Obliqua, (per 9 Elem. 2.) Cum itaque magis adhuc sit ad Horizontem Obliqua, arcûs PS pars qualibet (ipso S puncto excepto:) minùs autem, pars quælibet arcûs SA ; (quod ex 15 hujus demonstrabitur:) ad S , nec ultra, movebitur Pondus P , ab eâ Vi quæ illi, per Acclivitatem PO movendo, aequipollet; per 28 hujus. Quod erat determinandum.

K

PROP.

PROP. XXXIV.

Grave Pendulum datum, ad datam altitudinem movere,
quanta Vis requiritur, determinare.

Fig. 49. **I**N eadem Figura: si velim ad S punctum usque moveri grave Pendulum P; sumatur arcus PA, duplus expoliti AS; junctaque PA continuetur donec occurrat, in O, perpendiculari rectæ GH. Cumque arcus PS particulae minus acclives sint quam TS vel PA, accliviores autem particulae omnes ultra S; Si sumatur (per 29 hujus) Vis ea quæ sufficiat movendo Ponderi P dato in acclivitate PA, seu PO, sufficiet: eidem movendo per arcum PS. per demonstrata ad Prop. præced.

CAP. III.

De Libra.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Libra (quæ & Bilanx dicitur) notissimum est in Officinis Instrumentum, quo Pondera explorantur.

B *Ilanx, à binis lancibus, nomen habet. Græcis σαλμός dicitur, ab ἰσμή pendeo.*

Libra nomen, an à Græco λίτρα descendat, an hoc ab illo à posterioribus Græcis deformatum sit; non convenit inter Criticos.

Qui originem Græcam esse volunt; à λίτρα, quæ exigua vel Ponderis vel Monetæ species erat, (sic enim Siculi Obolum dixerunt,) posteriores Græcos ejus alteram significationem deduxisse sentiunt, (quâ vel Pondo significet, seu duodecim Unciarum Pondus; vel ipsum etiam Ponderationis Instrumentum:) atque hinc fluxisse Latinorum Libram: ut à τρεῖς πορ, Terebrum, (nisi quis hoc à Tero malit) T in B mutato.

Qui Latinam malunt originem; Libram quasi Liberam dici volunt, (quod ipsum à Libet videatur descendisse, nisi repugnaret primæ syllabæ quantitas; fortassis igitur, ab ἐλευθερος, Liber; ut, ab ἐρυθρός, ruber; mutato θ in B; sic à πλῆθος, plebs; & ab ἔδαρ, uber; unde & nostrum uader, mutato θ in d; sicut, à θυγάτηρ, daughter;) propter Æquilibrii in utramque partem indifferentiam: Inde autem Græcorum posteriorum λίτραν, hoc sensu, deformatum; sicut à multis aliis vocalibus Latinis, Græca descendisse, certum est.

Multas habet partes; putà Jugum, Axem, Trutinam, Examen, Lanceas, &c.

II.

Libra Jugum, Vectis est seu Trabs oblonga, cujus ab extremis dependent Lances. Quod & tanta firmitatis esse intelligitur, ut appensis ponderibus sustinendis par sit, nec eorum pondere vel rumpatur vel incurvetur.

Ilgum, à Jugo, dicitur, (sicut, eodem sensu, à ζεύω, ζεύω,) quod Lancium appensiones interjungat. Nisi quis immediatè à ζεύω, Jugum dici malit; sicut, à ζεύω, ζεύω, Jugo.

III.

Axis, est Jugi medio transversim infixus, qui jugum sustinet, & circa quem rotatur: Jugum in duo Brachia dirimens.

IV.

Jugi Brachia, utrinque ab Axe ad Appensionum puncta porriguntur.

V.

Lances, à Brachiorum extremis liberè dependent, quibus immitti solent Pondera; alteri quidem, Notum; alteri, explorandum.

VI.

Trutinam appellant Manubrium sive Scapum, quo Axis extrema utrinque sustentantur, & cum Axe, Jugum ipsum.

Trutinam verò ipsam sustinet vel tenentis Manus, vel Uncus aliquis fixus, aliudve sustentaculum.

Dicitur autem à Græco τρῦλον, quod idem significat; & hæc, à τρῦλον, τρῦλον, altero; quod pondere sustinendo Teratur. Usurpatur etiam οὐρανός pro Balance totâ.

Solet autem (nec incommode) Axis, Jugo transfixus, ut plurimum Jugo firmetur conjungi, tanquam ipsius pars; ejusque extrema, intra duo in infimâ parte Trutinæ foramina, liberè moveri. Quamquam & possit Axis ipsius Trutinæ pars fieri, ita ut, circa ipsum immotum, liberè rotetur Jugum.

VII.

VII.

Examen dico Lingulam, quæ medio Jugo insistsens ad angulos rectos, indicium est vel Æquilibrii, dum intra fissuram perpendicularis Trutinæ continetur; vel Præponderantiæ, prout ad hanc aut illam partem extrâ vagatur.

HUc, credo, respicit illud *Persii Sat. 1.*
Examenve improbum in illâ
Castiges Trutinâ.

Dici videtur (ab *Exigo, Exegi, Exactum,*) *Examen* quasi *Exagmen*: Atque hinc *Examino*. Alii tamen, ab *ἀμα* vinculum, *ligamen*. (quod ab *ἀμα* ligo,) deducunt *Amen* sive *Amentum*, quod *Lorum* significat, (illud speciatim quod mediis Jaculis annectebatur, quò melius in hostes jacerentur:) Atque hinc *Examen*; tum ubi *Examen Libra* significat, (quod Filum esse volunt seu Funiculum, quo Trutina regitur;) tum ubi significat *Examen Apum*; quæ quasi vinculo societatis connectuntur: Sicut & ipsum *Apum* nomen ab antiquo *Apio*, atque hoc ab *ἀπλο* deducunt, quod se invicem pedibus alligent: Quasi huc respiciat *Virgilianum* illud, *Georg. 4.*

Atque illa pedibus connexa ad limina pendent.

VIII.

Æquilibrium verò dicimus, quum ad Libram contraponderantia, æquiponderant.

Quòdque in *Libra* speciatim *Æquilibrium* dicimus, idem est in aliis Machinis, sive contrariarum virium quibuscunque complicationibus, virium *Æquipollentia*: quæ tamen & *Æquilibrium*, (translato, à *Librà*, factâ) non raro dicitur; quum æquipollent contrariæ vires in aliis non minus Machinis, quàm in ipsa *Libra*: Pariter atque *Propensus, Propensio*, aliâque cognata Vocabula, quamquam primâ significatione, *Libram* spectent, Metaphoricè tamen de quibuscunque ad motum Inclinationibus usurpari solent.

In adjuncto Schemate: *A B*, est *Jugum Librae*; per cujus medium *C*, transit *Axis X*, dirimens *Jugum* in duo Brachia *CA, CB*; unde, ex punctis *A, B*, dependent duæ *Lances L, L*. *Axis* autem extrema *X, S*, sustinet *XTS Trutina*; quæ ipsa, in *T*, sustinetur; per

Fig. 51.

cujus fissuram mediam, *Examen* C E huc illuc transit (dum A B Jugum circa Axem X S rotatur,) vel *Æquilibrium* indicans, vel in hanc aut illum partem Præponderantiam.

Estque hæc vulgaris Officinarum *Libra*.

PROP. I.

Dum Axe fixo sustinetur *Libra*; duo utrinque Brachia (cum suis Ponderibus) contra-ponderant.

Nam, fixo Axe X S, non potest (propter inflexile Jugum A B, per Def. 2 hujus) Brachium A (Onusque suum) Descendere, quin Ascendat (cum suo) Brachium B; neque hoc Descendere, quin Ascendat illud.

PROP. II.

Si utrinque porrecta duo *Libra* Brachia, (unà cum Lancibus, reliquaque siqua est armaturâ,) invicem æquiponderant: tantundem est, *Librationem* quod spectat, ac si nullius essent Ponderis: Axis verò reliquæque *Libra* firmitatem quod attinet, tantundem valent, quantum est simul utriusque (cum armaturâ suâ) Pondus.

Putà: Si Brachium C A tantundem ponderando valeat, ad sui Depressionem, adeoque (propter inflexile Jugum) Elevationem contrarii C B; quantum in contrarium valet brachium C B, (nempe ad sui Depressionem, cum elevatione contrarii C A:) tantundem simul valent atque si nullius essent Ponderis.

Nam (per Prop. 8 Cap. I) contrarii conatus, cum invicem æquantur, se mutuo destruunt, seu nullis æquipollent. Nempe, *Librationem* quod spectat; quatenus scilicet contra-ponderant duo Brachia.

Ad Axis verò (nè ruat) *Jugique* (ne rumpatur aut incurvetur) firmitatem requisitam; ipsiusque *Trutina*, *Fulcrive* quo sustinetur, Vim: non modo non nullis æquivalent Brachiorum pondera; sed tantundem valent, quantum est utriusque simul Brachii Pondus, & liquid ultra est oneris.

Quippe,

Quippe, hoc respectu, non sunt conatus contrarii; sed utriusque deorsum: cui quidem communi Conatui, cum obstat tum Axis permanentia, Fulcrum quo sustinetur, tum Jugi vis inflexilis, &c. & quidem sigillatim Singula: illi par esse debet singulorum firmitas. per 18 Cap. 2.

DEF. IX.

Libram igitur Mathematicam consideramus, ad instar unius inflexilis Lineæ Rectæ, utrinque quantum opus est porrectæ, librandis Ponderibus adhibite.

Ummodo enim, positis in Æquilibrio Libræ Brachiis, eorum Pondera nullius instar habeantur; poterit similiter tum Libræ Magnitudo, tum Figura ipsa tuto negligi, ut solius Longitudinis habeatur ratio, ob ea quæ inde dependentia post tradentur.

X.

Centrum Libræ, dicimus, Punctum illud quod eam dirimit in Brachia invicem Æquiponderantia.

Æquiponderantia, dico, potius quàm Æque-gravia; quoniam fieri potest, ut, quæ sunt (absolutè considerata) æque-Gravia, possint, ratione sitûs seu Positionis, inæqualiter Gravitare vel Ponderare; quod tum ex sequentibus patebit, tum supra ostensum est, Prop. 10, 11. Cap. 2.

XI.

Adcoque Brachia sunt, quæ utrinque à Centro Libræ porriguntur; quæ vel Longitudine, vel saltem Ponderatione, Æqualia intelliguntur.

XII.

Appensionum, vel Applicationum Puncta, dicimus, ea Libræ Puncta, in quibus vel actu sunt, vel inde libere dependent appensa Pondera; vel saltem (in eodem ad Centrum Terræ Perpendiculo) directe vel incumbunt, vel subjiciuntur.

Notandum

NOtandum igitur; siquando inæqualiter utrinque à Centro Libræ distant Applicationum Puncta; adeoque quæ inter Centrum & illa puncta interjacent Rectæ, sint inæquales: intelligendæ erunt illæ rectæ, (si ullius omnino censeantur ponderis,) vel æqualiter utrinque à Centro porrigi quantumlibet, etiam ultra ipsa Appensionum seu Applicationum puncta; vel ea saltem quæ brevior est recta, in eadem ratione ponderosior censenda erit; ut una tota toti reliquæ æquiponderet: quo possint tum Brachia invicem æquiponderare (secundum Def. 11:) tum tota Libra quasi nullius Ponderis censerì, (vi Prop. 2 hujus:) ut applicatorum solummodo Ponderum comparandorum habeatur ratio. Siquid autem Inæqualitatis reverâ fuerit in Brachiorum Ponderatione; id appensis Ponderibus accensendum erit.

XIII.

Centrum Æquilibrii, appellamus, illud Libræ punctum, quo si intelligatur suspendi Libra; quæ utrinque ponderant, invicem Æquiponderant.

XIV.

Perpendiculum Æquilibrii, appello, quod per Centrum Æquilibrii transit Perpendiculum, seu recta ad Terræ Centrum.

XV.

Centrum Motûs, appello, Punctum circa quod immotum, rotatur Mobile.

XVI.

Axem Motûs, appello, Rectam, circa quam immotam rotatur mobile.

XVII.

Rotari verò dicimus mobile circa Punctum fixum, vel quiescentem Rectam; quando ita movetur, ut ipsius puncta singula tum inter se, tum ab illo seu puncto fixo, seu Rectâ quiescente & singulis in eâ punctis, eandem perpetuò distantiam conservet.

Fig. 52.

PUta; Circa punctum M rotari dicetur ABM triangulum, modo ut utcumque moveatur (retentâ magnitudine & specie Trianguli, adeoque eadem inter se punctorum omnium positione,) ut ipsius unumquodque Punctum, ut A, eandem ab M distantiam conservet. Adeoque circa

circa M punctum, vel dextrorsum aut sinistrorsum, vel prorsum aut retrorsum, vel in quamvis plagam rotari potest; puta, in situm $\alpha\beta\gamma$. At circa Rectam XS, non nisi prorsum vel retrorsum rotabitur. Si enim ipsius puncta singula, ut A, aliter moveantur quam Peripherias describendo, quorum omnium planis XS Axis, rectus sit; non eandem ab ipsius punctis singulis distantiam conservabit.

Sive autem intra ipsam Figuram (planam solidamve) sive extra, sive in ambitu, intelligantur punctum M aut Axis XS circa quæ Figura rotetur; perinde est.

XVIII.

Planum Æquilibrii, dicimus, quod ita per Grave incedit planum, ut, quæ utrinque sunt segmenta Gravis, aequiponderent.

Quum quæ utrinque sunt Segmenta dico; id etiam comprehensum volo, si utrinque nihil ponderet; puta, Si punctum vel linea tota sit in ipso plano.

XIX.

Axem Æquilibrii, appello, Rectam per quam quodcunque incedit planum, est Planum Æquilibrii.

XX.

Centrum Gravitatis, appello, Punctum, per quod quacunque incedit recta, est Axis Æquilibrii: Adcoque & quodcunque incedit Planum, est planum Æquilibrii.

Hoc utique posterius, ex priori sequitur. Nam quodcunque Planum per illud transit, ejus aliqua recta per illud transit; quæ quidem si sit Axis Æquilibrii, etiam & Planum illud erit Æquilibrii planum; per Def. præced.

PROP. III.

Manente Libræ Centro; sibi permessa Libra non movebitur.

Intellige; de Librà jam Quiescente, (& similiter in sequentibus;) contra verò, si jam sit in motu.

L

Sit

Fig. 53. **S**it Libræ AB, Centrum C. Hoc, inquam manente; sibi permissa Libræ, (hoc est, nullo Pondere, Vi, aut Impulsu quovis alio quàm Gravitate suâ, in has aut illas pârtes adaçta,) non movebitur.

Cum enim CA, CB, Brachia (Æquiponderantia, per Def. 11 hujus,) invicem contra-ponderent (per 1 hujus:) propter contrarios Conatus æquales, non fiet motus: per 12 Cap. 1. Nempe, si Libra jam Quiescat. Et similiter inde ostendetur, quod non sistetur, si jam sit in motu.

SCHOLIUM.

Valeat hæc demonstratio, in quocunque Libræ ad Horizontem situ, (puta, vel Horizontali, vel utcunque inclinato:) Siquo enim situ CB, CA, non æquiponderant; non erit, in eo situ, punctum C, Libræ Centrum; Sed aliud aliquod; de quo procedet demonstratio.

Et quidem, secundum Mathematicum rigorem, in certâ à Terræ Centro distantia finitâ, non erit ejusdem AB Libræ, idem in omni situ Centrum C. Sed, in situ Declivi, à puncto medio (quod in situ Horizontali est ipsum Libræ Centrum) pro varia Declivitate variè removebitur Centrum, versus declivius extremum. Adeoque, declivior semissis, si ex puncto medio sustineri intelligatur Libra, reliquo præponderabit; totâque Libra, hoc situ, posita, suapte sponte ad situm Horizonti perpendicularem ferri debet: (Contra quàm aliquibus visum est, Nempe, ad situm Horizonti parallelum ferri debere; contra quos fuse disputat Guid-Abaldus, in Mechanicis, Capite De Libra, Prop. 4.) Quod seorsim, si opus videbitur, demonstratu non est difficile. Et fiet, post Propositionem 14.

Verum si intelligatur Libra tamquam à Terræ Centro infinite distans; adeoque & Perpendiculara invicem Parallela: omnino idem censendum est in quocunque situ Centrum; nempe punctum C, libræ AB medium. Quo modo in Mechanicis assumi solet.

PROP.

PROP. IV.

A puncto quovis liberè dependens Grave, aut eidem directè vel subjectum vel incumbens; tantundem gravat illud quo ita sustinetur punctum, atque si in illo ipso puncto intelligeretur. Tantundem scilicet quantum est ipsius Pondus.

Idem intellige de Vi quavis aliâ, mutatis mutandis.

NAm, verbi gratiâ, ex puncto B, liberè dependens P pondus, ad perpendicularum feretur gravitate suâ, (per 30 Cap. 2.) De quo sic posito, sive aliâ directè vel subjecto vel incumbente pondere P, (sive propius sive remotius absit, modò in eodem perpendicularo,) constabit propositum; per 18 Cap. 2. Fig. 54.

SCHOLIUM.

Estque hæc Propositio non exiguæ utilitatis: ut quæ ad certam æstimationem reducit Pondera, sive non in eadem rectâ, sive non ad Jugum rectum applicata. Putâ, si intelligatur planum aliquod AD B, atque in eo Libra ACB recta: Ex variis autem hujus plani punctis (sive in ipsa Librâ, sive supra, sive infra Libram) appensa Pondera. Quæ ex A vel B Libræ punctis liberè dependent Pondera, tantundem gravant ea puncta atque si in illis essent. Quod, ex D puncto supra Libram; tantundem gravat huic subjectum libræ punctum δ , atque si in illo esset. Quodque, ex E puncto infra Libram; tantundem gravat punctum ϵ , cui directè subest, atque si ibidem esset. (Intellige semper, ita conjuncta esse puncta D, δ , vel E, ϵ , ut non possit D deprimi nisi depresso δ , aut E deprimi, nisi depresso ϵ .) Sûntque ipsa A, δ , B, quæ Applicationum Puncta dicimus, Def. 1. hujus. Fig. 55.

Similiter; Si libræ Jugum inflexum intelligatur, aut incurvatum, ut ACB. Quum nos Libram Mathematicam definivimus Lineam Rectam, &c. Def. 9 hujus: Pro Jugo illo inflexo, substituere licet quamlibet in eodem plano rectam; (eam potissimum, quæ, per Centrum motus transiens, est Horizonti parallela,) atque ad hanc, ut Libram, exigere singulorum appensorum Ponderum momenta: Puta, quæ ex α , δ , B punctis dependent perinde ac si ex A D B punctis dependerent. Fig. 56.

PROP. V.

Si *Æqualiter* Gravetur utrumque *Libræ Brachium*; *Æquiponderabunt* sic gravata *Brachia*: Et sibi *permissa* *Libra* sic gravata, manente *Centro*, non *movebitur*.

Si *in altero* alterum magis Gravetur; hoc *præponderabit*, atque *deorsum* (*nisi* alias *impeditum*) *feretur*: Et simul utraque *Ponderando* *æquipollebunt* *excessui præpollentis*.

Fig. 57. **N**Am, si *æquiponderantibus* utrinque *Brachiis*, ut *CA*, *CB*, (per 11 Def. hujus;) accedant adhuc *æqualia* gravamina, ut *P*, *P*, (sive ex appensis *Ponderibus*, sive adhibitâ *Vi*, vel *Impulso* quovis, aliâsve;) *Æquales* etiamnum manebunt *Ponderationes*; (quippe *Æqualia* *æqualibus* addita, *Aggregata* faciunt *Æqualia*.) Ideoque *contrariæ* cum sint, (per 1 hujus;) nullis *æquipollent*; & *Motum* propterea non efficiunt, per 8, 12 Cap. 1.

Si *magis* gravetur alterutrum; *Præponderabit*, (per 9 Cap. 1.) Adeoque *deorsum* *feretur*, per 12 Cap. 1. *Æquipollent* autem *Ponderando*, simul sumpta, *excessui præpollentis*, per 8 Cap. 1.

SCHOLIUM.

Ponderando, inquam; nempe quatenus invicem *contra-ponderant*, *Libram* in hanc aut illam partem trahendo. At quantum ad *Axem* ipsum, & quodcunque quo *Libra* *sustinetur* *fulcrum*; pro *contrariis* habenda non sunt, sed pro *conjunctis* *oneribus*: sicut ad Prop. 2. ostensum est. Quod in sequentibus item *Propositionibus* intelligendum erit; nisi siquando *contrarium* insinuetur.

PROP. VI.

Si *Ponderibus* utcunque gravata *Libra*, *Centro* *Æquilibrii* *sustineatur*: *Nentrum* *prægravatur* *Brachium*.

Et

PROP. VII.

De Libra.

77

Et contrà ; Punctum illud Libræ, quo si sustineatur sic gravata libra, neutrum prægravatur Brachium; est Centrum Æquilibrii.

Pater, ex Definitione Centri Æquilibrii.

PROP. VII.

Manente Centro Æquilibrii, utcunque gravatis Brachiis, Libra non movebitur.

It AB, Libra. Atque intelligatur Centrum Æquilibrii, vel idem Scum C centro libræ, (nempe si æqualiter vel-graventur, vel non graventur Brachia;) adeoque constabit propositum, ex 4 & 5 hujus: Vel ab ipso aliud, ut E. Hoc, inquam, manente, Libra non movebitur. Fig. 58.

Cum enim (per Def. Centri Æquilibrii) EA, EB, prout jam gravantur, invicem æquiponderant; Nec possit (propter inflexilem libram) alterutrum descendere, manente E, quin alterum Ascendat: contrarii conatus invicem æquales, motum non efficient. per 12 Cap. 1.

SCHOLIUM.

Quod autem de Gravitate dicimus, (sive in hac sive in aliis Propositionibus,) deorsum movente; idem de quavis aliâ Vi movente secundum Directionem suam, intelligendum erit; juxta Def. 21. Cap. 1

PROP.

PROP. VIII.

Manente in eadem à Centro Terræ Altitudine, Centro Æquilibrii; neque Descendere censenda est gravata Libra, neque Ascendere, utcunque moveatur. Et contrà; dum neque Descendere, neque Ascendere censenda est gravata Libra; Centrum Æquilibrii manet æquè-altum.

Et similiter de aliis motibus à Vi motrice quavis, mutatis mutandis, intelligendum erit.

Fig. 60. **I**ntelligatur AB Libra, utcunque gravata, in situ $\alpha\beta$ moveri: Manente (primùm) Centro Æquilibrii in eodem E puncto. Cum igitur, (propter E Centrum Æquilibrii,) partes EA, EB, in quocunque situ, adeoque in toto progressu, invicem Equiponderant: Sitque, propter inflexilem Libram, unius Ascensus cum Descensu alterius perpetuò conjunctus: Erit Ascensus Descensui Æquipollens, (nam sicubi præpollet alter, eà præponderabitur; per 7 Cap. 2.) Nulli igitur vel Descensui vel Ascensui, simul æquipollent. per 8 Cap. 1. Quod erat demonstrandum.

Idem deinde ostendetur; etiamsi non in eodem E puncto maneat Centrum Æquilibrii; sed in aliud quodvis æquè-altum transferatur, ut e.

Libra siquidem in situ $\alpha\beta$, intelligatur parallela in $\alpha E\beta$; nempe dum intelligatur Terræ Centrum infinitè distans: Si verò in distantia finitâ, intelligatur circa Centrum Terræ rotari Libra $\alpha\beta$, in situ $\alpha E\beta$; ut sit e Arcus circuli, terræ concentrici; & similiter $\alpha\alpha$, $\beta\beta$, &c. Probabitur utcunque (vel ex 33 Elem. 1. Vel ex Def. Rotationis), singula ipsius $\alpha\beta$ puncta, punctis singulis in $\alpha E\beta$ respectivè sumptis, æquè-alta, (& similiter de Ponderibus appensis siqua sint, &c.) Adeoque totam $\alpha\beta$, toti $\alpha E\beta$, hoc est (per jam demonstrata) ipsi AEB, æquè altam. Quod porro demonstrandum erat.

Atque hinc conversâ faciliè constabit.

Et similiter de quavis aliâ Vi motrice, mutatis mutandis, idem ostendetur.

PROP. IX.

Tantundem vel Ascendere vel Descendere censenda erit, utcunque gravata Libra; quantum vel Ascendit, vel Descendit Centrum Æquilibrii. Quæque

Quæque de Gravium Ascensu & Descensu dicta sunt; pariter de motis ab aliâ quavis Vi motrice, mutatis mutandis, intelligenda erunt.

Sit A B Libra utcumque gravata : E, Centrum Æquilibrii; quod Fig. 61, intelligatur ad ϵ moveri; Descensu sive recto sive utcumque obliquo: 62, 63. Dico, tantundem censendam esse descendisse Libram cum suo quantocunque gravamine; & quidem, sive eodem manente, sive utcumque mutato, ad Horizontem situ.

Primò; Descendat E ad ϵ , descensu recto; retinente Librâ eandem ad Horizontem inclinationem, adeoque manente sibi ut prius positâ Parallelâ; puta in $a\beta$. Manifestum est, tantundem descendisse libram totam. Junctis enim tum E ϵ , tum aliis quibuscunque punctis respectivis, ut A α : Propter æquales parallelas rectas E A, $\epsilon\alpha$; sunt & (per 33 Elem. 1.) æquales item & parallelæ E α , A α ; punctorum E, A, descensus mensurantes (per 10. Cap. 2.) qui itaque æquales sunt. Et similiter ostendetur de quovis alio Libræ puncto: adeoque de ipsâ Librâ.

Secundò; Manente, ut prius, eadem Librâ ad Horizontem inclinatione, descendat E ad ϵ , descensu utcumque Obliquo. Reliquisque ut prius constructis; demittantur ab E, A, ad Horizontales rectas $\epsilon\epsilon$, $\alpha\alpha$, perpendiculares E ϵ , A α , (descensus punctorum E A mensurantes, per 10 Cap. 2.) Et, demonstrato, ut prius, æquales esse & parallelas, E ϵ , A α ; æquales item erunt (propter similia Triangula) E ϵ , A α ; adeoque punctorum E, A, descensus æquales. Et similiter de quovis alio Libræ puncto ostendetur, adeoque de Librâ ipsâ.

Tertio; Descendat E ad ϵ , descensu quovis sive recto sive obliquo; & simul utcumque mutetur Librâ ad Horizontem Inclinatione: Puta non ut in $a\beta$ situ parallelo, sed ut in $a\epsilon b$ alio utcumque situ. Etiam sic tantundem descendisse Libram, quantum Æquilibrii Centrum, sic ostenditur. Si intelligatur Libra in $a\epsilon b$ situ parallelo; tantundem descendisse, jam ostensum est, (in primo & secundo Membro hujus:) Sed (per præcedentem) æquè-alta censenda est Libra in situ $a\epsilon b$, atque in $a\beta$: Ergo & sic tantundem descendisse Libra, atque ipsum E Centrum Æquilibrii, censenda erit. Quod erat demonstrandum.

Quodque de Descensu ab E ad ϵ , ostensum est; similiter ostendetur de Ascensu ab ϵ ad E. Nempe tantundem Ascendere censendam esse Libram, atque Centrum Æquilibrii. Quod porro demonstrandum erat.

Idem alii cuivis Vi Motrici, mutatis mutandis, faciliè accommodabitur.

PROP.

PROP. X.

Si Centrum *Æquilibrii* sit in eodem ad Terræ Centrum perpendiculo cum Centro Motûs; in neutram partem præponderabit; sibi que sic permissa *Libra* non movebitur. Sin extra perpendiculum constituatur; ad perpendiculum, infra Centrum Motûs, feretur Centrum *Æquilibrii*, (nisi aliàs impeditum,) in plano ad Horizontem recto; saltem quàm potest omnium maximè Declivi.

Idem aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

Sit *M* Centrum Motûs; circa quod rotanda sit *AB* *Libra*: *E*, Centrum *Æquilibrii*, in eodem Perpendiculo cum *M*; sive infra, sive supra, sive in ipso *M* puncto. Quiescet, inquam, sic constituta *Libra*, in neutram partem præponderans.

Primò; sit *E* Centrum *Æquilibrii*, idem atque *M*, Centrum Motûs. Fig. 64. Manifestum est (manente Centro Motûs *M* immoto, per Def.) immotum manere, Centrum *Æquilibrii* *E*, (quippe idem.) Non igitur in utramvis partem præponderat; neque movebitur in eo situ sibi permissa *Libra*; per 5 hujus.

Fig. 65. Secundò; Sit *E*, in *ME* perpendiculo, infra *M*. Adeoque (per Def. 15, 16 hujus) motâ *Libra*, feretur *E* in peripheriâ (saltem superficie sphericâ) ut *DEF* Centro *M* descriptâ. Cujus cum punctum infimum sit ipsum *E*, (per 20 Cap. 2.) quâcunque moveatur, Ascendet *E* Centrum *Æquilibrii*; & cum eo, *Libra*, (per præcedent.) non igitur suâ sponte movebitur.

Fig. 66. Tertiò; Sit *E*, in *ME* perpendiculo, supra *M*. Adeoque (ut prius) motâ *Libra*, feretur *E* in *DEF* peripheriâ (vel superficie sphericâ,) cujus punctum *E* (per 20 Cap. 2.) est omnium altissimum; arcusque *ED*, *EF*, pariter declives; per 15 Cap. 2. & 16 Elem. 3.) In utramvis igitur partem aequaliter propendet *E* (per 17 Cap. 2.) ipsâque *Libra*, (per præced.) Neutra igitur feretur. per 8 Cap. 2.

Fig. 67. Denique; Sit *E* extra perpendiculum *SMP*. Cum sit *M* Centrum Motûs, circa quod Rotando *E* describet peripheriam (saltem in Sphericâ superficie lineam) puta *SEP*: Propter arcum *EP* descendentem, ascendentem

ascendentem verò ES (per 20 Cap. 2) E centrum *Æquilibrii* (librâ tantundem descendente, per præced.) ad P feretur (nisi alias impeditum) in plano M E P ad horizontem recto (utpote quod est omnium maxime declive, per 25, 26, Cap. 2.) Saltem (si illic impediatur) descensu quam potest omnium maxime declivi, per 2 & 8, Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

SCHOLIUM.

A Deoque si, in P constitutum centrum *Æquilibrii*, inde vi amoveatur; se restituet, sibi permilla Libra, gravitate sua: Si constitutum in S, amoveatur; non eò restituetur, sed deorsum ad P feretur.

Quod autem de Librà, strictè sumptâ, ponderibusque liberè appensis (adeoque in plano ad horizontem perpendiculari) ostensum est: Pariter ostendetur, mutatis mutandis, in quavis aliâ vi. Puta; si planum S E P non Erectum sit, sed utcunque obliquum, in quo A B libra intelligatur, tum super illud moveri appensa pondera: Similiter enim (ex 20. Cap. 2.) omnia procedent de S P ad horizontalem rectam in eo plano normaliter positam (quod *Perpendiculari succedaneum* diximus) atque S P perpendicularo ad Centrum Terræ. Aut etiam, si in Horizontali, aliòve quocunque Plano intelligatur Libra (sive quod Libræ instar est) eique in A & B applicatæ vires quæcunque secundum Directionem ipsi S P parallelam: Eodem planè modo procedet demonstratio.

PROP. XI.

Si circa Centrum suum rotetur Libra; in eâ ratione moventur, vel Ascendendo vel Descendendo, tum ipsius puncta singula, tum quæ ex ipsis liberè dependent gravia; quâ distant ea puncta à Centro Libræ.

Circa C Centrum, rotetur Libra A B. Dico ipsius puncta singula, ut A B, D, in eâ ratione, Ascendere vel Descendere (eodem scilicet quæ in eodem Brachio; quæ in contrario, contrario motu;) quâ distant à C Centro.

Fig. 68.

M

Descr-

Fig. 68. Describunt enim A, B, D, puncta (propter eundem vel æquales angulos ad C) similes arcus (puta Aa, Bb, Dd,) qui itaque tum ipsi, tam & ipsorum altitudines perpendiculari mensuratae (puta Aa, Bb, Dd,) sunt (propter figuras similes & similiter sitas, saltem situ contrario positas, quod hic tantundem facit) radiis suis, hoc est, à Centro distantis CA, CB, CD, proportionales: adeoque & (per 10. Cap. 2.) Punctorum A, B, D, Ascensus, Descensusve. Quod erat demonstrandum.

Quodque de ipsis punctis ostenditur; perinde verum est de Ponderibus inde liberè dependentibus, vel per Prop. 4. hujus. Vel etiam, quia, quemcunque arcum describit, verbi gratia, B punctum; huic similem & æqualem & similiter situm, describet ab eo liberè dependens P, (utpote quod eidem, per 30. Cap. 2. perpendiculariter ubique subest; & propter æqualem sibi longitudinem, in eadem distantia.) Adeoque tantundem vel ascendit vel descendit; hoc est (per modo demonstrata) in ratione distantiarum punctorum appensionis à Centro. Quod etiam erat Demonstrandum.

PROP. XII.

Si idem sit Libræ Centrum, atque Centrum Motus: Quæ ex illâ liberè dependent Gravia (aut etiam aliàs directè vel subsunt vel incumbunt) in eâ ratione ponderant (seu gravant sua respectivè Brachia) cæteris paribus; quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum punctorum applicationis à communi Libræ & Motus Centro, componitur.

Adeoque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciproce proportionalia; Æquiponderant: Quæ verò ex Centro dependent; neutrum gravant Brachium.

Idem intellige de Viribus aliis: Nempe in eâ ratione movendo pollent, quæ componitur ex rationibus Virium, & Distantiarum à communi Centro Motus & Libræ (sive quod hujus instar est) quibus directè applicantur Vires.

P.

P.	nP.	P.	nP.	nP.
D.	D.	mD.	mD.	² nD.

PD. G::nP. nG::mPD. mG::mnPD. mnG::PD. G.

NAm (per 7. Cap. 2.) in eâ ratione ponderant; quâ pollent, si moveantur Ascensus, Descensusve: Hoc est (per 5. Cap. 2.) in ratione quæ ex rationibus Ponderum, & Altitudinum ascensus descensusve componitur: Hoc est (per præcedentem) quæ ex rationibus Ponderum, & distantiarum punctorum Applicationis à communi motûs & Libræ Centro, componitur. Quod erat Propositum.

Quodque, de Incumbentibus & Dependentibus, additur; constat ex 4 hujus.

Corollaria constant, ex 4. & 6. Cap. 1.

S C H O L I U M.

Propositio hæc (ut & præcedentes) potissimum respicit Libram tanquam ex unico suo puncto liberrimè dependentem (non ad certam axis positionem, aliter quam gravitate suâ & ponderum dependentium, determinatam) adeoque in plano ad Horizontem recto, live circa axem Horizontalem, libranda; & quidem, præsertim, ut in situ Horizontali constitutam: (quamquam & ad alium tum Libræ tum Axis situm accommodari poterit.) Saltem Pondera supponuntur omnia in eodem plano, atque ad unam eandemque rectam per Centrum motûs transeuntem, applicata; secus utique non esset idem Libræ atque Motûs Centrum. Erâtque hæc propositio nequiquam omittenda, ut quæ tam Celebris sit in re Staticâ, Æqualia Pondera, in ratione Distantiarum à Centro Libræ, gravitare.

Verum omnino evenit non rarò, comparanda venire Pondera, ad Libram exigenda, neque in situ Horizontali, neque in uno aliquo, sed diversis positam: Sed neque in plano ad Horizontem recto, aut circa Horizontalem Axem, libranda; sed circa inclinatum Axem, adeoque in inclinato plano movenda: Vel etiam non ad unam aliquam, sed diversas Libras, easque inæqualiter ad horizontem inclinatæ applicata: Ipsæque Pondera neque ex ejusdem rectæ, neque ejusdem plani, punctis suspensa.

Huic itaque casuum varietati ut satisfaciam, visum est sequentem propositionem huic subnectere, quæ rem eandem universalius exponat.

M 2

P R O P.

PROP. XIII.

Tonus idem ad idem Libræ punctum applicatum ; pro variâ Libræ ad Horizontem positione ; in plano ad Horizontem recto (sive circa Axem Horizontalem ;) ponderat in ratione *Distantiarum à perpendiculo* per Centrum Motûs.

In Plano autem ad Horizontem inclinato (sive circa inclinatum axem ;) in ratione *distantiarum à perpendiculi succedaneo* ; seu rectâ quæ est, in illo plano, ad Horizontalem rectam ad angulos rectos.

Et quidem, universalius ; *Æqualia Pondera*, sive ad ejusdem, sive diversarum librarum, utcunque ad Horizontem inclinatorum (modò circa *Axes æqualiter ad Horizontem inclinos*, sive in planis æqualiter inclinatis, rotentur) puncta qualibet, appensa ; ponderant (seu gravant sua respectiva Brachia) in ratione *distantiarum à perpendiculo* per suum cujusque Centrum motûs, vel *hujus succedaneo*, (illo quidem, si in planis ad Horizontem rectis rotentur ; hoc, si in planis inclinatis :) Hoc est ; utrobique à *Perpendiculari per Axem plano*.

Circa *Axes verò inæqualiter inclinos* (adeoque in planis inæqualiter declivibus ;) in ratione quæ ex rationibus *Distantiarum* illarum à Perpendiculo ejusve *Succedaneo*, vel *Perpendiculari per Axem Plano*, & *Declivitatum* Planorum, componitur.

Adeoque, *Pondera Inæqualia* circa *æqualiter inclinos* Axes (adeoque in Planis æqualiter declivibus ;) in ratione quæ ex *Ponderum* & *Distantiarum* illarum (à Perpendiculo ejusve *Succedaneo*) rationibus componitur.

Circa *Axes verò Inæqualiter inclinos* ; in eâ quæ ex *Ponderum*, & *Distantiarum* illarum, & *Declivitatum*, rationibus componitur.

Intelligatur

Intelligatur Libra, à situ Horizontali ACB , ad situm $aC\beta$, vel $LaCb$, moveri; puncto sui B , describens arcum Peripheriæ $B\beta b$, in plano sive ad Horizontem recto, sive utcumque obliquo. Et compleatur $CB\beta S$ circuli quadrans. Et ducantur rectæ $\beta\kappa$, $b c$, ipsi BC parallelæ; Perpendicularo (ejusve succedaneo) SC , concurrentes in κ , c . Dico in eâ ratione ponderare expositum pondus in punctis B , β , b ; quæ est rectarum BC , $\beta\kappa$, $b c$, distantias ab SC mensurantium. Fig 69.

Nam, demissis a punctis β , b , ad Libram in situ Horizontali AB , perpendicularibus βd , bd : Ostendetur, ex 4 hujus (ejusve Scholio) si $CB\beta S$ planum sit ad Horizontem rectum; tandem ponderare, respectu assumptæ Libræ AB , pondera ex B , β , b , punctis suspensa, atque si ex B , β , d , suspenderentur. Adeoque; si sint æqualia pondera; in ratione Distantiarum BC , βC , $d C$, (per præcedentem;) hoc est (propter parallelas) Distantiarum BC , $\beta\kappa$, $b c$: Sin pondera sint inæqualia; in ratione quæ ex Ponderum & Distantiarum rationibus componitur (per eandem Prop. præced.) Quæ erant proposita.

Idemque in Plano inclinato, constabit ex 26 Cap. 2. Cum enim inclinatio plani. (per 26 Cap. 2.) in eadem ratione omnes in illo plano gravitationes minuit; in eadem inter se ratione ponderabunt in B , β , b , punctis appensa pondera, in plano inclinato, quæ in plano ad Horizontem recto ponderarent (per 5 Cap. 1.) Hoc est (ut jam ostensum est) in ratione Distantiarum, si Pondera sunt æqualia; vel, si inæqualia, in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus composita. Quæ itidem probanda erant.

Quod autem eadem sit punctorum β , b , ab erecto per Axem Plano perpendiculari, atque ab SC rectâ (quæ illius est, atque circuli libratione descripti, ad planum illud recti, communis sectio) Distantia: Sive (quod eodem recidit, propter punctorum, sive a rectâ, sive a plano, distantias, rectis perpendicularibus mensurari solitas) quod rectæ $\beta\kappa$, $b c$, in circuli plano perpendiculares ad SC rectam, sunt etiam ad illud per axem plani perpendiculares: Constat ex Def. 4. El. 11. Quod etiam affirmatum erat.

Alia Demonstratio.

Eadem alias demonstrabimus, ex Prop. 21. Cap. 2. pro varia motus Obliquitate. Nam (constructis ut prius ductisque contingentibus BT , $\beta\tau$, $b t$, ut in Schemate;) Puncti B , quocumque onere gravati (& quidem sive in recto ad horizontem plano sive utcumque Obliquo) per arcum $B\beta b$ moti; eadem est obliquitas motus in ipsis B .

B, β , b, punctis, atque BT, β r, b t, contingentium; (per 15. Cap. 2.) quarum inclinationum ad horizontem anguli (si planum sit erectum) sunt TBC, $r\beta\kappa$, tbc; & his æquales, anguli SCB, $\delta C\beta$, SCb; (est utique TBC, SCB, uterque rectus; & tum $r\beta\kappa$, tum SC β , sumpto communi β C, complent rectum, per 16 El. 3. & 32 El. 1. & similiter tum tbc, tum SCb, sumpto communi c b C;) quorum Sinus recti sunt, BC, $\beta\kappa$, bc: His igitur proportionalia sunt Æqualium ponderum momenta in punctis B, β , b, in erecto plano, per 21 Cap. 2. (Adeoque; Inæqualium, in ratione quæ ex illâ & Ponderum ratione componitur; per 19 Cap. 2.) Eadẽque plano Obliquo accommanda, ut prius, per 26 Cap. 2. Quæ erant probanda.

Quodque de unâ Librà ostensum est; de pluribus similiter ostendetur. Puta, si ad Librà CB, punctum δ ; & Librà Cb, punctum b; appensa sint æqualia pondera: ponderabunt (per jam dicta) in ratione distantiarum δ C, b c, cæteris paribus (Adeoque, si pondera sint inæqualia; in rationibus ex Distantiarum & Ponderum rationibus composita, per 1 Cap. 2.) Quod itidem erat propositum.

Denique; quod de Axibus inæqualiter inclinatis, affirmatur; adeoque, Motuum Planis inæqualiter Declivibus: Constat ex Prop. 24, 25, 26, Cap. 2. Quod ultimo demonstrandum erat.

S C H O L I U M.

NOtandum interim hic erit; non ita hæc intelligenda esse, quasi, si ad Libram AB appensum pondus in B, ponderi in A, æquipereretur; illud in β , huic in α cederet, seu minus ponderaret. Quamquam enim illud in β , minus ponderet quàm in B; non tamen destruitur æquilibrium, quoniam & in eadem ratione (propter eandem obliquitatem) minus ponderet hoc in α quàm in A. Quodque de Æquilibrio dicitur; pariter & de momentis inæqualibus obtinebit. Puta, quâ ratione pondus in B, præponderat ponderi in A; eadem & illud in β præponderabit huic in α . Nam utriusque momentum proportionaliter minuitur, ob eandem motuum obliquitatem ratione Perpendicularium ad terræ Centrum; quæ Ponderum moventium Directiones sunt, & supponuntur invicem parallela.

At verò: Si loco Ponderis in A, α , a, (cujus Directio supponitur eadem cum directione, ponderis in B, β , b; utraque scilicet, deorsum ad terræ centrum; adeoque & propter Tangentes parallelas, Declivitates æquales:) Substituatur, verbi gratia, Vis humana; quæ non minus applicari

plicari poterit secundum directionem $\alpha \nu$, quam AV perpendicularum; (adeoque ejusdem erit momenti in quocunque libræ situ, dum interim illud Ponderis a B ad β moti minuitur:) Minuetur continuo ratio Resistentiæ ponderis (a B ad β , b, moti) ad æquale momentum Virium in A, α , a. Adeoque Vis in α , facilius movebit pondus in β , quam vis eadem in A, pondus idem in B. Quæ ex propositione sequente apertius constabunt.

PROP. XIV.

Si duo pondera (aut aliæ quæcunque vires) ad Libram applicata, ita se habeant, ut, in quocunque Libræ situ, eadem utriusque sit obliquitas motûs: Quam habent inter se horum momenta rationem in uno Libræ situ; eandem & in quovis alio habitura sunt.

Si verò (vel, propter curvatum libræ Jugum; vel Centrum Motûs extra ipsam Libram; vel, non easdem applicatarum virium Directiones; vel, aliàs undecunque;) contingat, pro vario Libræ situ, inæquales subinde futuras esse duorum motuum obliquitates: Non eadem erit, in omni Libræ situ, momentorum ratio: Sed variabitur, pro variâ ratione Declivitatum, sive Sinuum Angulorum Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi obliquitatis.

Quódque de duobus ponderibus dictum est, de pluribus similiter constabit.

1. **I**ntelligentur, ad libram ACB, duo Pondera (seu vires aliæ) Fig. 69. in A, B, ita applicata, ut directiones motuum AV, BT, vel nullam habeant vel æqualem obliquitatem (hoc est, ad directionem Moventis, quæ in Gravibus est Perpendicularum, vel nullum faciant, vel æquales angulos:) Eademque si, motâ Librâ, in alium quemvis situm pervenerint, ut $\alpha \beta$; eadem adhuc sit Directionum Motus $\alpha \nu$, $\beta \tau$, obliquitas. Eadem, inquam, erit inter se momentorum ubique ratio. Putâ, si pondus in B ponderi in A æquiponderet; illud in β huic in

in α æquiponderabit. Si illic præponderet : & hic, præponderabit ; atque in eadem ratione. Cum enim, ex hypothefi, eadem utriusque fit ubique Obliquitatis variatio ; adeoque (per 21 Cap. 2.) eadem ratione vel augeatur vel minuatur utriusque momentum : Erunt adhuc in eadem ad invicem ratione, quâ prius, constituta ; (per 5 Cap. 1) Quod erat primò demonstrandum.

Fig. 70. II. Deinde : Sit *Libra Jugum incurvatum* A M B : Seu (quod eodem recidit) *Centrum motûs* M, *extra libram* A C B. Et sunt, verbi gratiâ, utraque A, B, infra L M N horizontalem rectam per Centrum Motûs transeuntem ; sed ad perpendiculari M P partes oppositas. Adeoque, utut fieri possit eandem esse in A & B motûs obliquitatem ; si tamen moveatur A ad α versus P ; adeoque (propter rotationem, quæ angulos A M B, α M β , æquales postulat) B ad β versus N ; (nec tamen vel A ad P, vel B ad N perveniat :) Manifestum est, majorem esse motûs obliquitatem in α quam in A ; minorem tamen in β quam in B ; (majorem utique angulum cum perpendicularo faciet Tangens in α quam Tangens in A, minorem verò Tangens in β quam Tangens in B. Adeoque (per 21 Cap. 2. vel Prop. præced.) minuitur momentum ponderis ab A ad α moti ; moti verò à B ad β , augetur. Et propterea (per 8 El. 5.) major erit ratio momenti in β ad momentum in α , quam momenti in B ad momentum in A. Et similiter ostendetur (mutatis mutandis) in aliis libræ positionibus alias variari momentorum rationes. Et quidem, pro variâ ratione sinuum Angulorum inclinationis, seu complementi obliquitatis ; per eandem 21 Cap. 2. Quod erat itidem demonstrandum.

Fig. 71, 72. III. Idem ostendetur, si ex A C B Libræ puncto aliquo, ut B, dependant, non quidem liberè (ut eidem semper libræ puncto directè subfit) sed in certo angulo, ut C B E, fixum pondus E : Aut etiam, si similiter superne affigatur. Manifestum utique est (rotatione factâ circa centrum C) punctum E (vel huic affixum pondus) circulum describere, non quidem radii C B, sed C E : Idemque planè accidere, ac si jugum esset incurvatum A C E ; de quo modo ostensum est, quod erat propositum.

Atque hinc ostendetur (per Prop. præced. vel 21 Cap. 2.) *Pondus E infra libram fixum ; prout aliùs elevatur, ita plus ponderat, seu majori in A ponderi æquipollet : At, fixum supra libram ; minori.* Quod, inspectis figuris, statim patebit. Quippe distantie æstimandæ sunt, non secundum longitudines C B, C β ; sed C D, C δ : ut ex 4 hujus patebit.

IV. At

IV. At verò, si nec supra librâ, nec infra, sed à latere, affixum sit Fig. 73.
Pondus E, (intellige, ita ut, rotata librâ A C B circa axem X C S,
sint ubique C X, B E, in eodem plano:) erit eadem ubique momen-
torum ratio, pondèrum in A & E, non minùs quàm in A & B,
positorum. Cum enim parallelos arcus, æquales similes & similiter
positos, describunt B, E, puncta, eadem semper utriusque erit obliqui-
tas motus. Adeoque & eadem ratio momentorum; per primam par-
tem hujus. Atque omnino perinde est, atque si librâ X E (ipsi C B
parallelâ) circa centrum X ferretur.

SCHOLIUM.

Atque hujus ope, quæ utcumque ad varias circa eundem Axem li-
bras (connexas tamen) in variis Planis applicantur Pondera (puta
in parallelis planis Perpendicularibus per A B, X E, &c.) ad eorum
unum reducuntur. Perinde siquidem Ponderat E Pondus, ubicumque in
B E rectâ infinitâ fuerit, atque si esset in ipso B puncto. Ut jam ostensum
est.

Quæ autem ita ad unum Planum reducuntur Pondera; eadem, per
hujus, ad unam ejusdem rectam quamlibet (utcumque infra, suprâve
fuerint) reducuntur. Perinde siquidem ponderant, ubicumque fuerint
in eodem Perpendiculo (sive reuera, sive huc ut modò dictum est, re-
ducta) atque si in ipsâ quam quis velit istius Plani rectâ essent. Ut
ibidem probatum erat.

Quæque ita ad unam librâ reducuntur sunt pondera; eadem & ad u-
num ipsius Punctum, Equilibrîi Centrum, mox reducuntur, per 2o
hujus. Quippe ita perinde Ponderant simul omnia, atque si ex illo
puncto dependent. Ut ibidem probabitur.

V. Porro; Manente Jugo recto A B, & centro motûs in ipsâ Li-
brâ, C: Si tamen alia sit directio virium in A & B adhibitarum; vari-
abitur, pro variâ Libræ positione, momentorum inter se ratio; atque
ita quidem ut in propositione est affirmatum. Esto enim, verbî gratiâ,
A B libræ Jugum, in situ Horizontali positum; ejusque puncto B ap-
plicatum grave; adeoque virium Directio B P ad Horizontem perpendi-
cularis: Puncto autem A, vis alia quævis (putâ, humana,) adhibita,
secundum directionem A F (ipsi B P minime parallela;) cui quidem
A F parallela L ♯, peripheriam puncto A (circa C rotando) descrip-
tam tangat in L; (infra vel supra punctum A, prout contigerit)
Manifestum utique est, motu A ad a versus L (priusquam ad L per-
tingat)

N

Fig. 74:

tingat) Minui Obliquitatem motûs, (sive angulum quem facit directio motûs cum directione virium $A\beta$, vel huic parallelâ:) Adeoque (per prop. præced. vel 21 Cap. 2.) Augeri Momentum: Dum interim moto B , per similem arcum, ad β , hujus Obliquitas Augetur; adeoque Momentum Minuitur. Et propterea (per 8 El. 5.) alia ratio erit, pro mutato libræ situ, momenti virium in A ad momentum Ponderis in B ; atque momenti Virium in α ad Ponderis in β momentum. (Et quidem in eâ ratione, quàm innuit propositio: per 21 Cap. 2.) Quod erat affirmatum.

Fig. 75. VI. Contrâ verò; Si pro ACB jugo recto, substituamus (hoc in casu) LCB jugum inflexum; atque ita quidem inflexum, ut quem angulum facit CB ad BP directionem Gravitatis seu vis moventis in B , eandem faciat CL ad $L\phi$ directionem vis in L moventis: Manebit eadem ubique ratio momenti Virium in L , α , ad momentum Ponderis in B , β . Quippe idem hic præstabit jugum inflexum LCB , atque in primo hujus demonstrationis casu, rectum ACB . Et ut illic (propter similes arcus $A\alpha$, $B\beta$,) æquales erant obliquitates in α , β , non minùs quàm in A , B ; sic hic, ob easdem causas eadem erit in β , α , non minùs quàm in B , L , eadem Obliquitas. Cæterâque, ut illic ostenduntur. Dummodo (quod hic intelligendum est) directio virium in L , α , punctis, sit semper eadem; puta, rectâ $L\phi$ & parallela: sicut eadem supponitur directio Ponderum, in B , β , puta Perpendicularum ad Terræ Centrum.

VII. At verò; si in punctorum altero, ut B , β , ponderis directio eadem sit (puta, rectâ ad Centrum Terræ, seu Perpendicularis ad Horizontem;) in altero verò, ut A , α , directio moventis in singulis $A\alpha$ curvæ punctis alia atque alia; sitque, verbi gratiâ, secundum ductum ipsius curvæ, vel Rectas in iisdem punctis Tangentes: Propter motûs obliquitatem in A , α , sive nullam, sive eandem; mutatam verò in B , β ; (adeoque virium momentum illic æquale, hic continuò immutatum;) vel utrobique immutatum quidem, sed non similiter immutatum: Variabitur & momentorum inter se ratio (sive rectum sit jugum, sive Inflexum) pro vario libræ situ; ita quidem ut in Propositione determinatum est. per 21 Cap. 2.

Quodque in expositis casibus ostensum est; similiter ostendetur (ex iisdem Prop. 21. Cap. 2. & præcedente hujus) in aliis quibuscumque casibus. Constat igitur, quod erat propositum.

SCHOLIUM.

Videtur est, in hac Propositione, generaliter propositâ, plures casus exhibere, & strictim comprehendere; potius quam totidem Propositionibus.

sitionibus singulos exhibere: tum quia eodem principio nituntur omnes, eademque demonstratione confirmantur; tum quia infiniti esset laboris singulos recensere qui huc adduci casus possent. Expositis igitur hisce paucis, facile erit alios hisce similes, prout res tulerit, huc referre; & tanquam generali propositione comprehensos, ejusdem demonstratione confirmatos reputare.

Estque opportunus hic locus demonstrandi illud quod supra insinuavimus in Scholio Prop. 3. Nempe [*Si intelligatur Centrum Terræ tanquam in infinitâ distantia; Libra (vel non gravata, vel utrinque æqualiter gravata) quocunque situ ponatur, quiescet: Si verò intelligatur Centrum Terræ tanquam in distantia finita; quiescet quidem Libra in situ Horizontali posita; vel etiam in situ ad Horizontem Perpendiculari; posita verò in situ ad Horizontem Obliquo, neque sic quiescet (quod volunt aliqui) neque (quod volunt alii) ad situm Horizontalem feretur; sed ad situm Horizonti Perpendicularem.*]

Intelligentur, in A B Libra, duo quævis puncta, A B, æqualiter utrinque à Centro C remota, invicem æquiponderantia (sive æqualiter gravata) à situ A B Horizontali, per situm Obliquum $\alpha\beta$, ad situm a b Horizonti Perpendicularem lata, arcus similes & æquales rotando describere A $\alpha\alpha$, B $\beta\beta$; quos tangant rectæ A T, αT , a T, B T, βT , b T; quæ itaque *Directionem Motus* in illis respectivè punctis designabunt, per Prop. 15. Cap. 2. Fig. 59.

Atque Intelligentur, primò, Centrum Terræ (quò tendunt Gravia) tanquam in Infinitâ Distantiâ; adeoque Perpendicula, seu Rectæ-Deorsum (*Directionem Moventis*, seu Vis Motricis, designantes) A D, αD , a D, B D, βD , b D, invicem parallelæ. Erunt igitur, in situ Horizontali (propter tum rectas A D, A T, tum B D, B T, coincidentes) eadem utrobique Declivitas; (utpote utrobique perpendicularis:) Item, in situ ad Horizontem Perpendiculari (propter angulos D a T, D b T, rectos) eadem etiam Declivitas (quippe utrobique nulla:) Sed & in situ Obliquo (propter tum αT , βT , tum αD , βD , invicem parallelas; adeoque Obliquitatis angulos æquales D a T, D βT , quos cum directione Moventis facit Directio Mobilis;) æqualis utrobique Declivitas (per Declivitatum Definitiones;) adeoque (cum cætera sint paria) æquiponderabunt (per 13 hujus:) Cum itaque contraponderant (per 1 hujus) se mutuo sustinebunt, nec fiet motus (per 12 Cap. 1.) Quiescet igitur Libra, quocunque situ posita. Quod erat propositum.

Intelligentur deinde Terræ Centrum, tanquam in Distantia Finitâ; adeoque Perpendicula seu Rectæ ad Centrum (*Directionem Moventis* designantes) invicem convergentes putà, A K, B K, αK , βK , a K, b K,

b K, in Terræ Centro K coeuntes. Si itaque ponatur Libra in situ ad Horizontem Perpendiculari; erit (propter KaT , KbT , angulos rectos) æqualis utrobique Declivitas (quippe nulla:). Item, in situ Horizontali (propter tum angulos $CA T$, $CB T$, rectos; tum $CA K$, $CB K$, invicem æquales) æquales item erunt Obliquitatis Anguli $KA T$, $KB T$. Adeoque (propter æqualem utrobique Declivitatem) æquiponderabunt, & sese mutuo sustinebunt, A, B; Libraq; propterea quiescet, per modo demonstrata. Si vero ponatur Libra in situ Obliquo: Obliquitatis Anguli KaT , KbT , inæquales erunt, & quidem major ille qui est ad Brachium elevatius, puta KaT . Nam duorum æqualium angulorum $D\alpha T$, $D\beta T$, altero semper Major est angulus ille KaT ; Altero vero, angulus KbT vel Minor erit (nempe quoties ob magnam Libræ declivitatem, vel magnam Centri distantiam, βK cadit inter βD & βT ;) vel erit Nullus (nempe, si βK circumlum contingat, adeoque coincident βT , βK ;) vel saltem Minus eum superabit (nempe si quando propter exiguam Libræ Declivitatem, vel exiguam a Centro Terræ Distantiam, βT cadat inter βK & βD) ob angulum $K\beta C$, majorem angulo $K\alpha C$. (per 18 El. 1. Euclid.) adeoque (qui ad rectum reliquus est) $K\beta T$, minorem (reliquo) $K\alpha T$: (Quæ Schem. contemplanti satis obvius fuerit.) Erit igitur (quocunque situ Obliquo ponatur Libra; modo Terræ Centrum intelligatur in distantia finita) in motu depressioris puncti β minor Obliquitas (adeoque Declivitas major) quam elatioris α ; adeoque β præponderabit, per 13 hujus. Et consequenter (cum de punctis reliquis utriusque Brachii respectivè sumptis, idem sit iudicium; sintque cætera paria;) deorsum feretur Brachium depressius (per 12 Cap. 1.) donec redigatur Libra, ad situm Horizonti Perpendicularem a. b. Quod erat propositum.

Sunt qui contrarium hujus affirmant, inter quos Jordanus & alii, asserentes Libram obliquo situ positam, latum iri in situm Horizontalem: contra quos prolixè disputat Guld-Usaldus in Mechanicis. Qui tandem concludit, permanituram fore libram quocunque situ positam, etiam si consideretur Centrum Terræ tanquam in distantia finita. Quorum neutrum dicendum est, ex supra demonstratis constat.

Hinc sequitur, *Ejusdem Rectæ non unum aliquod situm esse Centrum Equilibræ*; quod nempe idem sit pro omni situ: sed, in situ obliquo, à puncto medio magis magisque ad partem declivorem procedere, prout obliquitas major fuerit; dummodo Centrum Terræ intelligatur in distantia finita. Quodque hic de Rectæ Centro Equilibræ dicitur; similiter infra intelligetur de Centro Gravitatis in Solidis, Planis, aliisve.

Sed & ex iisdem principiis probabitur, *Ejusdem Gravis (cæteris paribus)*

ribus) gravitatem minorem continuo fieri, prout Centro Terra magis appropinquat. Si enim, verbi gratia, recta AB, punctum medium C, intelligatur recta CK ad Centrum directe ferri; adeoque eadem semper Declivitate, & eodem impetu: reliqua tamen puncta, ut A, B, majorem continuo Obliquitatem sortientur prout Centro sunt propiora. Nam, eadem manente AKB trianguli base AB, prout altitudo CK minuitur, obtusior fiet angulus AKB; adeoque reliqui KAC, KBC, minores; & consequenter, majores fient Obliquitatis anguli KAT, KBT: (Etenimque in situ obliquo $\alpha\beta$ similiter ferè ostendetur.) Et quamquam de recta situ Perpendiculari ab, non idem contingat (eo quod tota recta sit in perpendiculo) tamen de rectis extra hunc situm, sed & de curvis omnibus, omnibusque tum superficiebus, tum solidis (ut quæ non possint tota in perpendiculi recta jacere) idem ostendetur.

Verum ubi Centrum Terræ consideratur tanquam in infinita distantia; adeoque Perpendiculara tanquam parallela; (quod in staticis plerumque fit;) hæc omnia locum non obtinent. Quam quidem hypothesein (post Archimede[m], aliosque) nos etiam sequimur, nisi cum contrarium insinuatur: quod & aliquoties monuimus.

P R O P. XV.

Ex tribus his, Pondere, Ponderatione, & Distantiâ puncti applicationis (sive, à communi Motûs & Libræ Centro; nempe si quod sit; sintque ad eandem per centrum motûs rectam applicata pondera: Sive, à Perpendiculo per Centrum motûs; si in eodem recto ad Horizontem plano rotentur: Sive, à perpendiculi succedaneo; si saltem in eodem plano rotentur: Sive denique à perpendiculari plano per axem motûs;) Datis duobus quibusvis, datur tertium.

Nempe; Datis Pondere & Distantiâ; datur Ponderatio: Datis Pondere & momento seu Ponderatione; datur Distantia: Datis ponderatione & Distantiâ; datur pondus.

Excipe; Si (quod unâ cum ponderatione datur) Distantia vel pondus nullum sit.

Intel-

Intelligitur autem Propositio, præsertim de Librà in plano ad horizontem recto libratâ; saltem in datâ declivitate. Et similiter in sequentibus.

$$PD = G. \quad \frac{G = PD}{P} = D. \quad \frac{G = PD}{D} = P.$$

Um enim (per 12 ut 13 hujus) Ponderationis sive Momenti ratio, ex rationibus Ponderum & Distantiarum componatur: Datis componentibus; datur composita: Item; Datis compositâ, & componentium alterâ; datur reliqua; (per 2 & 3 Cap. 1.) Adeoque constat propositum.

Exceptio item inde patet. Quoniam Pondus nullum, nihil Ponderabit, in quâcunque Distantiâ: Et, Nullius Distantiæ, nulla est Ponderatio, quodcunque sit Pondus.

SCHOLIUM.

Momentum illud hic intelligo, quo Pondus gravat suum respectivè Libræ Brachium; quod itaque speciatim *Ponderationem* appello: Non quatenus vel Centrum Libræ gravat, vel punctum illud ex quo directè dependet.

Propositionem hanc (& sequentes aliquot) multiplicem facere, pro variâ Distantiæ interpretatione secundum varios casus, potius quam propositionum numerum augere, visum est; quoniam eadem totius esset repetenda demonstratio. Quàmque hic adhibui variarum interpretationum Distantiæ, variis casibus accommodationem; eadem in sequentibus Propositionibus intelligenda erit.

PROP. XVI.

Dato Pondere, in datâ (à communi motûs & Libræ Centro; vel à Perpendiculari per Centrum motûs, ejûsve succedaneo; vel à Perpendiculari Plano per axem motûs;) Distantiâ: Pondus aliud investigare, quod, in assignatâ distantia, dato vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

Item

Item; Distantiam investigare, in quâ, Pondus assignatum, dato vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

$$\begin{array}{ccccc} P. & \frac{1}{n}P. & nP. & \frac{m}{n}P. & nP. \\ D. & \frac{1}{n}D. & \frac{1}{n}D. & \frac{m}{n}D. & \frac{m}{n}D. \\ \hline PD. & G::PD. & G::PD. & G::mPD. & mG::mPD. mG. \end{array}$$

Si P, datum pondus, in distantia CD, quam D dicimus, suspensum. Sitque alia exposita distantia, puta $\frac{1}{n}D$, (quæ sit ad D datam ut n ad 1;) idque vel in eodem vel in contrario Libræ Brachio. Dico; Pondus $\frac{1}{n}P$ (quod sit ad datum P, ut 1 ad n) in assignatâ distantia $\frac{1}{n}D$, priori in D, æquiponderare. Fig. 76.

Item: Sit assignatum Pondus, ut nP (quod ad datum P, sit ut n ad 1.) Dico; In distantia $\frac{1}{n}D$ (quod sit ad datum D, ut 1 ad n) assignatum nP pondus, priori in D æquiponderare.

Cum enim utrobique posteriora Pondus & Distantia, sint prioribus reciprocè proportionalia; (alterum ut n ad 1, alterum ut 1 ad n ;) Æquiponderabunt. per 12 & 13 hujus.

Similiter: Si imperetur, non ut æquiponderent; sed, ut in datâ ratione; puta, ut m ad 1: Pro $\frac{1}{n}P$, $\frac{1}{n}D$; positis $\frac{m}{n}P$, $\frac{m}{n}D$; habetur quæsitum. Quippe hæc, ad prius posita, ponderant in ratione m ad 1. per easdem 12 & 13 hujus.

PROP. XVII.

Æqualis; ejusdem, vel æqualium Ponderum; (sive, ad commune motûs & Libræ Centrum; sive, ad Perpendiculum per centrum motûs, ejusve succedaneum; sive, ad Perpendiculare Planum per motûs Axem:) Proportio; aut inde Elongatio: (sive Pondus Centro illi, aut Perpendiculo Planove, admoveatur; sive Centrum, Perpendiculum, Planumve, Ponderi; vel contra:) Æqualiter Auget, Minuitve Ponderationem. Et; Inæqualis: vel, Inæqualium Ponderum: Proportionaliter.

Sequitur.

Sequitur ex 12 & 13 hujus. Cum enim Æqualia Pondera, ponderant in ratione Distantiarum: Quâ ratione Augetur Minuiturve Distantia; in eâdem similiter vel Augetur vel Minuitur Ponderatio. Tantundem autem Addit, qui ex Duplo Triplum facit, & qui ex Triplo Quadruplum, &c. Quodque de Æqualibus dicitur; de Proportionalibus similiter inde constat.

P R O P. XVIII.

Datis Ponderibus quotlibet: Datisque, vel communi motûs & Libræ Centro (aut perpendicularo per centrum motûs ejusve succedaneo, aut perpendiculari Plano per motûs axem) atque Applicationum punctis; vel horum ab illo Centro (aut perpendicularo, perpendicularive succedaneo, aut Plano) ad datas partes Distantiis: Investigare; Quanta sit tum singulorum, tum simul omnium ponderatio; & ad quas partes; Tum denique quantum gravant ipsum quo sustinent Centrum, aut Axem.

$\frac{1D.}{P.}$	$\frac{13D.}{5P.}$	$\frac{74D.}{3P.}$	$\frac{40D.}{4P.}$	$\frac{-2D.}{3P.}$	$\frac{-3D.}{4P.}$
$+DP. + G. + 15 DP. + 15 G. + 12 DP. + 12 G. + 40 DP. + 40 G. - 6 DP. - 6 G. - 12 DP. - 12 G.$					

Fig. 77.

$$\begin{array}{l} +1G \\ +15G \\ +12G \\ +40G \\ -6G \\ -12G \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \\ \} \end{array} \right. = +28G.$$

$$\begin{array}{l} +10G \\ -18G \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \end{array} \right. = -8G.$$

IN Distantiis: verbi gratiâ, ad Centri (Perpendiculari, hujusve succedanei, Planive) Dextram (quas signo + insignimus) D, 3D, 4D; dependeant Pondera P, 5P, 3P: quæ (posito P in Distantiâ D ponderare ut G) ponderabunt ut G, 15 G, 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeoque simul gravant brachium Dextrum, ut 28 G; per 8 Cap. 1.

In Distantiis ad sinistram (quas contrario signo — insignimus) 2D, 3D; dependeant Pondera 3P, 4P: Quæ itaque contraponderabunt, ut — 6 G, — 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeoque simul gravant sinistram brachium ut 18 G; per 8 Cap. 1.

Atque ex ipso Centro, quod itaque neutrum gravat Brachium, Ponderus 4P: Cujus Ponderatio est, ut + 0 G. per 12 & 13 hujus.

Quæ

Quæ simul omnia valent, ut $+28G - 18G \pm 10G = +10G$, per 8 Cap. 1. Adeoque pręgravant Brachium Dextrum, ut 10 G. Hoc est (propter positum $DP = G$) quantum Decuplum Ponderis P in distantia D, dextrorsum, appensi.

Et similiter faciendum erit, quotcumq; & quantacumq; in quibuscumq; distantis, ad utramvis partem appendantur Pondera: (habentur enim vel ex 12 & 13 hujus, vel ex 15 hujus, singulorum Ponderationes: Idque, sive dentur ipsæ Distantiæ, sive Centrum (Perpendicularum, Perpendiculari Succedaneum, Planumve) una cum Appensionum Punctis; (nam, his datis, Distantiæ simul dantur; nempe ductis ab Appensionum Punctis, vel rectis ad Centrum illud, vel perpendicularibus ad Perpendicularum, Perpendiculari Succedaneum, Planumve.) Invenimus ergo, tum singulorum, tum simul omnium, Ponderationem; &, ad quas partes. Quod erat faciendum.

Quod verò C commune motus & Libræ Centrum spectat, vel siquod aliud est motus Centrum, vel Axem etiam; quo substinetur cum ponderibus Libræ, ne tota ruat: tantundem valent atque simul omnia pondera $+P + 5P + 3P + 4P + 3P + 4P = 20P$, ex centro æquilibrii directè dependentia; (saltem in eâ declivitate inde dependentia, quæ cum Ponderibus Libræ librari intelligitur:) per 2 hujus vel 18 Cap. 2. Utpote quorum Descensus eo impeditur. Quod itidem investigandum erat.

SCHOLIUM.

Dico autem; *Ex centro æquilibrii*: Quoniam, dum, propter Præponderantiam dextri Brachii, Libræ (si sibi permittatur) circa Centrum motus rotatur; Eatenus descendens, quatenus descendit Centrum Æquilibrii (per 9 hujus:) Fixum illud Centrum motus (vel motus Axis) non ulterius impedit Descensum Libræ, quàm, quatenus Descensus ille ex Rotatione proveniens, minus valet, quàm directus eorundem Ponderum, totiusque Libræ, Descensus. Et quantum valet horum Descensuum Differentia, tantundem gravatur Centrum (vel Axis) sustinens.

At verò; si addito, ad Brachium sinistrum, Pondere quod gravitet ut 10 G, quò ad Æquilibrii statum redigatur Libræ; unde propterea impediatur, ne ascendat sinistrum Brachium, quo itaque impeditur Rotatio: jam totum descensum impedit Centrum illud (vel Axis) fixum; Adeoque tantundem gravatur, quantum sunt (tum ipsius Libræ Pondus; tum adventitium illud, quod additur, quantumcunque sit, quod, situ quo ponitur, valet ut 10 G, libram reducens ad æquilibrium; tum) illa simul omnia appensa Pondera.

O

Obex

Obex vero, si quis superne objectus Rotationem impedit, tantâ vi premitur, quanta est Ponderis, quod eò loci appensum, Libram reduceret ad Æquilibrium: Nec tamen Centrum (Axemve) tantillo onere levat; (quia nihil sustinet, hoc est, nihil impedit quin rota moles simul descendat:.) Sed gravat potius.

Sin, loco hujus ad Brachium sinistrum Obicis, intelligatur Fulcrum Brachio dextro subjunctum, quò Rotatio impediatur: Sustinet quidem hoc partem oneris, eâque Centrum levat.

Verum hæc consideratio non est hujus loci; sed ad Vectem spectat duobus Fulcris sustentum.

Si quis interim (præcedentem hanc demonstrationem quod spectat) Calculi methodum aversetur; (utut Demonstrationes Arithmeticas, Linearibus intermistas, non refugiat vel Euclides ipse, vel quantumcunque severus quisquam ex Veteribus Demonstrator;) Lineisque malit illud præstari: Facile erit quicquid est Calculi, sive hic, sive aliâs, ad Lineas revocare (quod tamen ad Pompam magis faciet, quam ad Demonstrationis Robur vel Perspicuitatem:.) Cujus quidem ad hanc propositionem Instantiam libet exhibere. Ad cujus exemplar, quicquid hujusmodi hic aliâs occurrat, poterit similiter in Lineis, cui id libitum erit, quispiam exhibere.

Alia Demonstratio.

Fig. 78. Expositis, ut prius, Distantiis, Ponderibusque: Super rectis, quæ expositis Distantiis D, 3D, 4D, &c. sint æquales, vel proportionales; totidem construantur Rectangula, vel, similiter inclinata Parallelogramma; quorum altitudines, sint respectivis Ponderibus proportionales. Puta; Ad Dextram, DP seu G; 3D 5P seu 15 G; 4D 3P seu 12 G: Ad sinistram, 2D 3P seu 6 G; 3D 4D seu 12 G; Quæ quidem Parallelogramma, quum Bases habeant expositis Distantiis proportionales; & Altitudines, proportionales Ponderibus; (ex constructione:) sunt ipsa, in ratione ex his composita (per 23 El. 6.) hoc est, in eâ quâ ponderant appensa Pondera; per 12 & 13 hujus.

Fig. 79. His demum Rectangulis seu Parallelogrammis (per 44, 45, El. 1.) totidem respectivè æqualia (puta, primum primo, secundum secundo, &c.) invicem æque-alta & æquangula, utrinque ad eandem rectam, puta CH infinitam, tanquam communem basem, continuè ponantur: Puta, ad Dextram, ea quæ ponderibus dextris respondent, ut G, 15 G, 12 G;

12 G, ad sinistram quæ respondent Ponderibus sinistris, ut 6 G, 12 G.

Quæ quidem Parallelogramma, tum ipsa (quia prioribus sunt respectivè æqualia) tum ipsorum Bases (per 1 El. 6. cum sint æquæ alta) puta CB, BE, ED, CF, FS; sunt (per modò demonstrata) Ponderum quibus respondent Ponderationibus proportionalia. Adeoque: Ut CD, summa basium ad dextram; ad CS summam basium ad sinistram; ita ponderum omnium ad Dextram, Ponderatio; ad Ponderationem omnium ad sinistram. Atque ut SD differentia, sive ad CD, sive ad CS, sive ad CB, &c. sic est Præponderantia ponderum à dextrâ, ad Ponderationem vel omnium à dextrâ, vel omnium à sinistrâ, vel ipsius speciatim Ponderis cui respondet basis CB, &c. Quæ erant investiganda.

Pondus verò, quod ex Centro (vel Axe) dependet, ut nullam habet inde distantiam; sic quæ huic responderent Parallelogramma (puta C4P, CA) nullius sunt Latitudinis; adeoque nullius magnitudinis; ut & ipsum (librationem quod spectat) nihil gravat vel hoc vel illud Brachium.

Denique; ipsum quo omnia sustentur Centrum (vel Axem) cum simul omnium pariter descensui recto resistat, in eâ ratione gravant singula, quæ sunt ipsa respectivè Pondera; & simul omnia, quantum est omnium Aggregatum ex æquilibrii centro suspensum: (per 2 hujus, vel 18 Cap. 1.) Hoc est, ut $P + 5P + 3P + 4P + 3P + 4P = 20P$. Quod erat ultimò investigandum.

P R O P. XIX.

Datis Ponderibus quotlibet (vel summa Ponderum;) datâque eorum ad datum commune motûs & Libræ Centrum (vel ad datum per centrum motûs Perpendicularum, aut Perpendiculari Succedaneum, vel ad datum Motûs Axem; Planumve per illum Axem perpendiculare) Ponderatione ad datas partes: Ponderationem illam Augere vel Minuere, datâ quantitate; sive manente hoc centro (Perpendiculo, perpendiculari Succedaneo, Axe, Planove;) sive manentibus Ponderibus sic appensis.

O 2

Sunto

Sumto data pondera, vel summa Ponderum, verbi gratia, 20 P. Sitque omnium Ponderatio ad datum Centrum, vel Axem C (vel Perpendicularum, Planumve perpendiculare per Axem) $+10P = +10DP$, dextrorsum: Quæ verbi gratia, Minuenda sit (vel Ponderatio sinistrorsum Augenda) quantitate 5 PD; hoc est, expositæ Ponderationi $+10PD$, auferenda sit 5 PD.

Inveniatur (per 15 hujus) distantia dextrorsum, quâ datum Ponderus 20 P, ponderet ut 5 PD (nempe quantum expositæ Ponderationi auferendum est) puta $\frac{1}{4}D = \frac{5PD}{20P}$. Cui sit æqualis, verbi gratia, CE. Dico; si, manente C, omnia simul Pondera sinistrorsum.

Fig. 77. moveantur, quantum est EC recta; Vel, manentibus Ponderibus, tantundem dextrorsum transferatur C: Utrumvis fiat, tantò minor erit ponderum singulorum Distantia dextrorsum (vel major sinistrorsum) quanta est EC $= \frac{1}{4}D$. Adeoque (per 17 hujus) expositæ ponderationi dextrorsum, tantum auferatur (vel additur ponderationi sinistrorsum) quanta est 5 PD. Quod erat imperatum.

Similiter omnino feret, si Augenda esset Ponderatio dextrorsum (vel ponderatio sinistrorsum minuenda;) nisi quod tunc vel Pondera dextrorsum movenda essent, vel C (Centrum, Axis, Perpendicularum, perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare per axem Planum) sinistrorsum; quo appensionum distantia dextrorsum augeantur, vel minuantur sinistrorsum.

SCHOLIUM.

Hinc fieri potest, ut quæ prius fuerat sive Dextrorsum sive Sinistrorsum Ponderatio, in Equilibrium evanescat; (puta, si Ponderationi $+10PD$, tantundem auferatur; quippe $+10PD - 10PD = 0PD$;) vel, ut Ponderatio prius Dextrorsum, jam fiat Sinistrorsum; vel contra; (puta si Ponderationi $+10PD$, auferatur 15PD; quippe $+10PD - 15PD = -5PD$;) Quod per 16 hujus (quâ docetur, in datâ ratione minuire) non fiet; in quâcunque enim ratione (quæ infinita non sit) minuatur, verbi gratia, $+PD$; manebit adhuc, signo $+$ affectum.

PROP.

PROP. XX.

Datis Ponderibus quotlibet ; unà cum communi Motûs & libræ Centro (vel perpendiculo per Centrum Motûs, ejûsve Succedaneo, vel motûs Axe, aut per hunc plano Perpendiculari ;) atque applicationum Punctis, aut horum inde Distantiis.

Vel ; Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes.

Punctum Libræ datæ (vel Perpendiculum illud, aut Perpendiculi Succedaneum ; vel Perpendiculare Planum per Axem ; prout ab hoc aut illo Distantia data fuerit ;) invenire : quo si suspenderentur omnia, similiter ponderarent ; Nempe, tantundem, atque ad datas partes.

Quod ipsum inventum Libræ Punctum ; est Centrum Æquilibrii ; estque Unicum. Et Perpendiculum inventum, aut Perpendiculi Succedaneum ; est Perpendiculum Æquilibrii, aut Succedaneum hujus ; estque item Unicum. Et inventum Perpendiculare Planum ; est Planum Æquilibrii Perpendiculare ; estque hoc (ex planis plano huic per Axem parallelis) Unicum.

$$\frac{+10G=10PD}{20P} = +\frac{1}{2}D, \quad \frac{+lDP+msDP-ntDP}{+rP+sP+tP} = \frac{+l+ms-nt}{r+s+t}D.$$

ESto (ut in Prop. 18.) expositum C centrum motûs & libræ (vel Fig. 77. Perpendiculum per motûs centrum, aut perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare Planum per motûs Axem, juxta conditiones ad Prop. 15 memoratas :) Atque exposita Pondera ; quorum summa sit, verbi gratiâ, 20 P : Et simul omnium Ponderatio, ut 10 G, vel 10 P D ; dextrorsum.

Vel, exponantur singula seorsum Pondera, cum suis Distantiis ; unde, per 18 hujus, hæc summa & Ponderatio colligi possint.

Datur,

Datur, inquam, Distantia (per 15 hujus) quâ si ad datas partes hoc totum Pondus, vel summa Ponderum, suspendatur similiter ponderabit. Nempe $\frac{+10G = +10PD}{20P} = +\frac{1}{2}D$. Hoc est; si Dex-

trorsum (quod innuit signum +) in Distantiâ $\frac{1}{2}D$ (putâ in puncto E, distantia C D medio; vel ubivis in perpendicularo, aut perpendiculari succedaneo, per E transeunte, vel in perpendiculari per E plano, plano per axem motus parallelo;) suspendantur simul omnia Pondera seu summa ponderum 20 P: Similiter ponderabunt, atque jam in suis singula suspensa locis; nempe ut +10 G, vel +10 P D. Quod erat investigandum.

Vel, Universaliter: In distantiis +D, +mD, -nD, &c. appensa pondera rP, sP, tP, &c. ponderant ut +lrDP, +msDP, -ntDP, &c. (per 18 hujus.) Horum Aggregatum, si per summam Ponderum dividatur; quod prodit $\left(\frac{+lrDl^2 + msDP - ntDP}{rP + sP + tP}\right) = \frac{+lr + ms - nt}{r + s + t} D$, est Distantia (Dextrorsum, aut sinistrorsum, prout notata signis + aut - præpollent) quâ si summa Ponderum suspendatur, similiter Ponderabunt: per 15 hujus. Quod erat investigandum.

Dico porro; Libræ punctum E sic inventum, Æquilibrii Centrum esse; (Quodque per hoc transit Perpendicularum, vel Perpendiculari Succedaneum; est Perpendicularum Æquilibrii; vel Succedaneum hujus: Et, Perpendiculare planum per E, perpendiculari per axem Plano parallelum; est Perpendicularum Æquilibrii Planum.)

Cum enim ita gravant Libram omnia simul Pondera, atque si ex E puncto (vel per illud transeunte Perpendicularo, Planove perpendiculari) dependerent omnia (per jam demonstrata:) Si ipsum E libræ centrum fiat (vel ubivis in eo Perpendicularo, Planove suspendantur;) nihil ponderabunt, sive neutrum prægravabunt Brachium, per 12 & 13 hujus. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) libræ punctum E, Centrum Æquilibrii: Et (per def. Perpendiculari Æquilibrii, hujusve Succedanei, & Plani Æquilibrii) Perpendicularum illud, ejusve Succedaneum; erit Perpendicularum Æquilibrii, aut huius Succedaneum; & Planum illud, erit Perpendiculare Planum Æquilibrii. Quod erat demonstrandum.

Vel etiam; Quia, posito C Centro libræ, tantundem simul omnia dextrorsum Ponderant, atque si in distantia C E dextrorsum, suspendentur omnia: Si Centrum transferatur à C in E (vel a Perpendicularo, Succedaneo, vel Perpendiculari per Axem Plano, per C, ad parallelum per E Planum rectamve) tantundem omnium (ubicunque dependeant) vel

vel minuitur distantia dextrorsum, vel (quod eodem recidit) augetur sinistrorsum, quanta est CE recta (vel parallelorum distantia.) Adeoque (per præced.) tantundem Ponderationis, vel dextrorsum demitur, vel additur sinistrorsum, quanta est simul omnium Ponderatio in distantia CE: hoc est, per modo demonstrata, tota Ponderatio dextrorsum tollitur. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Equilibrui) E Centrum Equilibrui. (Et similiter, per suas respectivè definitiones, ostendetur, de Perpendiculo Equilibrui, ejusve Succedaneo; & Perpendiculari Plano Equilibrui.) Quod demonstrandum erat.

Denique: Centrum Equilibrui unicum esse dico: (& similiter unicum esse Perpendiculum Equilibrui, aut hujus Succedaneum; Unicum item Perpendiculare planum plano per Axem parallelum.)

Posito enim, verbi gratia, E centro Equilibrui; quo scilicet suspensa libra in neutram partem propendet: Si inde in utramvis partem ad quamcunque distantiam transferatur Centrum Motus, puta ad C; vel ex illâ parte minuetur, vel ex alterâ augebitur omnium distantia; adeoque & Ponderatio (per præced.) Præponderabit itaque brachiorum alterum (per 9 Cap. 1.) Adeoque non erit C centrum Equilibrui. (Et similiter de Perpendiculo Equilibrui, ejusve Succedaneo, vel de Perpendiculari Plano, ostendetur.) Quod erat ultimò demonstrandum.

PROP. XXI.

Datâ datî Ponderis (sive unius, sive ex pluribus aggregati) ad datum aliquod libræ punctum ut commune motus & libræ Centrum (vel ad datum Perpendiculum, Succedaneumve, vel Perpendiculare planum per axem) Ponderatione: Datur ejusdem, ad aliud quodvis libræ punctum ut commune Centrum motus & libræ (vel Perpendiculum, Succedaneumve, aut Perpendiculare planum parallelum, ut dictum est) assignatum, Ponderatio:

NAm, propter data duo Centra (vel Perpendicula, Succedaneave, aut parallela Plana) adeoque secundi à priori Distantiam ad datas partes: Datur (per 12, 13, & 17 vel 19 hujus) quantum dati ponderis ponderationi datæ ad datas partes, addendum erit vel auferendum, propter translatum Centrum (vel Perpendiculum, Succedaneumve, aut Perpendiculare

pendiculare planum.) Adeoque quanta erit, & ad quas partes, Ponderatio respectu posterioris. Quod erat propositum.

Putà; si Pondus, vel ponderum Aggregatum, ut 20 P, ponderet ad C Centrum (vel Perpendicularum, Planumve perpendiculare) ut + 10 PD, dextrorsum; & transferatur centrum (Perpendicularum, planumve) ad E; ut sit, verbi gratia, distantia CE = $\frac{1}{2}$ D dextrorsum; auferendum erit + $\frac{1}{2}$ D x 20 P = + 5 PD. Adeoque ponderabit ad E, ut + 10 PD - 5 PD = + 5 PD.

Si CE = $\frac{1}{3}$ D: auferendum + $\frac{1}{3}$ D x 20 P = + 10 PD. Adeoque ponderabit, ut + 10 PD - 10 PD = 00.

Si CE = D: auferendum + D x 20 PD = + 20 PD. Adeoque ponderabit, ut + 10 PD - 20 PD = - 10 PD; hoc est, ut 10 PD sinistrorsum.

Similiter omnino, si sumeretur E sinistrorsum; nisi quòd quæ jam auferenda sunt, tunc essent addenda; & contra.

PROP. XXII.

Datà Centrorum Libræ motusque & Æquilibrii (vel Perpendicularum per Centrum æquilibrii & per Centrum motus; vel Plani Perpendicularis per motus axem & huic paralleli Plani Æquilibrii) ab invicem Distantiâ ad datas partes: Ex cognito Pondere (vel summa ponderum) cognoscitur Ponderatio; vel, cognitâ ponderatione, pondus vel summa ponderum.

$$+D \times P = +DP = +G. \quad \frac{+G = +DP}{+D} = P.$$

Cum enim appensum Pondus, vel summa Ponderum utcumque appensum, perinde libram gravant atque si omnia ex Centro Æquilibrii (vel in perpendiculari Plano per Centrum Æquilibrii, plano per Axem motus perpendiculari Parallelo) dependerent; per 20 hujus. Adeoque per 12 & 13 hujus, in ratione quæ ex Distantiâ, & Ponderis (seu summa Ponderum) rationibus componitur; atque ad eas partes quæ est æquilibrii Centrum Planumve. Datâ, tum ad datas partes Distantiâ,

Distantiâ, tum summâ Ponderum; datur Ponderatio (quanta, & ad quas partes:) Vel, Datis Distantiâ & Ponderatione; Ponderus datur, vel summa Ponderum, per 15 hujus. Quod erat probandum.

PROP. XXIII.

Datis Pondere (seu summâ Ponderum) & Ponderatione ad datas partes: Datur Centri Æquilibrii (Perpendiculari, Planive, in quo est) à Plano per axem motûs transeunte, (vel, in datâ librâ per centrum motûs transeunte, à Centro libræ) Distantia ad datas partes.

Adéoque; Plani Perpendicularis per axem motûs, & huic paralleli Plani Æquilibrii: Vel, in dato Libræ Plano, Perpendicularum (aut Succedaneorum) per centrum Motûs & Centrum Æquilibrii: Vel, in datâ librâ per centrum motus transeunte, Centrorum Motûs & Æquilibrii: Uno dato, datur reliquum.

Cum enim Ponderatio ad datas partes, sit in ratione quæ componitur ex rationibus Ponderis (seu summæ ponderum) & Distantiæ Centri Æquilibrii (perpendicularivè aut plani in quo illud est) sive à communi Motûs & libræ Centro; sive à Perpendicularo per centrum motûs eîusvè Succedaneo; sive à plano per axem motûs perpendiculari; ad datas partes: per 12, 13, & 20 hujus: Datâ Ponderatione ad datas partes, & ipso pondere seu summa Ponderum; datur ad illas partes Distantia, per 15 hujus.

Adéoque (in datâ librâ) distantium punctorum uno insuper dato, datur reliquum (putâ, dato centro libræ per centrum motûs transeuntis, datur Centrum Æquilibrii; vel, dato centro Æquilibrii, datur istius libræ Centrum:) Similiter, distantium Perpendicularum (per Centrum Motûs, & per Centrum Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum: Item, Planorum perpendicularium (per Axem motûs, & paralleli Plani Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum. Quod propositum erat.

P R O P. XXIV.

Libram vulgarem Officinarum Construendi, rationem exponere.

Fig. 51. **L**ibra vulgaris Officinarum, intelligitur Centro suo suspendi; Brachiaque aequali præcisè a Centro longitudine utrinque porrigi: Atque ab horum extremis dependere Lances, ad Æquilibrium redactæ: Quarum uni imposito noto Pondere. ignotum prius Pondus in altero æstimatur. Quippè cum aequalibus utrinque a Libræ Centro distantibus, sint appensa: Quod noto Ponderi, sic appensum Æquiponderat, Æquale Pondus est: Sin majus, præponderabit, adeoque deorsum feretur: Si minus, elevabitur. Sequitur ex 12 hujus.

S C H O L I U M.

Quò exactiores sint hæ Libræ; requiritur, ut hæc quæ sequuntur, Observentur.

1. Ut Brachia utrinque ab Axe (quo sustinetur Libra) porrecta (unà cum Lancibus reliquisque armamentis) sint ejusdem præcisè ponderationis; (præsertim dum situ Horizontali ponitur, à quo ponderationis initium sumi solet:) Hoc est, ut in ipso præcisè Æquilibrii perpendicularo sustineatur Libra, cum armamentis. Quippe si alterum Brachiorum (cum armamentis suis) præponderet, ea propendebit Libra; indeque appenso Ponderi inique favebit, per 2 hujus.

2. Ut ex sui Jugi Centro æquilibrii præcisè dependeat. Sive, ut Axis Libræ sit Axis Æquilibrii. Nam (per 10 hujus) si Axis sit vel tantillum infra Centrum æquilibrii; libra in alteram partem detrusa non revertet, sed planè præcipitabitur, ut usui omnino futura sit incommoda. Si supra Centrum Æquilibrii sit Axis; Revertet quidem detrusa Libra; sed hoc habet cum priori situ commune incommodum, quod Libra ipsa in alteram partem præponderabit, eam scilicet quæ erit Æquilibrii Centrum. Unde, ut in priori casu præcipitatio promoveretur (propter Libræ præponderantiam ad situm decliviorum) ita in hoc casu (ubi præponderantia Libræ est ad partem contrariam) revocatur quidem Libra ne præcipiteretur, sed simul minus sincerè suum munus peragit; dum illa Libræ præponderantia, ponderis ex eâ parte appensi partibus favet. Quæ constant omnia ex 10 hujus.

3. Ut

3. Ut ejusdem sint præcisè longitudinis ipsa Brachia : Quæ quidem ab ipso Axe seu Centro Motus, ad ipsa Appensionum Puncta, æstima-
 manda est. Quippe si Brachiorum alterum altero longius sit ; minus
 ex illo dependens Pondus, majori ex altero dependenti, æquipondera-
 bit. per 12 hujus.

Atque hinc oriri potest insignis impostura. Puta, si, qui merces ven-
 dunt pondere æstimandas, Bilancem ita constitutam habeant, ut vacuæ
 lances æquiponderent, brachiorum autem alterum altero sit longius :
 Positis enim in lance ex longiori brachio dependente Mercibus ; & in
 contrariâ, noto Pondere : Mercium Pondus minus, majori Ponderi in
 oppositâ lance æquiponderabit, in fraudem emptoris.

4. Ut liberrimè ex Appensionum punctis dependant (cum suis one-
 ribus) Lances. Eo nempe sine, ut, in quemcunque ad Horizontem si-
 tum reciprocetur Jugum, Onus tamen (vi prop. 31. Cap. 2.) eidem
 semper Jugi puncto sublit ; adeoque æquali semper à Centro distantia
 suspendi intelligatur, Quippe ex eo Libræ puncto suspendi intelligitur,
 cui directè subest : per 4 huius.

5. Ut ipsa, in libræ Jugo, Appensionum puncta, sint in eadem præ-
 cisè Lineâ Rectâ cum ipso Motus Centro ; live (quod eodem recidit)
 in eodem cum Axe Plano cui Examen Perpendiculariter insistit. Quip-
 pe si vel infra, vel supra, sint Appensionum Puncta ; (cum tantundem
 valeant appensa Pondera, atque si in ipsis essent, per 4 hujus) pro va-
 rio libræ situ, variabitur momentorum ratio : ut ad 14 huius ostenditur,
 in casu 2 ; ubi Centrum Motus est extra Libram ; hoc est, extra rectam
 illam quæ appensionum puncta conjungit ; per 9 & 12 def. hujus.

6. Ut duo Brachia, sint, quàm commodè fieri potest, Longa.
 Quo enim longius à Centro distant Appensionum puncta, eo plus
 ponderant, tum sigillatim appensa Pondera (per 12 hujus) tum (quod
 inde sequitur) comparatorum Ponderum Differentia : (cui ponderando
 æquipollent simul utraque pondera, contrariis Lancibus imposita ; per
 5 hujus.) Unde, quod, in brevi Jugo, sensum fugiat discrimen, idem,
 pro Jugi longitudine auctum, evadet satis notabile.

7. Ut Jugi firmitas tanta sit (pro ratione Ponderum ad illud exigen-
 dorum) ut non vel rumpatur, vel inflectatur. Hoc utique adversaretur
 def. 2 & 9 hujus, quæ Libram Jugumque inflexile supponunt. Et
 (ne cæteris innoceamus) illis saltem incommotis obnoxium erit, quæ,
 ex Centro Motus extra libram posito oriunda, modo memoravimus.

8. Ut Axis Acies, quâ sustinetur jugum (quæque per ipsius Cen-
 trum gravitatis, vel Æquilibrîi, transire intelligitur) Tum Acuta sit
 (ad instar quasi lineæ Mathematicæ, quam referre intelligitur) quò fa-
 cilius

cilius in utramvis partem reciproctur Libra: Tum situ Horizontali constituta (quippe Libra circa Horizontalem Axem sincerius libratur, utpote in Plano ad Horizontem recto, in quo, ceteris paribus, Pondera magis gravitant, & suapte sponte feruntur, per 25, 26, Cap. 2.) Tum denique ut Declivitatem habeat utrinque æqualem (nam liqua motus est declivior, ea magis propendebit Libra; per 17, Cap. 2.) Adeoque ut Axis Cuneum referat, cuius duo plana in Aciem coeuntia, sint (posito Jugo in situ Horizontali) ad Horizontem æqualiter inclinata; & simul Trutinæ foramina, quibus sustineri solent Axis extrema, ita subtus comparata sint ut ab infimo puncto, cui incumbit Axis acies, æquali utrinque acclivitate assurgant; utrinque enim (nempe tum ob formam Axis indebitam, tum foraminum Trutinæ inæqualem acclivitatem) oriri poterit inæqualitas in declivitate motus.

9. Ut, quam fieri possit per alia incommoda, tenue sit & leve Jugum, cum armamentis suis. Nam (per 2 huius) utur, ceteris ut dictum est comparatis, ipsum Jugi Pondus, cum Lancibus reliquaque armaturâ, Librationem quod spectat, nullius instar habeatur: Axem tamen, quo sustinetur premit, ejusque obtundit aciem, quo minus circa illum liberè roteretur libra: Adeoque quo minus fuerit Jugi pondus, eò minus hinc incommodi, ceteris paribus, oborietur.

10. Denique; pro variâ Gravium ad Examen exigendorum pondere & magnitudine, aliter atque aliter prospiciendum erit in fabricâ Libræ. Nempe, in Aurifabrorum & Gemmariorum Bilancibus quibus res minutissimæ ad examen revocantur; maxime prospiciendum erit ut accurate omnia fiant, quò levissimum Ponderis discrimen detegatur.

Quos quidem tantâ cura accuratione fieri nonnunquam dicitur ut $\frac{1}{400}$ unius grani huc illuc vertatur, imò (quod in Honoratissimi *Boylli* nostri accuratissimâ quâdam Balance observatum est) parte unius grani, $\frac{1}{1024}$; (quod coram compluribus testibus fide dignis experimento facto sæpius comprobatum fuit.) Ubi autem res, magnæ Molis & Ponderis, libranda veniunt (ut in Fabrorum ferrariorum negotiis, aliisque magni moliminis rebus fieri solet) magis prospiciendum erit firmitati totius machinæ: Adeoque ita attemperanda sunt quæ de Longitudine Brachiorum, de tenuitate & levitate Jugi, de Aciei Axis acumine, reliquisque hujusmodi, supra diximus; ut firmitati totius machinæ non officiat. Et quidem, quæ ad Centipondium pendendum paratur Libra, non minus accurata censetur, si uno scrupulo vertatur; quam quæ ad Drachmam pendendam comparatur, si vertatur parte $\frac{1}{433}$ unius grani.

grani. Nam ut Centipondium in se contineat scrupulos 28800; ita Drachma continet $\frac{28800}{480}$ unius grani; computando scilicet in Librâ seu Pondo 12 Uncias; in Unciâ, 8 Drachmas; in Drachmâ, 3 Scrupulos; in Scrupulo, 20 Grana: Adeoque; utrobique eâdem appensi Ponderis parte aliquotâ vertitur.

PROP. XXV.

Stateram Romanam construendi rationem exponere.

Statera, quam (ob usum ejus frequentem Romæ) *Romanam* vocant; Fig. 80. a vulgari Librâ, Brachiorum longitudine, potissimum differt: Quæ non, ut Vulgaris Libra, Æqualia habet; sed, pro variâ Ponderum comparandorum ratione, variè Inæqualia. Porrecto nempe ab Axe Motûs (qui & Axis Æquilibrii esse debet) Brachiorum altero, ut CA, in certam longitudinem, putâ unius Pollicis, aut etiam minorem; in altero Brachio, ut CB, quantumvis porrecto, distinguunt partes ipsi CA longitudine æquales, quot opus videbitur, distantiis 1, 2, 3, 4, &c. terminatas; (quas etiam in particulas quotlibet æquales distribuunt.)

Appenso itaque Q Quælitò Pondere seu explorando ex A; Pondus datum seu notum P, ex Brachio contrario dependens, à puncto C removendo & admovendo explorant in quâ distantia fiet æquilibrium. Atque invento, verbi gratia, pondus P in distantia 5, ponderi Q in A, æquiponderare: hinc colligunt (propter Pondera Distantiis reciproce proportionalia) Pondus Q, ponderis P noti, quintuplum esse. Cujus Demonstratio ex 12 hujus dependet.

SCHOLIUM.

Hoc habet Statera hæc, præ vulgari Librâ commodum: Tum ut uno Pondere noto, quodcumque explorandum ponderent: Tum ut minus gravetur Centrum vel Axis Libræ. Quamquam enim rotationem quod spectat tantundem valet P in 5, atque 5 P in 1; non tamen æqualiter gravant Axem; Ut ad 18 hujus ostensum est.

FINIS.

Errata sic emendentur.

P Ag. 9. l. pen. l. ad r. p. 10. l. 28. quàm quod. p. 25. l. 6. marg.
Fig. 20, 21. p. 38. l. 22. iudicium. p. 57. l. 32. impediatur.
p. 61. l. 1. esset. p. 70. l. 11. Ascendat. p. 75. l. 9. per 31. p. 86. l. 10.
accommodanda. p. 96. l. 16. sustinentur. p. 98. l. 27. 3D4P. p. 99.
l. 23. 20P, illic suspensa. p. 108. l. 26. Quas.

*These Books following are sold by Moses Pitt at the
White-heart in Little-Britain.*

Folio.

Cassandra, The fam'd Romance, Printed 1667.
Briggs's Logarithms.
Francisci Suarez Metaphysica.

Quarto.

An Introduction to Algebra, Translated out of High-Dutch,
by Tho. Brancker, and Enlarged by Dr. Pell, 1668.
Nich. Mercatoris Logarithmo-Technia, five Methodus
construendi Logarithmos, 1668.
Jacobi Gregorii Exercitationes Geometricæ, 1668.
Dr. John Wallis, Opera Mechanica, Pars secunda & tertia.
Now in the Press.

Banister's Works.

Hugh Broughton's Concent of Scripture.

Snellii { Tiphys Batavus, Lugd. Bat. 1624.
 { Observationes Hassiacæ:

Petrus Paaw, De Offibus Amstelreod. 1633.

Octavo,

Biblia Hebræa, Josephi Athias, 1661.

Gualteri Needham, Disquisitio Anatomica De Formato
Foetu, 1667.

Euxtorfius's Epitome of his Hebrew Grammar, translated
into English by John Davis, 1658.

The Fortunate Fool, or The Life of the Dr. Ceñudo, 1670.

Crom, Scriptores in Scripturam. Now in the Press.

Pharmacopœia Londinensis, 24°. 1668.

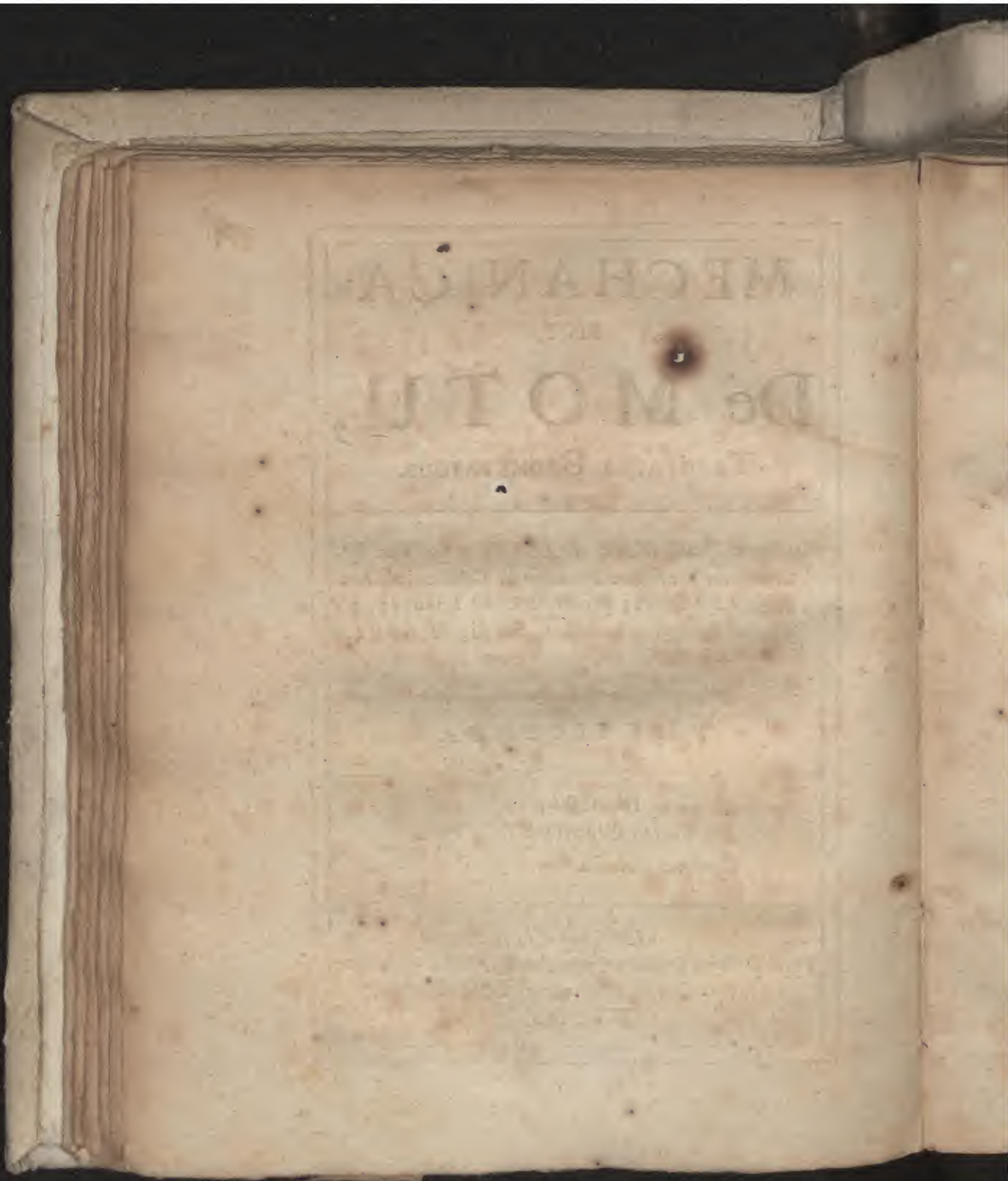
MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

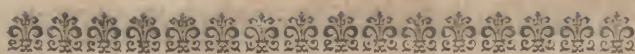
Authore JOHANNE WALLIS S S. Th. D.
Geometriæ Professore *Saviliano* in Celeberrima Aca-
demia OXONIENSI; *Regalis Societatis* LONDINI, pro
Scientia Naturali promovenda, Sodali; & REGIÆ
Majestati à Sacris.

PARS SECUNDA.

IN QUA,
De Centro Gravitatis;
Ejusque Calculo.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid; Impensis Mosis Pitt, ad Insigne
Albi Cervi in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXX.





MECHANICORUM,

SIVE

Traſſatûs DE MOTU:

PARS SECUNDA:

Quæ eſt

DE CENTRO GRAVITATIS, Ejusque CALCULO.

• AD LECTOREM MONITIO.



Equis miretur, quod Pars hæc Secunda, præter ſolum, ex abrupto inchoari videatur; continuatis tum Capitulo, tum Figuratum, tum Paginarum Numeris: Lectorem monendum duxi, id pluribus de cauſis contigiſſe. Primò quidem, quod non ab initio ſtatueram particulatim edere; ſed ſimul & ſemel opus integrum emittere. Et quidem (ut dicam quod res eſt)

Partis hujus Secunda pars quaſi dimidia jam ante impreſſa fuerat, quàm vel Partem Primam (anno præterito) ediderim, vel Opus ipſum in Partes diſtribuendum putaverim. Sed partim Operarum Mora, qua Opus Typoſetis difficile, atque inuſitatum, in longum protraxerant; partim aliorum impatientia, qui ut ſaltem Partem illam præmitterem eſſagitarunt; fecere, ut loco commodo Sectionem facerem. Verùm, ſi id in cauſa non fuiſſet; alia tamen ratio eſt, quæ etiam ab initio fecit, ne Opus hoc in Libros partirem,) cur ſic fuiſſem. Quippe; cum frequentiffima occurrat Citationum occaſio; ſi, quoties Figura vel Propoſitio citanda foret, toties, præter ipſarum Numeros, tum Libri ſeu Partis, tum Capituli Numeri recensendi eſſent: Omnino minus commode id fieret, quàm (quod hic fit) ubi Figura qualibet unico Numero, & qualibet Propoſitio vel articulo vel ſaltem duobus Numeris designatur. Atque ob eandem cauſam, etiam ſequentis Partis Numeri cum Numeris Secunda continuandi erunt.

CAP.



CAP. IV.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO.

Continuum quodvis (secundum Cavalieri Geometriam Indivisibilem) intelligitur, ex Indivisibilibus numero infinitis constare.

UT, ex infinitis Punctis, Linea; Superficies, ex infinitis Lineis; & ex infinitis numero Superficiebus, Solidum: Item ex infinitis temporis Momentis, Tempus, &c.

Hoc est; (ut nos idem explicamus in nostra Arithmetica Infinitorum, & Tract. de Con. Sect.) ex particulis Homogeneis, infinite exiguis, numero infinitis; Idque (ut plurimum) secundum unam saltem dimensionem æqualibus.

Fig. 81. **P**Utà; Linea, ex infinitis punctis, hoc est, Lineolis infinite exiguis, longitudine æqualibus, vel æque altis; quarum cujusvis longitudo vel altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitesima) longitudinis vel altitudinis totius lineæ.

Fig. 82. Item, Superficies ex infinitis lineis sive rectis sive curvis parallelis; hoc est, superficieculis (lineis illis interjectis) æque altis, quarum cujusvis altitudo sit infinitesima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur constare) hoc est ex superficieculis æqualibus & similibus, quarum cujusvis magnitudo sit $\frac{1}{\infty}$ totius areæ.

Item; Solidum, ex infinitis numero superficiebus, hoc est solidulis æque altis sive æque crassis, quorum cujusvis altitudo vel crassities sit $\frac{1}{\infty}$ totius; vel, lineis numero infinitis (ex quibus intelliguntur illæ superficies constare) puta ex totidem Prismatis, situ paral-

parallelis, quorum bases (communi plano sectorum ad ea recto) similes sint & æquales, quarum magnitudo sit $\frac{1}{2}$ istius quo secantur plani, vel etiam, ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur constare) hoc est solidulis exiguis, æqualibus, quorum singulorum magnitudo intelligatur $\frac{1}{2}$ totius.

Quæ quidem Lineolæ, Superficieculæ, Solidula, &c. variis modis disposita intelligi solent, prout constructori videatur expedire. Exempli gratia; Circulus dicetur, hoc sensu, ex infinitis numero rectis parallelis constare, ad eandem unam aliquam diametrum ordinatim applicatis; hoc est, Parallelogrammis æque altis: vel ex infinitis numero Circumferentiis concentricis; hoc est, annulis æque crassis: vel ex infinitis numero radiis; hoc est, sectoribus, vel triangulis similibus, &c. Et Sphæra similiter, sive ex infinitis numero planis æque crassis, sive ex totidem superficiebus Sphæricis concentricis; sive ex infinitis numero sectoribus sphæricis, aut Pyramidulis; &c.

Fig. 83.

Fig. 84.

Fig. 85.

Dico tamen, ut plurimum, ita fieri, ut illæ particule secundum unam saltem dimensionem sint æquales: Neque enim illud necessario exigitur; quin, si id aliquando expedire videbitur, pro altitudinibus (verbi gratia) æqualibus, poterit constructor vel arithmetice proportionalibus, vel secundum aliquam aliam ordinatam seriem crescentibus vel decrescentibus uti.

Hoc est (secundum Mathematicum rigorem) saltem inscribi potest, vel circumscribi, vel aliàs adaptari, ex huiusmodi particulis conflatum, quod ab exposito differat quantitate infinitè exiguâ, sive quæ datâ quâvis minor sit.

Putâ; in Circuli peripheriâ, ex arcubus numero infinitis, conflabitur curva quæ peripheriæ exactè congruat; sed & eidem peripheriæ inscribi potest ex subtenis numero infinitis, vel circumscribi ex infinitis numero tangentibus, conflata linea, quæ à peripheriâ illâ deficiat, vel eam superet, differentiâ quæ datâ quâvis minor sit. Unde factum est, ut Circulus, pro Polygono regulari laterum numero infinitorum, haberi soleat. Et, in aliis curvilineis, similiter.

Item Circuli Plano, aptari potest, sive ex Annulis, sive ex Sectoribus, figura quæ circulo accuratè congruat: Sed & eidem inscribi potest vel circumscribi, sive ex Parallelogrammis, sive ex similibus Triangulis figura, cujus ab exposito circulo differentia, sit datâ minor. Atque in aliis similiter.

Atque

Atque hanc, de Indivisibilibus, doctrinam (nunc passim receptam, atque, post Cavallerium, à celeberrimis Mathematicis approbatam) pro Veterum continuâ figurarum Adscriptione, substituere visum est; ut brevior, nec tamen, minus demonstrativam, si debitâ cautione adhibeatur.

Hanc interim definitionem, utut Capiti V. maximè subservituram, huic IV. Capiti præfigo, quoniam & hic alicubi usui erit. Ut siquando Grave, per omnia sui puncta, designem, &c. nec velim tamen perperam intellectum iri.

Sin Demonstrandum hoc, non Definiendum, putet quis; Ego quidem pro ætenuis demonstrato habeo quatenus demonstratione opus sit, ex demonstratâ ab aliis Methodo Indivisibilium. Hic utique id agitur, ut definiam quo sensu velim hujusmodi quæ occurrunt intelligenda; quod est Definitionis opus.

Definitio *Centri Gravitatis*, habetur in Capite præcedente.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Puncto unico, ut Centro Motûs, sustineatur Grave (vel ex pluribus conjunctis gravibus aggregatum:) poterit nihilo minus in quavis partes, circa illud rotando moveri; non aliàs.

Si duobus punctis, pluribûsve in eadem rectâ, ut motûs Axe sustineatur: poterit, circa illam rectam, in utramvis partem rotando moveri; non aliàs.

Si tribus (pluribûsve) non in eâdem rectâ punctis sustineatur: in nullas partes movebitur.

Fig. 86. **I**ntelligatur Grave quodvis ABF, unico puncto M ut Centro motûs sustineri. Manifestum est, stante hoc puncto M, in quascunque partes, eandem posse totius figuram retineri. Quippe in quodcunque Superficie Sphericæ centro M descriptæ moveatur (verbi gratia) punctum A; (hoc est, in quascunque partes circa M roteatur;) nihil impedit quin & reliqua puncta, ut B, ita simul moveantur, ut eandem

eandem quam prius inter se positionem retineant. Puta, ut A, B, sint in eadem quâ prius distantia; sitque A B F idem angulis, iisdemque ut prius cruribus comprehensus, &c.

Sin duobus punctis, ut X, S, (vel pluribus in eadem rectâ) aut etiam ipsâ XS rectâ, ~ut Axe motus sustineatur: Manifestum est, stante rectâ XS, adeoque omnibus in illa punctis, posse aliud quodvis punctum, circa hanc ut Axem, vel prorsum vel retrorsum peripheriam describere, reliquaque simul puncta, ita ut necesse erit quod eandem inter se positionem retineant, moveri; similes item peripherias circa eundem Axem describendo.

Suntque hæc duo, vel ita ex Elementis perspicua, vel per se manifesta, ut in 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, def. 11 Euclidis (quæ Sphæram, Conum, & Cylindrum spectant) quasi pro postulatis supponantur.

Sed dico porro; Stante centro motus M, non posse, nisi circa hoc rotando, moveri grave: Propter eandem, quam manere supponimus distantiam, cuius libet sui puncti, tum ab M puncto, tum à sui quovis alio. Per def. Centri motus.

Item; Stantibus X, S, punctis; non posse aliâs quam circa hanc rectam rotando (ut circa Axem) moveri. Quippe omnia ejusdem XS rectæ puncta, eodem situ manere certum est; (secus enim non possent eandem quam prius ab utroque distantiam retinere:) Quæque extra hanc rectam puncta, si aliter moveantur quam circulos circa XS axem describendo, non retinebunt eandem ubique tum ab X tum ab S distantiam; (quod ex Elementis Sphæricis facile constabit.) Et, nisi simul ita moveantur omnia (hoc est, nisi totum grave circa XS axem rotetur) non eundem inter se situm conservabunt; (quod supponitur.) Non igitur aliâs quam sic rotando movebitur.

Denique: Si tribus punctis, ut X S A (nedum pluribus) non in eadem rectâ, sustineatur: Non movebitur. Cum enim, stantibus X S, non posse aliter, quam rotando circa XS ut Axem, moveri grave, jam ostensum sit: non posse autem sic moveri, stante etiam (extra hanc rectam) puncto A; (utpote quod, cum extra Axem sit, non à reliquis moti punctis omnibus, nisi & ipsum simul moveatur, eandem distantiam retinebit, quod Rotationis definitio postulat:) non omnino movebitur.

SCHOLIUM.

Intelligitur Propositio, de Gravi (seu gravium Aggregato) duro & constante; eoque saltem constante, ut, ea quæ adhibetur Vi, nec frangatur, nec luxetur aut incurvetur; quin eandem (saltem æquipollentem)

Q

tem) retineat figuram omniumve ipsius partium inter se positionem respectu totius, utcumque situm seu positionem respectu loci mutant: Non de Gravi fluido seu molli, quod promiscue incurvetur, vel figuram suam mutet, partiumque inter se positionem. Quod & in aliis subinde propositionibus intelligendum erit.

Puncta vero, ut M, X, S, &c. quibus sustineri intelligitur grave, adeoque immotis illis, moveri; sive sint in ipso Gravi, sive extra, perinde est. Sed utcumque ita cum Gravi quod movetur quasi connecti intelligenda sunt, tanquam ipsius puncta essent; & eandem cum reliquis Gravis punctis positionem retineant, utcumque moveatur Grave.

Puncto autem (uno vel pluribus) sustineri dicitur illud Grave, quando (rerentia sua ad Gravis partes singulas positione) loco suo minime dimoveri intelligatur punctum illud, seu plura puncta.

Denique; Quod, de Graviorum Aggregato (dum ita, ut dictum est, connecti intelligantur) tanquam pro uno Gravi habendo; hic insinuamus: idem in sequentibus intelligendum erit. (Quippe & Graviorum Aggregatum, Grave est.) Quod semel moneo; ne singulis identidem propositionibus repetere opus sit.

PROP. II.

Si recta quavis, ut Axe Motus, ad Horizontem perpendiculari sustineatur grave; in nullam partem gravitate sua præponderabit; Adeoque, sibi sic permissum non movebitur.

Fig. 87. **N**Am, stante recta, ut X S, ad Horizontem perpendiculari (adeoque ipsius punctis omnibus eodem situ manentibus,) quodcumque, extra hanc, punctum moveatur, ut A, peripheriam describer, ut A a, circa X S ut Axem (per præced.) adeoque in Horizontali plano: (Cum enim X S perpendicularis sit, tum ad planum circuli, utpote cujus Axis est; tum ad Horizontem, ex hypothese; erit circuli planum illud Horizontale; per 14 El. 11.) In quo quidem plano cum nullus sit Descensus, aut Præponderatio; nec fiet, ob gravitatem, motus. (per 4, 9, 23, cap. 2.) Cumque de omnibus gravis punctis perinde constet, constat de Gravi toto; Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

S C H O L I U M.

RECTÂ verò sustineri dicetur Grave, si duobus saltem ipsius punctis sustineatur; quippe sic tota recta eodem situ retinebitur; ut ad prop. præced. ostensum est.

P R O P. III.

Si Grave rectâ quâvis, ut motûs Axe, non ad Horizontem perpendiculari, sustineatur; sitque in Plano per Axem Motûs incedente constitutum, ad Horizontem recto; (quod, *Perpendiculare planum per Axem*, dicimus;) in neutram partem præponderabit; Adeoque sibi sic permissum, non movebitur.

Sin extra illud Planum constitutum sit; ad Planum illud, infra motûs Axem feretur.

Per XS motûs Axem (vel Horizonti parallelum, vel utcumque obli-
liquum) incedat Planum Horizonti rectum XSA, in quo intelligatur constitutum Grave. Erit quodcunque Gravis punctum vel in ipso
Axe, ut M; vel infra, ut B; vel supra Axem, ut A. Fig. 88. 89.

De puncto M, manifestum est, stante XS, ipsum M item stare; utpote quod est in ipsâ XS rectâ.

De B, constat; Cum enim (per 1 hujus) non possit B moveri, stante XS, quin peripheriam rotando describat, ut BNA; ad cujus planum rectus est XS Axis; Cujus quidem Peripheriæ punctum infimum est ipsum B (per 20 Cap. 2.) Inde non movebitur sponte suâ: Quippe Grave (per def. Gravitatis) non nisi Descensus Ergo, gravitate suâ movebitur.

Idem denique, de A constat: Quippe cum non possit A moveri (per 1 hujus) nisi peripheriam, ut ANB, circa XS ut axem describendo; cujus (per 20 Cap. 2.) tum supremum punctum est ipsum A, tum Descensus utrinque pariter Declivis; in neutram partem feretur. per 8, 17 Cap. 2.

Cûmque hoc constet de singulis Gravis punctis, sive infra, sive supra,
Q₂

sive in ipso Axe; constat de Gravi toto, sic constituto, in neutram partem præponderare; adeoque nec motum iri. Quod erat propositum.

Sin extra hoc planum constitutum sit Grave: ipsius puncta singula, quæ extra planum sunt, ut N; intermedia erunt, in suis respectivè peripheriis, inter punctum supremum, ut A, & infimum ut B (per 20 Cap. 2.) adeoque deorsum ad B feretur, per 2, 8, Cap. 2. Quod erat ultimo demonstrandum.

PROP. IV.

Si circa rectam quamvis, ut Axem, (sive Horizontalem, sive utcumque obliquum,) rotetur Grave; eâ ratione ponderant ipsius puncta singula æqualiter gravata (aut illis applicata pondera æqualia) quâ distant à Perpendiculari per Axem Plano.

Adeoque: Si inæqualiter gravata; in ratione ex Ponderum (sive Gravaminum) & Distantiarum rationibus compositâ.

Fig. 90. **S**It primum Axis XS, in plano Horizontali; atque in eodem Horizontali plano puncta quotlibet A, B, E. Unde ducantur ad Axem normales AC, BX, ES: (quæ itaque, per def. 4 El. 3. plano per Axem perpendiculari normales sunt, punctorum ab eo Plano distantiam mensurantes.) Cùmque, per 1 hujus; non possint alias A, B, E, puncta, quam rotando ferri; (circularum peripherias Centris C, X, S, describendo; & quidem, propter situm Axis Horizontalem, ad Horizontem rectorum;) Erunt AC, BX, ES, totidem Libræ, circa sua respectivè Centra C, X, S, rotatæ: Adeoque, per 12, 13, Cap. 3. A, B, E, puncta, in eodem plano horizontali posita, æqualiter gravata, ponderant in ratione distantiarum, AC, BX, CS: Inæqualiter verò gravata; in eâ quæ ex harum, & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propositum.

Deinde; Manente Axe XS, in situ Horizontali; (quò plana circularum rotatione factorum, sint adhuc ad Horizontem recta:) Sint, extra planum Horizontale, puncta Gravis quotlibet, α, β, ϵ : (sive in eodem

eodem, five diversis Planis, perinde est: Unde, ad Planum Horizontale ducantur perpendiculares; puta αA , βB , ϵE . Intelligatur autem, per ipsum Axem XS , erigi Planum ad Horizontem perpendiculare; atque ad hoc perpendiculares rectæ, αx , $\beta \xi$, $\epsilon \sigma$; vel his æquales (utpote parallelæ parallelis terminatæ) $\tilde{A}C$, BX , ES . Ostendetur (ex prop. 18. cap. 2. vel 4, 13 cap. 3.) tantundem ponderare eadem pondera in α , β , ϵ , atque in A , B , E . Hoc est; (per jam demonstrata) in ratione distantiarum $\tilde{A}C$, BX , ES , vel αx , $\beta \xi$, $\epsilon \sigma$, si Puncta sint æqualiter gravata; vel, si inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propositum.

Denique: Sit situs Axis ad Horizontem utcumque obliquus: Reliquaque, ut prius, constructa. Nempe, in eodem $XSA BE$ plano Inclinationis, rectæ $\tilde{A}C$, BX , ES , Axii ad angulos rectos; in quas scilicet cadunt, à punctis α , β , ϵ , æmissæ Perpendiculares ad idem Planum, αA , βB , ϵE . Similiter omnino procedet demonstratio, nisi quod Circuli rotatione descripti, qui prius erant ad Horizontem recti, nunc fiant obliqui; adeoque propter planorum Obliquitatem, minuuntur Ponderum Momenta. Est autem, propter eundem omnium axem, eadem circularum omnium Obliquitas; Adeoque in eadem ratione minuuntur Ponderum Momenta, per 26 Cap. 1. Quam itaque rationem inter se haberent Momenta Ponderum in A , B , E , α , β , ϵ in erectis circulis; eandem & hic habebunt in circulis æqualiter inclinatiss (per 5 cap. 1.) Hoc est (per jam demonstrata) in ratione distantiarum à Perpendiculari per Axem Plano, ponderabunt, si sint æqualiter gravata; vel, si inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum, rationibus componitur. Quod erat ultimò demonstrandum.

Brevi Summa Demonstrationis huc redit. Cum quæ ad prop. 12 & 13 cap. præced. Ponderationum Rationes traduntur, in hanc universalem propositionem conspirent, *Æqualia Pondera, circa axes æqualiter inclinos, ponderare in ratione distantiarum à plano per Axem Perpendiculari; Et, Inæqualia, proportionaliter*: (Quæcumque sit vel Axis, vel Libræ ad Horizontem positio; & si per Centrum Motûs transeat Libra, siue secus; item, siue sint ad eandem vel diversas Libras, siue in eodem vel diversis Planis librentur:) Constat propositum, de quocumque Axis situ, non ad Horizontem recto; & de quocumque Punctorum ad Axem situ. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIA.

SCHOLIUM.

DE Situ vero Axis ad Horizontem recto, non agit hæc Propositio; (ut neque sequentium aliquot:) Quoniam, hoc casu (propter rotationum circulos Horizonti parallelos) nulla erit cujusvis puncti, utcumque gravati, ad motum circa axem propensio, seu Ponderatio: ut dictum est, Prop. 2. hujus.

PROP. V.

Si Perpendiculare Planum, per motus Axem, incedens; secet Grave in partes invicem æquiponderantes: (Hoc est; Si Perpendiculare Planum per Axem sit Planum Æquilibrii:) Non movebitur, sibi sic permissum, Grave.

Sin Segmentorum alterum, reliquo præponderet; (dummodo non sit Axis motus, ad Horizontem perpendicularis:) Eà feretur; eatenus donec fiat Æquilibrium. Et simul utraque æquipollent excessui præpollentis.

Adeoque; Non erunt, ejusdem gravis (aut Aggregati gravium) duo Æquilibrii Plana invicem parallela.

Fig. 92.

DE Axe motus ad Horizontem recto; constat propositum; ex 2 hujus.

De Axe motus non ad horizontem recto; sic demonstratur.

Si perpendiculare planum per XS motus axem, dividat Grave in segmenta A, B: horum utraque (gravia cum sint, & extra perpendiculare planum posita) hac illac Descensum molientur (per 3 hujus;) Et quidem utrumque (propter rotationem circa XS axem, per 1 hujus) cum Ascensu contrarii; adeoque contraponderabunt: Si itaque æquiponderant: contrarii conatus æquales, se mutuo sustinebunt; nec fiet motus. Si alterum præponderet: hoc reliquum superabit; adeoque motus horsum fiet, donec Æquilibrio impediatur (per 12 cap. 1.) Duoque simul conatus contrarii: æquipollebunt excessui præpollentis. (per 8 cap. 1.) Quæ demonstranda erant.

Atque

Atque hinc sequitur: (Quod etiam ante demonstratum est, ad prop. Fig. 93. 20. cap. præced.) Non dari, ejusdem gravis (aut aggregati gravium) duo parallela Plana Æquilibrii. Nam si Planum per XS sit Planum Æquilibrii; huic Parallelum, puta per YT , non erit. Nam (positis utrisque ad horizontem perpendicularibus) si segmenta XSA , XSB , æquiponderant; segmenta YTA , YTB , non æquiponderabunt. Nam $XSTY$ intersegmentum, æquiponderantium uni ablatum, alteri additum, momenta faciet inæqualia; per 9 cap. 1. Saltem, si intersegmentum illud nullum sit (sed quasi vacuum, inter duo connexa Gravia interjectum;) fiet utcumque segmentorum alterum, ut XSB , longius ab YT quam ab XS ; propius autem alterum YTA : Adeoque illius momentum augebitur, hujus minuetur (per 13 cap. 3) & destruetur Æquilibrium, per 9 cap. 1.

SCHOLIUM

Plana Perpendicularia, *Parallela*, hic appello (& subinde alias, ubi eadem ratio) quando Horizontales Rectæ unius, sunt alterius Rectis Horizontalibus, parallelæ. Quamquam enim, perpendicularia cum sint Plana, in Terræ centro coeant; eadem tamen ratione (ne longâ periphrasi opus sit) Parallela Plana dicentur, quæ Perpendicularia (propter immensam Centri terræ distantiam) pro Parallelis Rectis haberi solent.

PROP. VI.

Si rectâ quâpiam, ut Axe, non ad Horizontem perpendiculari, sustentum Grave, quiescet: Idem Grave, eodem situ constitutum, aliâ quâvis ejusdem ad Horizontem perpendicularis Plani rectâ sustentum, pariter quiescet. Rectâ verò extra hoc Planum, plano Parallelâ (non ad Horizontem rectâ) si ut Axe sustineatur: non, eo situ constitutum, quiescet.

Putâ: Si AB Grave, Axe XS (non ad Horizontem rectâ) Fig. 94. sustentum, quiescet: Perpendiculare Planum per hunc incedens, ut $YXST$, grave dirimet in A , B , segmenta, invicem æquiponderantia: (Nam

(Nam si alterutrum præponderaret, non quiesceret Grave; per præced.) Sumptâ igitur aliâ quâvis in eodem Plano rectâ, ut YT : quum per hanc incedens Planum $YXST$ (ut jam ostensum est) secet Grave in partes invicem æquiponderantes: Axe YT sustentum, sic constitutum Grave, quiescet. per præced.

Sin aliâ quâvis, extra hoc Planum, rectâ (quæ Plano parallela sit, & non ad Horizontem recta) ut Axe, sustineatur: non, eo situ, quiescet. Quippe, si quiesceret hac aliâ rectâ sustentum; esset, per hanc incedens perpendiculare Planum, Planum Æquilibrii; (nam, nisi æquiponderarent segmenta, non quiesceret; per præced.) Estque plano priori parallelum; (quod, propter parallelam plano per quam incedit rectam, non ad horizontem perpendicularem; & quæra supponimus, Perpendicularorum parallelismum; probabitur ex 15 El. 11.) Adeoque, duo essent parallela Plana Æquilibrii. Quod(per præced.) fieri non potest.

PROP. VII.

Si Æquilibrii Axe sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, quiescet.

Et contra; Si Axe motûs sustentum Grave, quocunque situ ponatur quiescet: Axis ille motûs, est Axis Æquilibrii.

NAm; Si Æquilibrii Axe sustineatur Grave; quocunque situ ponatur Grave; (nempe; quocunque ad Horizontem situ ponatur Axis ille; & quocunque Planum per hunc motûs Axem, constituatur ad Horizontem rectum:) Perpendiculare Planum per Axem, Planum erit æquilibrii: (per def. Axis Æquilibrii.) Adeoque non movebitur, sibi sic permissum Grave; per 5 hujus.

Conversa similiter patet. Nam, nisi motûs Axis ille, sit Axis Æquilibrii; erit saltem aliquod Planum per hunc incedens, quod Planum Æquilibrii non erit (per def. Axis Æquilibrii.) Adeoque, posito hoc Axe non in situ ad Horizontem recto; positoque illo non Æquilibrii Plano, in situ perpendiculari; Movebitur Grave: per 5 hujus. Quod est contra hypothefin.

PROP.

PROP. VIII.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: quocunque situ ponatur; saltem unum per punctum illud incedens Perpendicularare planum, est planum *Æquilibrium*. Adeoque; Per omne Gravis Punctum incedit aliquod *Æquilibrium* Planum.

Sit $\angle ASB$ Grave; puncto sui M sustentum; per quod transeat Fig. 88. Perpendicularum AMB ; perque hoc incedat $AMBN$ perpendicularare Planum. Erit hoc $AMBN$, vel Planum *Æquilibrium* (adeoque habetur quod erat probandum;) vel segmentum alterum, puta $ABNS$, præponderabit. Quo casu; Planum $AMBN$ (cujus faciem alteram, puta quæ S respicit, Anteriorem dicemus; alteram, Posteriolem;) intelligatur, immoto Gravi, imaginatione converti circa AMB axem; donec eo perveniatur ut quæ utrinque sunt segmenta Gravis *Æquipo*nderent. Hoc enim omnino fore certum est: Quippe, factâ semi-conversione, quod erat ab anteriore conversi Plani facie, a posteriore relinquetur, segmentum Gravis præponderans; & contra: Cumque à præponderantiâ anticâ ad posticam sic continuo motu perventum sit; eo momento quo ab hac ad illam transibatur, neutra erat; sed, æquipo

nderantia. Quodque cum converso Plano, hoc situ posito, coincidit immotum, per Grave, Planum; est Perpendicularare Planum *Æquilibrium*.

Unde & constat Corollarium. Quippe quovis sui puncto sustentum intelligi possit Grave.

R

PROP.

PROP. IX.

Si unico sui puncto sustineatur Grave : Per illud incedens Perpendiculare Planum *Æquilibrii*, manebit Horizonti rectum.

Ideoq; vel quiescet grave ; (nempe si perpendiculum per centrum motus, seu punctum illud quo sustinetur grave, sit Perpendiculum *Æquilibrii* istius Plani sic gravati.)

Vel (si perpendiculum illud non sit Perpendiculum *Æquilibrii* istius plani) rotabitur circa Horizontalem Axem, Plano illi rectum, per centrum motus seu punctum illud quo sustinetur Grave transeuntem ; donec ad *Æquilibrium* redigatur.

Sin Planum aliquod Perpendiculare, non sit Planum *Æquilibrii* : Segmentum præponderans descendet (adeoque obliquabitur Planum ;) donec ad *Æquilibrium* redigatur.

Unde ; Si duo quævis per idem punctum plana perpendicularia sint Plana *Æquilibrii* : etiam reliqua sic erunt ; eritque Perpendiculum per illud Punctum, Axis *Æquilibrii*.

Fig. 88. **P**er punctum M, quo sustineri intelligatur Grave, transeat tum XS recta Horizontalis, quæ pro onusta Libra habeatur, tum huic ad angulos rectos AMBN Perpendiculare planum per Axem, Grave dirimens in duo segmenta AMBX, AMBS ; quibus respective onerantur MX, MS, libræ brachia, per 13 cap. 3.

Cumque (per præced.) ex Perpendicularibus per M planis, saltem unum aliquod sit Planum *Æquilibrii* : Intelligatur, primo, illud AMBN planum *Æquilibrii*, adeoque (per def. Plani *Æquilibrii*) AMBX, AMBS, segmenta invicem *Æquiponderantia*. Erit igitur M (per def. 13. cap. 3.) centrum *Æquilibrii*. Quo cum (ex hypothesis) sustineatur Libra, in neutram partem movebitur, per 7 vel 10 cap.

cap. 3. Adeoque nec obliquabitur $AMBN$, sed manebit (ut prius) Horizonti rectum. Quod erat primum demonstrandum.

Adeoque, vel non movebitur Grave, vel circa manentem XM S axem rotabitur, per 1. hujus. Illud quidem, si AMB sit Perpendiculum $\mathcal{A}q$ uilibrii istius plani $AMBN$ sic gravati (sive $AMSBX$ perpendiculare planum $\mathcal{A}q$ uilibrii per axem XS ;) Hoc, si secus (puta si segmentum alterum, ut $AMBN$ praeponderet;) per 5 hujus. Quae itidem erant demonstranda.

Sin $AMBN$ perpendiculare planum aliquod per M , non sit planum $\mathcal{A}q$ uilibrii; hoc est, si segmentum alterum praeponderet, puta AMS , quo gravatur MS Brachium: Descendet hoc (adeoque obliquabitur $AMBN$ planum) donec ad $\mathcal{A}q$ uilibrium redigatur (per 5 hujus, vel 5 cap. 3.) Quod erat item demonstrandum.

Si itaque duo Plana per idem M punctum Perpendicularia, ut $AMBN$, $AMSBX$, sint utraque $\mathcal{A}q$ uilibria Plana, etiam reliqua per illud punctum perpendicularia plana erunt item plana $\mathcal{A}q$ uilibrii (adeoque AMB , axis $\mathcal{A}q$ uilibrii.) Cum enim propter $\mathcal{A}q$ uilibrii Planum $AMBN$, non moveatur grave nisi rotando circa illius plani axem; & simili de causa, non nisi circa axem plani $AMSBX$; (qui quidem Axes, cum suis respective planis perpendiculares esse debeant, non erunt eadem recta;) non omnino movebitur grave (propter tria saltem, non in eadem recta, puncta permanentia) per 1. hujus. Sed (per praecedens membrum hujus) si quod sit ex perpendicularibus planum, quod non sit planum $\mathcal{A}q$ uilibrii, movendum esset Grave: Nul- lum igitur est. Quod ultimo erat demonstrandum.

PROP. X.

Si Perpendiculum per Centrum motus, sit Axis $\mathcal{A}q$ uilibrii; sibi permissum Grave, non movebitur. Rectaque illa, quae si sit Perpendiculum per Centrum motus, Grave non movebitur; est Axis $\mathcal{A}q$ uilibrii.

Cum enim (per def. Axis $\mathcal{A}q$ uilibrii) quodvis per illum transiens Planum, sit Planum $\mathcal{A}q$ uilibrii: Si Axis $\mathcal{A}q$ uilibrii sit in Perpendiculo per Centrum motus; quodvis per centrum motus incedens

R 2

Per-

Perpendiculare Planum, est Planum Æquilibrii. Adeoque sponte sua non movebitur sic sustentum Grave; per præced.

Et Conversa similiter patet. Nam nisi Perpendicularum per Centrum motus, sit Axis Æquilibrii; aliquod saltem per illud incedens Planum, non erit Planum Æquilibrii per def. Axis Æquilibrii: Adeoque Grave movebitur; (per præcedentem.) Quod est contra Hypothesin.

PROP. XI.

In quovis Æquilibrii Plano, per quodvis ipsius Punctum, incedit Axis aliquis Æquilibrii.
Adeoque, per omne Gravis punctum incedit aliquis Axis Æquilibrii.

Fig. 88. **E**xpositum Æquilibrii Planum, ut $AMBN$, intelligatur in situ ad Horizontem recto constitutum. Ejusque puncto quovis, ut M , sustineatur Grave. Quod itaque (per 9 hujus) non nisi rotando circa Axem plano illi rectum, ut XMS , movebitur. Et Perpendicularum per Centrum motus, ut AB , erit vel perpendiculum Æquilibrii istius Plani sic gravati: Vel, eatenus circa XMS rotabitur grave, donec hoc contingat; & sic positum, sibi permissum Grave quiescet. per eandem 9 hujus. Eaque Gravis recta, qua, sic quiescente Gravi, in AMB perpendiculo per M transeunte jacebit, est Axis Æquilibrii. per præced.

Corollarium constat: Cum (per 8 hujus) per quodvis Punctum transeat Planum Æquilibrii.

PROP.

PROP. XII.

Si à puncto fixo libere dependens Grave, unico sui puncto, ut Centro motus sustineatur: Non prius quiescet quam illud sui punctum sit in eodem perpendiculo cum puncto fixo; Planumque quodvis per illud perpendiculum incedens, grave dirimat in partes invicem æquiponderantes.

In eo verò situ constitutum (nempe, cum Perpendiculum appensionis, est Axis Æquilibrii;) sibi sic permissum, quiescet.

Si verò, posito Gravi in hoc situ quietis; solvi intelligatur in gravi vinculum, illudque alio jam sui puncto sustineri; Sitque hoc aliud punctum in eodem quo prius Axe Æquilibrii; quiescet adhuc sic situm Grave.

Sin extra illum Æquilibrii Axem sit hoc aliud Punctum; non, eo situ, quiescet.

Adeoque; Non erunt, ejusdem Gravis, duo Æquilibrii Axes invicem paralleli.

A puncto F libere dependens, puncto sui X sustineatur A X B Fig. 95. Grave. Non prius inquam, quiescet, quam ipsum X punctum sit in F X perpendiculo: quod & ibi positum, consistet. Cum enim unico X puncto sustineatur Grave (quod itaque punctum totius ostendere gravatur per 18 Cap. 2.) si extra perpendiculum sit, eo feretur: ibique constitutum, consistet X punctum sic gravatum. per 21 Cap. 2.

Sin, posito X puncto in perpendiculo F X, per quod incedet Planum aliquod Perpendiculare, dirimens expositum Grave in A, B, duo segmenta inæqualiter ponderantia: nondum quiescet Grave. per 9 hujus.

Si vero ita constitutum sit, ut, Planorum perpendicularium per F X incedentium, nullum non dividat grave in partes invicem Equiponderantes; Hoc est, si Perpendiculum illud sit Axis Æquilibrii: non movebitur sic appensum Grave. per 9 hujus.

Dico

Dico porro; Si (posito Gravi in hoc statu quietis) soluto vinculo in X, alio ejusdem perpendiculari puncto ut C, sustineatur Grave: Quiescet adhuc in eodem situ positum. Cum enim, ex constructione, idem sit perpendicularum FX & FC, sitque FX Axis Æquilibrii; erit & FC Axis Æquilibrii. Adeoque (per 1^o hujus) quiescet Grave.

Sin alio, extra hanc rectam puncto ut Y, sustineatur; puta perpendicularo GY (priori parallelo; saltem nonnisi in Centro Terræ occurrente, quod pro parallelo jam habemus;) non eo situ quiescet. Intelligatur enim planum quodvis Perpendiculare (aliud quam GYXF) per GY incedens, Grave dirimens in segmenta YTA, YTB; & huic plano parallelum, per FX incedens, Grave dirimens in segmenta XSA, XSB. Cumque sit ex hypothesi, illud per FX (Æquilibrii Axem) Planum Æquilibrii; non erit huic parallelum per GY, Planum Æquilibrii (per 3 hujus:). Adeoque nec GY, Axis Æquilibrii; (per def. Axis Æquilibrii:). Nec hujus, in perpendicularo manentis, uno puncto sustentum, Grave quiescet, per 1^o hujus. Non igitur alio, extra hunc FXS Æquilibrii Axem, puncto sustentum; eodem situ constitutum quiescet. Nec erit alius Axis Æquilibrii, expolito FS parallelus. Quæ demonstranda erant.

PROP. XIII.

Si Centro Gravitatis sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, non movebitur. Punctumque illud, quo si sustineatur, Grave non movebitur quocunque situ positum; est Centrum Gravitatis.

Cum enim (per def. Centri Gravitatis) quævis per illud transiens Recta, sit Axis Æquilibrii: Si sui Centro Gravitatis sustineatur Grave, quocunque situ ponatur, perpendicularum per Centrum illud motus, erit Axis Æquilibrii. Adeoque non movebitur sic sustentum Grave, per 1^o hujus.

Et conversa similiter patet. Nam, nisi Punctum illud, quo, ut Centro Motus, sustinetur, sit Centrum Gravitatis; aliqua saltem per illud incedens recta, non erit Axis Æquilibrii (per def. Centri Gravitatis.) Adeoque, posita hac recta ad Horizontem perpendiculari, non quiescet unico illo puncto sustentum Grave. per 1^o hujus. Quod est contra hypothesin.

PROP.

PROP. XIV.

In *Æquilibrii* Axe quovis ; est Centrum Gravitatis. Nempe ; illius Axis, ut *Libræ* considerati, Centrum *Æquilibrii*.

Cum *Æquilibrii* Axe, ut *XS*, sustentum Grave, quocunque situ Fig. 96. positum, quiescet (per 7 hujus ;) Adeoque totum Gravis onus sustineat Axis ille (per 18 Cap. 2. vel 2, 4, 18, Cap. 3.) Intelligatur *XS* recta, sic onusta, secundum *Libræ* longitudinem applicari ; vel ipsa etiam, pro *Libra* censeatur. Hujusque sic onustæ *Libræ*, quaratur (per 20 Cap. 3.) Centrum *Æquilibrii*. Quod sit *C*. Dico *C*, Centrum Gravitatis esse, totius Gravis.

Cum enim idem *C* punctum, in quocunque Gravis situ, sit illius (sive Axis sive *Libræ*) *XS*, Centrum *Æquilibrii* ; (quod statim demonstrabitur :) Manente puncto *C*, non movebitur *XS* recta. per 7 Cap. 3. Si itaque *C* puncto, ut Centro Motus, sustineatur Grave : Neque circa manentem rectam *XS* (utpote quæ est Axis *Æquilibrii*) rotabitur ; Neque (propter *C*, centrum *Æquilibrii*) movebitur Axis ille : (quæ jam ostensa sunt :) Nec potest alias moveri Grave ; (per 1 hujus.) Adeoque, puncto *C* sustentum, sponte sua non movebitur, quocunque situ constitutum Grave. Estque propterea, Punctum *C*, Centrum Gravitatis ; (per præced.) Quod erat demonstrandum.

Quod autem idem *C* punctum, sit, ejusdem axis *Æquilibrii* *XS*, Centrum *Æquilibrii*, quocunque situ constituatur Grave : Sic ostenditur.

Sit primum, ita utcunque constitutum Grave, ut expositus *æquilibrii* Axis *XS*, sit in situ Horizontali constitutus. Per ipsius, ut onustæ *libræ*, Centrum *Æquilibrii* *C*, transeat Axis *libræ* ; qui itaque ad *libram* *XS* normalis erit ; & quidem in situ Horizontali ; (cum enim intelligatur *XS* *libra* unico sui puncto *C*, ut centro motus, sustineri, adeoque ad nullam axis positionem aliter quam gravitate sua determinari, *libra* bitur in plano ad Horizontem recto, utpote omnium maxime declivi ; adeoque circa axem Horizontalem ; ut in Scholio Prop. 12. Cap. 3. dictum est :) atque per hunc axem perpendiculare Planum *ACB* ; quod

quod itaque (propter C centrum æquilibrii, ex constructione) est æquilibrii Planum perpendiculare per axem motus, grave dirimens in duo segmenta ABX , ABS , invicem æquiponderantia. Atque hoc eo usque saltem permanebit, utcumque moveatur grave, dum idem gravis planum XAS Horizontale maneat (puta, vel rotato utcumque circa Perpendicularum per C Gravi, vel etiam altius humiliusve elevato aut depresso:) per 13 Cap. 3. Quippe eadem adhuc manebit omnium tum ad Horizontem inclinatio, tum ab ACB perpendiculari per axem plano distantia.

Deinde; Manente ut prius, XS axe utcumque in situ Horizontali: intelligatur utcumque circa illum rotari Grave, in quemcumque situm ad axem (nempe ut quolibet planorum, per XCS transeuntium, perpendiculare fiat:) Dico, etiamnum idem ACB planum, planum esse æquilibrii; adeoque C , ut prius, æquilibrii Centrum. Cum enim omnia utriusque segmenti puncta, in planis ipsi ACB parallelis rotentur; Manebunt adhuc in eadem quâ prius ab ACB , perpendiculari per axem motus, distantia: Adeoque in eadem quâ prius ratione ponderabunt; per 4 hujus, vel 13 Cap. 3. Cum itaque prius, respectu ACB plani, æquiponderabant segmenta ABX , ABS ; etiamnum æquiponderabunt. Eritque propterea, C , ut prius Centrum æquilibrii.

Denique; Quocumque Planorum per XS transeuntium, manente ad horizontem recto; Intelligatur XS libra utcumque ad Horizontem inclinari: Dico etiamnum idem C punctum, esse libræ XS centrum Æquilibrii.

Fig. 97. Ne autem, propter Solidi in Plano representationem, linearum multitudo ducendarum, turbet phantasiam; eâ projectione in figurâ utor, quæ oculum supponit in ipso motus axe per C transeunte, atque in distantia infinitâ. Et propterea, tum axis ille in unicum C punctum projicitur; tum Rectæ quævis huic parallelæ, in totidem respectivè puncta: Planæque per axem omnia, in totidem rectas; in ipso $XACS$ per libram Plano perpendiculari. Quæ quidem Projectio, ut Phantasiam juvat, ita nec Rationes perturbat: Quoniam (per cas. 4. prop. 14. cap. 3.) perinde omnino ponderat (respectu C axis) quocumque ejusdem rectæ (puta per D transeuntis) axi parallelæ, puncto intelligatur grave. Eadem utique est singulorum ejusdem punctorum ab ACB perpendiculari per axem Plano distantia, atque ipsius D ab ACB perpendiculo.

Intelligatur itaque, utcumque circa C rotato Gravi, XCS Libra (& simul Planum libræ per axem) ex situ Horizontali in situm $\propto C \Sigma$, utcumque

utcumque ad Horizontem inclinatum delata: Cui respondeat, in eo Fig. 97.
dem Perpendiculari plano, in situ Horizontali, XCS ; hujusque punctis D, E, F , &c. puncta illius d, e, f , &c. Intelligatur autem Gravitatum totum, ex partibus (æqualibus an inæqualibus, pluribus an paucioribus, adeoque numero finitis an infinitis, perinde est) puta tribus L, M, N , constare; (& quidem, vel in ipsis perpendicularis plani punctis L, M, N ; vel in L, M, N , rectis, axi parallelis; utcumque positis, dummodo sit XCS axis æquilibrii;) ad libræ puncta, in situ horizontali posita, D, E, F , applicatis; ut quæ (per 1. cap. 3. & cas. 4. prop. 4. ejusdem) similiter ponderent ac si in ipsis D, E, F , punctis intelligantur. Delatâ vero librâ XCS , in $\Sigma C \Sigma$; delata simul erunt (propter rotationem totius gravis) D, E, F, L, M, N , puncta ponderaque, in d, e, f, l, m, n . Erit, inquam, adhuc ACB perpendiculare planum æquilibrii per axem; adeoque C centrum æquilibrii.

Nam, translatis D, E, F , punctis, in d, e, f , minuentur quidem horum (propter obliquationem libræ) ponderationes (per 1.3 cap. 3.) Sed in eadem ratione minuentur; adeoque, quod prius erat æquilibrium etiamnum manebit (per cas. 1. prop. 14. cap. 3.) si ad eadem quæ prius libræ puncta D, E, F , hoc est d, e, f , applicata maneant pondera L, M, N , hoc est l, m, n .

Cum autem; pro ponderum l, m, n , infra suprà librâ fixâ positione; motâ librâ mutantur applicationum puncta, puta, ex d, e, f , in δ, ϵ, ϕ ; adeoque mutantur ponderationum ratio; (per cas. 3. prop. 14. cap. 3.) Ponderum l, m , quæ supra librâ fixâ intelliguntur, ponderationibus sinistrorsum auferendum aliquid; addendum vero ponderationi sinistrorsum ponderis n infra librâ fixâ; (nempe, prout in præfenti schémate ponuntur; & similiter, mutatis mutandis, in quâcumque sive obliquationis libræ, sive ponderum ad obliquatam librâ positione.) Sunt autem Addenda illa vel Auferenda (per 17 cap. 3.) in eâ ratione quæ componitur ex ratione Ponderum l, m, n ; & ratione rectarum $d\delta, e\epsilon, f\phi$, hoc est (propter similia triangula $l\delta\delta, m\epsilon\epsilon, n\phi\phi$) rectarum $d\delta, e\epsilon, f\phi$: Adeoque in eâ ratione quâ ponderarent eadem Pondera circa axem $\Sigma C \Sigma$ libranda; per 13 cap. 3. Adeoque (per 12 El. 5.) in eadem ratione est summa Auferendorum ponderationibus l, m ; ad Addendum Ponderationi n (vel summam addendorum, si plura essent;) quâ esset ponderum l, m , circa axem $\Sigma C \Sigma$ ponderatio; ad ponderationes ponderis n , circa eundem axem. Adeoque cum sint Ponderationes hæ (propter XCS vel $\Sigma C \Sigma$ axem æquilibrii, ex hypothesi) invicem æquales; etiam Addenda Auferendis sunt æqualia: adeoque perinde simul valent, atque si nihil vel adderetur vel auferretur,

S

per

per 8 cap. 1. (Quodque de Auferendis Addendive ponderationi sinistrorsum dictum est, perinde est atque si de Addendis Auferendive ponderationi dextrorsum diceretur: quippe idem valet, plus ad dextram, atque, minus ad sinistram.) Cum itaque; applicatis ponderibus l, m, n , ad puncta d, e, f , esset ACB planum Æquilibrii per axem, ut supra ostensum est, (adeoque simul omnium ponderatio, nulli in utramvis partem æquipolleret;) & Centrum Æquilibrii: Erit similiter, idem C , centrum æquilibrii, ponderibus ut nunc applicatis ad puncta d, e, f .

Est igitur idem C punctum, æquilibrii Centrum, axis æquilibrii XCS , quocunque situ constituatur Grave. Quod demonstrandum suscepimus.

SCHOLIUM.

$$\begin{array}{r} P \quad 3P \quad 3P \\ +6D \quad +D \quad -3D \\ \hline +6DP + 3DP - 9DP = \pm 0DP. \\ +6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP. \end{array}$$

ponderatio respectu axis C ; ut $P \times +6D = +6DP$. $3P \times +D = +3DP$. $3P \times -3D = -9DP$. Adeoque simul omnium, ut $+6DP + 3DP - 9DP = \pm 0DP$. (Atque hoc, ex constructione, ponitur enim C , centrum Æquilibrii.)

Et similiter (diminutis in eadem ratione omnium ponderationibus, propter obliquationem libræ, puta in ratione d ad D) eorundem ponderum ad libræ $\propto C$ puncta d, e, f , applicandorum ponderationes, erunt ut $+6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP$.

$$\begin{array}{r} P \quad 3P \quad 3P \\ +6D \quad +3D \quad -5D \\ \hline +6DP + 9DP - 15DP = \pm 0DP. \\ +6dP + 9dP - 15dP = \pm 0dP. \end{array}$$

$+6d, +3d, +5d$. Adeoque eorundem Ponderationes ad axem XCS , vel $\propto C$; ut $+6DP + 9DP - 15DP = \pm 0DP$: (Idque, ex hypothesi, supponitur enim XCS , axis æquilibrii.)

Atque (his proportionales) ponderationes auferendæ $+6dP + 9dP - 15dP = \pm 0dP$.

Exempli gratiâ. Si intelligantur pondera $L = 1P, M = 3P, N = 3P$. Distantia verò $CD = +6D, CE = +1D, CF = -3D$. Erit Ponderum ad libræ XCS puncta D, E, F , applicatorum

ponderum L, M, N ad libræ XCS puncta d, e, f , applicandorum ponderationes, erunt ut $+6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP$.

Eorundem verò Ponderum à Plano per Axem XCS vel $\propto C$ distantia; puta rectæ DL, EM, FN ; vel d, e, f ; sint ut $+6D, +3D, -5D$; Et his proportionales (puta in ratione d ad D) d, e, f ; ut

$+6d, +3d, +5d$. Adeoque eorundem Ponderationes ad axem XCS , vel $\propto C$; ut $+6DP + 9DP - 15DP = \pm 0DP$: (Idque, ex hypothesi, supponitur enim XCS , axis æquilibrii.)

Atque (his proportionales) ponderationes auferendæ $+6dP + 9dP - 15dP = \pm 0dP$.

His

His itaque ritè subductis (additive respectivè) à ponderationibus prius positis, tanquam in d, e, f , punctis; prodibit \mathcal{A} equilibrium, siue $\pm 0 dP \mp 0 dP = \pm 00$.

Verbi gratià; Si ponamus d ad d , ut 3 ad 1; vel, ut 1 ad $\frac{1}{3}$; Ex $+6dP + 3dP - 9dP$, subductis $+6dP + 9dP - 15dP$, hoc est, $+2dP + 3dP - 5dP$; manebunt $+4dP \pm 0dP - 4dP = \pm 0dP$.

$$\begin{array}{r} +6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP \\ -2dP - 3dP + 5dP = \pm 0dP \\ +4dP \pm 0dP - 4dP = \pm 0dP \end{array}$$

Si ponamus d ad d , ut 3 ad 2, vel, ut 1 ad $\frac{2}{3}$; Ex $+6dP + 3dP - 9dP$, subductis $+6dP + 9dP - 15dP$, hoc est, $+4dP + 6dP - 10dP$; manebunt $+2dP - 3dP + 1dP = \pm 0dP$.

$$\begin{array}{r} +6dP + 3dP - 9dP \\ -4dP - 6dP + 10dP \\ +2dP - 3dP + 1dP = \pm 0dP \end{array}$$

Adeoque; Utut ea Portio quæ dextrorsum ponderabat prius vel sinistrorsum; motà librâ, vel in neutram partem, vel in oppositam ponderet: non tamen destruitur, simul-omnium \mathcal{A} equilibrium.

PROP. XV.

Cujusque Gravis, Centrum Gravitatis unicum est: Idque tum in omnium Axium \mathcal{A} equilibrîi, tum in Planorum \mathcal{A} equilibrîi omnium concursu.

Estque omne per illud transiens Planum, Planum \mathcal{A} equilibrîi; omnisque recta transiens, \mathcal{A} equilibrîi Axis.

Intelligatur $\mathcal{A}B$ Grave, puncto sui X sustentum, ex F puncto fixo Fig. 98.

Libere dependens, in situ quietis positum; Hoc est, ita dependens ut FXS perpendiculum, sit Axis \mathcal{A} equilibrîi; (per 12 hujus.) In quo itaque perpendiculo (per præced.) Est Centrum Gravitatis; Alio autem, extra hoc perpendiculum, puncto sustentum Grave, non, in eo situ, quiescet; (per eandem 12 hujus;) Adeoque, extra hoc perpendiculum, non est Centrum Gravitatis; Nam siquod esset, eo sustentum Grave, etiamnum in illo situ quiesceret, per 13 hujus.

Intelligatur deinde, soluto vinculo in X alio sui extra rectam FXS continuatam puncto ut Y sustentum, ex puncto fixo ut G liberè dependens, quiescere; Adeoque (per 12 hujus) in eum situm redigi gravitate suâ, ut Axis \mathcal{A} equilibrîi per Y transiens, (est utique aliquis, per 11 hujus,)

S 2

jus) sit in GY perpendicularo, puta GYT . Ostendetur, ut prius, tum in GYT (infinita recta) centrum Gravitatis esse; tum, extra hanc non esse.

Cum itaque ostensum sit, tum in rectarum (infinitarum) XS , YT , utraque tum, non extra utranvis, esse Centrum Gravitatis; cumque illæ non nisi in uno intersectionis puncto, ut C , communicent: unicum erit Centrum Gravitatis, C .

Est autem in Æquilibrii omni sive Axe sive Plano (per 11 & 14 hujus) centrum aliquod Gravitatis: Cum itaque unicum esse, jam ostensum sit; erit hoc unum in omnium concursu.

Quodque omnis per illud transiens recta sit Axis Æquilibrii, omneque Planum per illud transiens, Æquilibrii Planum: ex definitionibus constat.

PROP. XVI.

Manente, in eadem à Terræ Centro altitudine, Centro Gravitatis: neque Descendere censendum est Grave, neque Ascendere.

Tantundem verò vel Ascendere vel Descendere censendum est Grave, quantum Ascendit, vel Descendit Centrum Gravitatis.

Adeoque (quoniam hoc in aliis Gravis motibus perinde obtinet) perinde Ponderando valet Grave utcumque situm, atque si in illo puncto totum esse intelligeretur, ubi est ipsius Centrum Gravitatis.

Demonstratur eodem modo, mutatis mutandis, atque 8 & 9 Cap. 3.

Fig. 99, 100. Nam, immoto C centro Gravitatis; utcumque rotetur Grave, (neque enim aliter, quam rotando moveri potest, per 1 hujus) puta ut ipsius recta ACB in situm $\alpha C \beta$ deveniat: Quoniam in quocunque situ, adeoque in toto progressu, opposita segmenta, plano quovis ad Horizontem recto ut PD divisa, invicem æquiponderant; (per def. Centri Gravitatis;) Estque (propter rotationem) unius Descensus

PROP. XVI. *De Centro Gravitatis.* 133

sus cum oppositi Ascensu necessario conjunctus; Erit Ascensus Descensui æquipollens (nam sicubi alter præpoller, ea præponderabitur, per 7 Cap. 2:) Adeoque nulli vel Ascensui, vel Descensui simul Æquipollent. Per 8 Cap. 1.

Item; moto Centro C in α , nec ascendendo tamen vel descendendo, sed in eadem à Terræ Centro altitudine; sitque ibidem A C B recta, in situm $\alpha \kappa \beta$ translata: Atque hujus similis ad horizontem situs intelligatur, in $\alpha C \beta$. Manifestum est, (propter æquæ alta puncta C, α ; rectasque C β , $\alpha \beta$, æquales & similiter positas;) puncta β , β , utrobique æquæ alta esse. Idemque de reliquis respectivè punctis similiter ostendetur. Adeoque totum Grave in situ $\alpha \kappa \beta$, æquæ altum est à terræ centro, atque in situ $\alpha C \beta$; hoc est (per jam demonstrata) æquæ altum atque in situ A C B. Adeoque nec Ascendisse nec Descendisse censendum erit.

Sin altius humiliusve sit punctum α quam C; atque similiter ad horizontem sita intelligatur eadem recta in $\alpha C \beta$, atque in $\alpha \kappa \beta$: Ostendetur (propter æquales rectas similiter positas) tanto altiora esse vel humiliora singula rectæ $\alpha \kappa \beta$ puncta, quam puncta rectæ $\alpha C \beta$; quanto est ipsum α , quam C: Adeoque (cum de reliquis punctis eadem sit ratio) tanto altius humiliusve Grave in $\alpha \kappa \beta$, quam in $\alpha C \beta$; hoc est, (per ante demonstrata,) quam in A C B. Adeoque tantundem vel Ascendisse vel Descendisse censendum erit Grave, quantum Ascenderit, vel Descenderit centrum Gravitatis; per 3 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Cum igitur, per 4 Cap. 2. in eâ ratione ponderat idem Grave quâ, si moveatur, plus vel Ascensurum sit vel Descensurum: tantundem ponderando valere censendum erit; atque si ibidem totum esset Grave, ubi ipsius est Centrum Gravitatis.

SCHOLIUM.

Quæ igitur, in præcedentibus, ostensa sunt, de Punctis Applicationum, eorumve à Centro vel aliunde distantis; de Gravium item loco, & motibus variè declivibus; cæteraque istiusmodi: Eorum Centris Gravitatis accommodanda erunt omnia. Quippe totum Grave, hujus ope, in unico illo puncto virtualiter situm intelligatur, in quo est ipsius Centrum Gravitatis. Quodque de integris gravibus jam dictum est; de illorum Particulis quibuscvis, & harum centris gravitatis; perinde

perinde intelligendum est; Quippe & hæ Particulæ sunt totidem Gravia: Sicut & Graviorum Aggregatum, pro uno Gravi habendum; cuius est & unicam commune Centrum Gravitationis.

Quæ igitur (per totum Caput 2 aut alibi) de Gravi, tanquam in uno Puncto existente; aut, ad Punctum unum Applicato, eive vel subiecto, vel supereminente, &c. dicta sunt: De Centro Gravitationis commodè exponuntur omnia. (Quod & obiter insinuatum est, in Scholio Prop. 3. Cap. 2.) Quippe tantundem ponderando valet Gravis, utcumque positum, atque si in eo puncto totum intelligeretur, ubi est Centrum Gravitationis: aut etiam, Graviorum quotlibet Aggregatum, utcumque positum, atque si in communi simul omnium Centro Gravitationis essent.

Fig. 101, Atque hinc etiam ampliandum jam erit, & aliquatenus relaxandum, quod in Scholio Prop. 1. hujus definivimus: Nempe, singula totius Gravis, vel Aggregati gravium, puncta, intelligenda esse in eodem ad invicem situ permanere. Quippe, mota utcumque Gravis parte aliqua, vel aliquot partibus, ita tamen ut earum vel singularum vel simul omnium Centrum Gravitationis maneat ut prius situm; perinde est, ponderationem quod spectat, atque si omnino permansissent in eodem situ puncta singula. Adeoque, quod hætenus demonstratum est, supponendo singula totius puncta situm suum ad invicem (atque ad motus centrum vel axem) retinere: posthac pro demonstrato habebitur, si saltem partium Centra gravitationis, maneant ut prius sita; aut etiam commune omnium Centrum Gravitationis similiter ad motus centrum vel Axem situm. Puta, si ACB Gravis, (motis utcumque partibus, manentibus partium centrīs gravitationis,) in situm $\alpha C \beta$ perveniat; perinde omnino ponderabit. Similiter; Automati rotis quotlibet utcumque circa sua centra motis, manente communi totius centro gravitationis in eodem (vel æquipollente) situ, manet eadem totius Ponderatio.

PROP.

PROP. XVII.

Si Centrum Gravitationis sit in eodem ad terræ Centrum Perpendiculo cum Centro motûs: sibi permillum Grave non movebitur.

Si extra Perpendiculum constituatur; ad Perpendiculum, infra Centrum motûs, feretur: Idque (nisi aliàs impeditum) in Plano per centrum motûs, centrum Gravitationis, & Centrum Terræ transeunte.

Quodque de Perpendiculo dictum est, Perpendiculari Succedaneo accommodabitur in obliquè declivi Plano.

Sequitur ex 10 Cap. 3. Nam Centrum Gravitationis, saltem Equilibrii Centrum est; (per eorum definitiones:) Nempe, si recta Fig. 103. quævis per Centrum Gravitationis, pro Librâ censeatur.

Vel (ut ea) sic ostenditur.

Putâ; Si Centrum Gravitationis sit in M centro motûs; hoc manente, non descendet Grave; per præced. Adeoque a Gravitate non movebitur.

Si sit in perpendiculo infra centrum motûs, ut in P: Centrum Gravitationis, (adeoque & Grave, per præced.) jam est in situ rotationis infimo, (per 20 Cap. 2.) Adeoque non, ob Gravitationem, movebitur.

Si sit in Perpendiculo supra centrum motûs, ut S; adeoque in puncto supremo; (per 20 Cap. 2.) In quascunque partes rotetur, æqualiter descenditur est, (propter æqualem quævis declivitatem,) tum Centrum Gravitationis, tum (per præced.) ipsum Grave. Adeoque (per 8 Cap. 2.) non movebitur.

Si extra perpendiculum sit, ut in G: deorsum ad P feretur, per arcum GP, in MGP plano perpendiculari situm, (ut qui omnium, in superficie sphericâ rotationem determinante, descensus est maximè declivis,) per 24 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Eademque, in obliquè declivi plano, de perpendiculari Succedaneo, similiter ostendentur. Putâ; si super declive planum impenetrabile, volendum

volvendum esset *G* grave, circa *C* centrum motus; suo centro Gravitatis peripheriam in illo plano describens *SPG*. Quippe, cum propter duritiem subiecti plani, aut forsan Axis circa quem rotetur determinatam positionem, similemve causam aliam, in plano perpendiculari descendere non possit; quam tamen potest maximè declivi feretur.

PROP. XVIII.

Ad datum motus Axem, (vel similiter inclinatum,) eâ ratione ponderant comparata Gravia; (vel idem, Grave pro vario situ:) quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum Centrorum Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano, componitur.

Adeoque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciproce proportionalia; Æquiponderant: Quorum verò centra Gravitatis sunt in ipso per Axem Perpendiculari Plano; nihil in utramvis partem ponderant.

Circa Axes verò inæqualiter inclinatos, adeoque in Planis inæqualiter Declivibus, Libranda: in eâ ratione ponderant, quæ ex Ponderum, & Distantiarum centrorum Gravitatis à perpendiculari per axem plano, & Declivitatum planorum in quibus librantur pondera, componitur.

$\frac{P.}{D.}$	$\frac{nP.}{D.}$	$\frac{P.}{mD.}$	$\frac{nP.}{mD.}$	$\frac{nP.}{\frac{1}{2}D.}$	$\frac{P.}{D.}$	$\frac{nP.}{mD.}$
					$\frac{G.}{PD\Delta.}$	$\frac{G.}{nmrPD\Delta.}$

$PD. G.::nP. D.::mP. D.::mPD. mnG.::PD. G. PD\Delta. G.::nmrPD\Delta. mnG.$

Sequitur ex 12 & 13 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP.

PROP. XIX.

Ex tribus his; Pondere, Ponderatione, & Distantiâ Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano; datis duobus quibuscvis, datur tertium.

Nempe: Datis Pondere, & Distantiâ; datur Ponderatio: Datis Pondere, & Ponderatione; datur Distantiâ: Datis Ponderatione, & Distantiâ; datur Pondus.

Excipe; Si (quod unâ cum Ponderatione datur) Distantiâ vel Pondus nullum sit.

Intellige; in datâ Axis inclinatione, (& similiter in sequentibus:) Secus enim & hujus habenda erit consideratio.

$$PD = G. \quad \frac{G = PD}{P} = D. \quad \frac{G = PD}{D} = P.$$

Sequitur ex 15 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XX.

Dato Pondere, datâque Distantiâ Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano: Pondus investigare, quod in assignatâ Centri Gravitatis à perpendiculari Plano per axem Distantiâ, Dato illi vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

Item: Distantiam investigare, in quâ, Pondus Assignatum, Dato illi vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{P.}{D.} & \frac{\frac{1}{n}P.}{\frac{1}{n}D.} & \frac{nP.}{nD.} & \frac{\frac{m}{n}P.}{\frac{m}{n}D.} & \frac{nD.}{\frac{n}{m}D.} \\ \frac{PD.}{G.} & \frac{PD.}{G.} & \frac{PD.}{G.} & \frac{PD.}{G.} & \frac{PD.}{G.} \end{array}$$

Fig. 104.

T

Sequitur

Sequitur ex 16 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXI.

Ejusdem vel æqualium Ponderum, Centri Gravitatis ad perpendicularis Plani per Axem motus Appropinquatio, aut inde Elongatio, Æqualis, (sive Centrum Plano ad moveri intelligatur, sive Planum Centro, vel contra;) æqualiter auget, minuitve Ponderationem.
Et Inæqualis, vel, Inæqualium Ponderum; proportiona-
liter.

Sequitur ex 17 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXII.

Datis Ponderibus quotlibet; datisque vel Axe motus (aut Perpendiculari per hunc Plano) & Ponderum Centris gravitatis; vel horum à Perpendiculari per Axem Plano distantis ad datas partes: Investigare, quanta sit tum singulorum tum simul omnium Ponderatio; &, ad quas partes: tum denique quantum gravant ipsum quo sustentur Axem.

Fig. 105. $\frac{+D.}{P.}$ $\frac{+3D.}{5P.}$ $\frac{+4D.}{3P.}$ $\frac{+6D.}{4P.}$ $\frac{-2D.}{3P.}$ $\frac{-3D.}{4P.}$
 $+DP. +G. +15DP. 15G. +12DP. +12G. +20DP. +20G. -6DP. -6G. -12DP. -12G.$

Ostenditur

$$\begin{array}{rcl}
 +1G & & \\
 +15G & \} & = +28G \\
 +12G & \} & \\
 +0G & = & +0G \\
 -6G & \} & \\
 -12G & \} & = -18G \\
 & + & +10G
 \end{array}$$

signo —, notari par esset: Et multiplicationum leges insuper essent observandæ.

Ostenditur ex 18 Cap. 3. propter 16 huius.

Signum +, innuit distantiam à Perpendiculari per Axem Plano, Dextrorsum: Signum —, Sinistrorsum. Pondera verò eodem signo + rotantur omnia, quia intelliguntur omnia, Deprimens. Si verò esset Ponderum aliud Deprimens, aliud Elevans: illud signo +, hoc

PROP. XXIII.

Datis Ponderibus quotlibet (vel summa Ponderum) datâque eorum simul omnium Ponderatione ad datas partes, respectu Axis expositi (vel expositi per axem Perpendicularis Plani:) Ponderationem Augere vel Minuere datâ quantitate; sive manente eodem per Axem plano perpendiculari; sive manentibus (in iisdem parallelis Planis) Ponderum centris gravitatis.

Ostenditur ex 19 Cap. 3. propter 16 huius.

Nempe: Manente Axe, (saltem similiter ad horizontem inclinato; in eodem perpendiculari plano,) Amovendo vel Admovendo ponderum Centra Gravitatis.

Vel, manentibus ut prius (saltem in iisdem parallelis Planis) Centris Gravitatis; (vel communi simul omnium Centro;) Amovendo vel Admovendo Axem, similiter inclinatum, in parallelo Plano; tanto quidem intervallo, quanto exposita Pondera (vel summa ponderum) tantundem ponderarent, quantum vel Addendum vel Auferendum ponderationi expositum.

PROP. XXIV.

Datis Ponderibus quotlibet ; unà cum Axe motus, (aut per illum Perpendiculari Plano,) & Centris gravitatis, (aut horum à Perpendiculari per Axem Plano distantis, ad datas partes :)

Vel, Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes :

Distantiam Centri Gravitatis simul omnium, à Perpendiculari per Axem Plano, invenire.

Adeoque ; Ponderationem Augere vel Minuere in datà ratione. Nempe ; in eà ratione, auctà vel minutà Distantiâ.

$$\frac{+10G = +10PD}{20P} = +\frac{1}{2}D.$$

Fig. 105. **O** Stenditur ex 20 Cap. 3. propter 16 hujus.

Putà ; Si $+10G = +10PD$ summa Ponderationum dextrorsum, data ; (vel, ex datis, inventa, per 22 hujus ;) per 20 P summa ponderum dividatur : Habetur $+\frac{1}{2}D$, distantia Centri gravitatis à Plano per Axem Perpendiculari, dextrorsum : Putà, in Σ Rectâ, Planové.

Corollarium, constabit ex 20 hujus. Quippe jam datur totius Aggregati (tanquam unius Gravis) tum Pondus tum Centri Gravitatis distantia.

PROP. XXV.

Datâ, à Perpendiculari per Axem Plano communis Ponderum quotlibet, utcumque positorum, Centri Gravitatis Distantiâ : Ex cognitis Ponderibus, vel summa Ponderum ; cognoscitur Ponderatio : Vel, ex cognitâ Ponderatione ; Summa Ponderum.

+

$$+D \times P = +DP = +G. \frac{+G = +DP}{D} = P.$$

Sequitur ex 22 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXVI.

Datis, in Gravi quovis, tribus Æquilibrii Planis, quæ non in unâ rectâ concurrant omnia; Vel, Datis duobus quibuscvis Axibus Æquilibrii: Datur ejusdem Centrum Gravitatis. Nempe in communi secantium concursu.

Et quidem; Figuræ Planæ, vel Lineæ utcunque curvæ in Plano descriptæ: Datis duobus (præter ipsum Planum) Planis Æquilibrii, (non in hujus rectâ aliquâ concurrentibus:) Vel, Uno Axe Æquilibrii non in illo Plano jacente: Datur Centrum Gravitatis. Nempe in communi datorum concursu.

- Lineæ verò rectæ; Dato uno vel Æquilibrii Axe, vel Plano Æquilibrii, rectam illam secante: Datur Centrum Gravitatis. Nempe, sectionis Punctum.

Puncti vero, Centrum Gravitatis, est punctum ipsum.

Cum enim duo Plana se mutuò non nisi in unâ rectâ secant; Rectæque sive rectam, sive planum, non nisi in unico puncto; (ut ex elementis notum est:) Manifestum est, non posse nisi in unico puncto; vel Duos Axes Æquilibrii, vel Tria Æquilibrii Plana, non in eadem rectâ concurrentia; se mutuò secare (Tertium utique Planum, duorum communem sectionem, non nisi in uno puncto secat.) Cumque Centrum Gravitatis, per 15 hujus, sit in communi omnium sive Axium sive Planorum Æquilibrii concursu; Datis illis, datur (quod in eorum concursu est) Centrum Gravitatis. Quod erat primò demonstrandum.

Sin illud Grave sit vel Figura Plana, vel Linea utcunque curva in Plano descripta; erit hoc ipsum planam, unum ex tribus illis Æquilibrii Planis

Planis requisitis; (per def. Plani *Æquilibrii*: quippe posito hoc ad horizontem recto in neutram partem præponderabitur, per 3 huius) Adeoque (cum Centrum Gravitatis in illo plano esse constet) si vel duobus aliis *Æquilibrii* Planis (non in eadem aliquâ huius Plani rectâ se mutuo secantibus;) vel, Axe uno; secetur Planum hoc: unico secabitur puncto, (quod itaque Gravitatis Centrum erit;) per jam dicta. Quod secundo demonstrandum erat.

Linea recta verò (cujus Centrum gravitatis in ipsa esse, similiter ostendetur;) ex tribus *Æquilibrii* planis duo supplet, sive communem duorum sectionem: Adeoque, si vel uno aliquo *Æquilibrii* vel Axe, vel Plano, secetur; secatur puncto unico, quod itaque Centrum erit Gravitatis.

Denique: Quod Puncti Centrum Gravitatis extra ipsum non sit, similiter ostendetur atque de Plano, & Lineâ rectâ; (quippe si Planum aliquod extra ipsum ponatur ad Horizontem perpendiculare; totum grave ad unâs partes ponderabit;) Cum itaque Punctum sit indivisibile; erit ipsum sui Centrum. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

Fig. 98. **E**xempli gratiâ. Centrum Gravitatis Puncti C, est ipsum C Punctum. Centrum gravitatis rectæ XS, est in ipsâ rectâ; ejusque Puncto C quo ab *Æquilibrii* Plano vel Axe YCT, secatur.

Figuræ Planæ, vel Lineæ Curvæ in Plano, YXTS, centrum Gravitatis est in duorum Planorum *Æquilibrii*, puta XS & YT, communi sectione, (quæ ipsa est Axis *Æquilibrii*;) hujusque puncto C, quod est in exposito plano.

Figuræ verò solidæ, vel lineæ curvæ non in plano descriptæ, (quales sunt spirales circa Conum, vel Cylindrum, &c.) Centrum gravitatis erit in trium Planorum *Æquilibrii*; puta per YXT, duorumque hoc secantium ut in XCS, & YCT; communi concursu C: sive duorum Axium *Æquilibrii* XS & YT communi sectione C.

Ejusmodi autem dico Axes habentur; ope 12 hujus. Puta suspensio primum Gravi ex sui puncto X, ut habeatur XS; deinde, ex sui puncto Y, ut habeatur YCT.

PROP.

PROP. XXVII.

Duorum conjunctorum Gravium (Homogeneorum) commune Centrum Gravitatis, est in eâ rectâ quæ sua respectivè Centra Gravitatis conjungit, sic divisâ, ut Distantiæ sint Ponderibus reciproçè proportionales.

Adeoque; datis duobus, eorûmq; Centris Gravitatis; datur commune simul utriusque Centrum Gravitatis.

Quòdque de duobus dicitur; de pluribus similiter obtinebitur.

Item; Datis Totius & Ablati, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur Centrum Gravitatis reliqui.

Sunto, verbi gratia, duo Pondera, vel (quod eodem recidit, Fig. 106. per 16 hujus) eorum Centra Gravitatis, in punctis A, B: Adeoque (per præced.) A B Axis Æquilibrii; & (per 15 hujus) in illo, Centrum Gravitatis: putà C. Est, inquam, ut Pondus A ad pondus B, sic (reciproçè) distantia C B ad distantiam C A, (per 18 hujus) ut Æquiponderent.

Invento autem duorum A B ponderum communi Centro Gravitatis C; dato adhuc tertio Pondere, ejûsq; Centro Gravitatis D: eodem modo invenietur trium commune Centrum Gravitatis. Nempe, ita divisâ rectâ C D in E, ut distantie E D, E C; sint Ponderibus D, & A + B, reciproçè proportionales.

Item; datis Totius A + B, & Ablati B, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur residui Centrum Gravitatis A. Nam datis Ponderibus A + B & B, habetur (subductione) Pondus A. Sumptis igitur (in B C rectâ continuatâ) ut inventum Pondus A, ad Pondus B datum, sic data C B distantia, ad distantiam C A quælitam.

Dico *Homogeneorum*, quia quæ sunt invicem Heterogenea, (ut linea & superficies; superficies, & solidum; aut similia;) nullam habent ad invicem rationem; (quod docent def. 3 & 5. Quinti Euclidis:) saneque hujusmodi comparationis incapacia. Quodque hic monitum est; alibi, ubi opus erit, est intelligendum.

C A P.

CAP. V.

De Calculo Centri Gravitationis.

MONITUM.

Hoc Caput Integrum, quanquam à præcedentibus dependeat, & (per Methodi leges) hunc sibi locum vindicare videatur: Non tamen ita cum sequentibus connexum est, quin ut possit ab illis separari. Cum itaq; ubi ad interiora Geometriæ penetrandum erit, Calculus necessariò futurus sit perplexior, quàm forte Tyrones, vel minùs exercitati, commodè ferre possint: illud jam statim sub initium monendum duxi; ut sicubi perplexi Calculi molestiam subire nolint, possint inoffenso pede ad Capita sequentia transire; quæ et præcedentibus, hoc omisso, tum satis intelligi, tum & legitimè demonstrari possunt.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Quanta qualibet, Arithmetice proportionalia, (sive secundum naturalem Numerorum consecutionem constituta,) appello Primana.

Quæque sunt in horum ratione Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. (sive ut Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. arithmetice-proportionalium,) appello Secundana, Tertiana, Quartana, &c.

Quæ

DEF. I. De Calculo Centri Gravitatis. 145

Quæ autem in eorum ratione Subduplicatâ, Subtriplicatâ, Subquadruplicatâ, &c. (sive ut illorum Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) appello Subsecundana, Subtertiana, Subquartana, &c.

Quæ in ratione, Duplicatâ Triplicatâ, Subtriplicatâ, &c. Triplicatâ Duplicatâ, Subduplicatâ, &c. (sive ut Quadrata Cuborum, aut radicum cubicarum, &c. ut Cubi Quadratorum, aut radicum quadraticarum, &c.) appello Quadrata Tertianorum, Subtertianorum, &c. Cubos Secundanorum, Subsecundanorum, &c. Et similiter, in quavis aliâ rationum compositione, mutatis mutandis, appellanda erunt.

Atque hujusmodi Serierum Indices sive Exponentes, appello, numeros (integros an fractos, surdôsve, ut contigerit) unde denominantur ille series aut Rationes.

Et, consonanter, Equalia dico Nullana: Quoniam Equalia secundum nullam (ne simplam quidem) rationem arithmeticè proportionalium crescunt aut decrescunt. Subprimana verò (sive, ut dicam, Radices Laterales Primanorum,) eadem erunt atque Primana. propter $\frac{1}{1} = 1$.

Exempli gratiâ:

Exponentes.	Series.							
0.	Equalium,	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
1.	Primanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.
2.	Secundanorum,	0.	1.	4.	9.	16.	25.	&c.
3.	Tertianorum,	0.	1.	8.	27.	64.	125.	&c.
$\frac{1}{2}$.	Subprimanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	&c.
$\frac{1}{3}$.	Subsecundanorum,	$\sqrt{0}$.	$\sqrt{1}$.	$\sqrt{2}$.	$\sqrt{3}$.	$\sqrt{4}$.	$\sqrt{5}$.	&c.
$\frac{1}{4}$.	Subtertianorum,	$\sqrt[4]{0}$.	$\sqrt[4]{1}$.	$\sqrt[4]{2}$.	$\sqrt[4]{3}$.	$\sqrt[4]{4}$.	$\sqrt[4]{5}$.	&c.
$2 \times 3 = 6$.	Quadratorum tertianorum,	0.	1.	8.	27.	64.	125.	&c.
$2 \times \frac{1}{2} = 1$.	Q. Subtertianorum,	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	&c.
$3 \times 2 = 6$.	Cuborum secundanorum,	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	&c.
$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.	C. Subsecundanorum,	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	&c.

V

DEF. II.

DEF. II.

Series, jam definitis, Reciprocas, appello; quando Series equalium, per earum aliquam Dividi intelligitur. Quae itaque Indices habebunt Negativos; ut $-1, -2, -3$, &c.

Exempli gratia.

Index.	Series. Reciproca						
$-0.$	Æqualium,	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	&c.
$-1.$	Primanorum,	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	&c.
$-2.$	Secundanorum,	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	&c.
$-3.$	Tertianorum,	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{64}$	&c.
$-\frac{1}{2}$	Subsecundanorum,	$\frac{1}{\sqrt{0}}$	$\frac{1}{\sqrt{1}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{4}}$	&c.
$-\frac{1}{3}$	Subtercianorum,	$\frac{1}{\sqrt[3]{0}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	&c.
$-6 = -2 \times 3.$	Quadratorum tercianorum,	$\frac{1}{Q.0}$	$\frac{1}{Q.1}$	$\frac{1}{Q.8}$	$\frac{1}{Q.27}$	$\frac{1}{Q.64}$	&c.
	Vel	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{4096}$	&c.
$-\frac{2}{3} = -2 \times \frac{1}{3}.$	Q. Subtercianorum,	$\frac{1}{Q.0}$	$\frac{1}{Q.\sqrt[3]{1}}$	$\frac{1}{Q.\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{Q.\sqrt[3]{3}}$	$\frac{1}{Q.\sqrt[3]{4}}$	&c.
	Vel	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{64}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{729}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{4096}}$	&c.
$-6 = -3 \times 2.$	Cuborum C. se- cundanorum,	$\frac{1}{C.0}$	$\frac{1}{C.1}$	$\frac{1}{C.4}$	$\frac{1}{C.9}$	$\frac{1}{C.16}$	
	Vel	$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{4096}$	&c.
$-\frac{2}{3} = -3 \times \frac{1}{3}.$	C. Subsecundanorum,	$\frac{1}{C.0}$	$\frac{1}{C.\sqrt{1}}$	$\frac{1}{C.\sqrt{2}}$	$\frac{1}{C.\sqrt{3}}$	$\frac{1}{C.\sqrt{4}}$	
	Vel	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{\sqrt{8}}$	$\frac{1}{\sqrt{27}}$	$\frac{1}{\sqrt{64}}$	&c.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Notandum hic, (quò rectius hæc intelligantur :) quod si Potestas quælibet secundum quam series instituitur (unde & Indicem sive Exponentem desumit,) per aliam cujusvis seriei potestatem multiplicetur, Potestatem facit cujus Index sit Aggregato indicum utriusque æqualis: Vel Index Multiplicatæ, tanto augetur, quantus est Index multiplicantis. Ut

$1 \times a = a.$	$1 \times a^2 = a^2.$	$1 \times a^3 = a^3.$	$1 \times a^4 = a^4.$	Quantitates.
$0 + 1 = 1.$	$0 + 2 = 2.$	$0 + 3 = 3.$	$0 + 4 = 4.$	Indices.
$a \times a = a^2.$	$a \times a^2 = a^3.$	$a \times a^3 = a^4.$	$a \times a^4 = a^5.$	Quantitates.
$1 + 1 = 2.$	$1 + 2 = 3.$	$1 + 3 = 4.$	$1 + 4 = 5.$	Indices.
$a^2 \times a = a^3.$	$a^2 \times a^2 = a^4.$	$a^2 \times a^3 = a^5.$	$a^2 \times a^4 = a^6.$	Quantitates.
$2 + 1 = 3.$	$2 + 2 = 4.$	$2 + 3 = 5.$	$2 + 4 = 6.$	Indices.

Sin per alteram Potestatem Dividatur, Potestas aliqua, oritur potestas cujus Index sit æqualis excessui Indicis potestatis divisæ supra indicem potestatis dividendæ: Vel Index Divisæ tantò minuitur, quantus est Dividentis Index. (Adeoque si hic illo major sit, prodibit index Negativus.) Ut

$a) 1 \left(\frac{1}{a} \right).$	$a^2) 1 \left(\frac{1}{a^2} \right).$	$a^3) 1 \left(\frac{1}{a^3} \right).$	$a^4) 1 \left(\frac{1}{a^4} \right).$	Quantitates.
$0 - 1 = -1.$	$0 - 2 = -2.$	$0 - 3 = -3.$	$0 - 4 = -4.$	Indices.
$a) a \left(1 \right).$	$a^2) a \left(\frac{1}{a} \right).$	$a^3) a \left(\frac{1}{a^2} \right).$	$a^4) a \left(\frac{1}{a^3} \right).$	Quantitates.
$1 - 1 = 0.$	$1 - 2 = -1.$	$1 - 3 = -2.$	$1 - 4 = -3.$	Indices.
$a) a^2 \left(a \right).$	$a^2) a^2 \left(1 \right).$	$a^3) a^2 \left(\frac{1}{a} \right).$	$a^4) a^2 \left(\frac{1}{a^2} \right).$	Quantitates.
$2 - 1 = 1.$	$2 - 2 = 0.$	$2 - 3 = -1.$	$2 - 4 = -2.$	Indices.

Si itaque intelligatur series potestatis inferioris, per seriem potestatis superioris, respectivè dividi; (hoc est, terminus primus illius, per primum hujus, secundus, per secundum, &c.) orietur series ex Reciprocis aliqua, quarum Indices sunt Negativi.

Si cui interim hæc minus adhuc explicata videantur: Consulatur, si libet, nostram *Arithmetica Infinitorum*: ubi fusiùs traduntur.

PROP. I.

Si intelligatur infinita series Quantorum, ab ipso capite seriei (puta 0 vel $\frac{1}{2}$) inchoatorum, & continuè crescentium secundum seriem Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. aliorumve modò definitorum; eorumve Reciprocam: quorum ultimum datum sit: erit totius ratio, ad seriem totidem ultimo æqualium, ea quæ est Unius, ad Indicem seriei Uno auctum.

Idem continget, si, omisso termino primo, seu 0, Series à secundo termino incipiat; seu à quovis termino qui sit primo & secundo intermedius; Puta si in serie Primanorum (cui reliquæ accommodandæ intelliguntur) terminus primus sit saltem non major quam communis Excessus seriei.

Puta: Infinita series ejusmodi Primanorum (qualia sunt, parallela Plana in Conoide Parabolico; & Rectæ in Triangulo, Basi parallela, &c.) cujus Index est 1: Est ad seriem totidem Maximo æqualium, (puta, ad circumscriptum Conoidi illi Cylindrum, aut Triangulo Parallelogrammum, æquè altum;) ut 1 ad 2 = 1 + 1.

Ejusmodi series infinita Secundanorum, cujus Index est 2; (qualia sunt parallela basi Plana in Cono aut Pyramide; vel Ordinatiim-applicata in complemento Parabolæ;) ad totidem maximo æqualia, (puta, circumscriptum super eadem basi Cylindrum vel Prismam, æquè altum; aut circumscriptum complemento Parabolæ Parallelogrammum;) ut 1 ad 3 = 2 + 1.

Ejusmodi series infinita Subsecundanorum cujus Index est $\frac{1}{2}$; (puta; rectarum in Parabola basi parallelarum,) ad totidem maximo æqualium, (puta, ad Parallelogrammum super eadem base æquè altum;) ut 1, ad $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ + 1; sive ut 2 ad 3.

Ejusmodi series infinita Subtertianorum, cujus Index est $\frac{1}{3}$, (puta, rectarum in Paraboloido cubicali,) ad totidem maximo æqualium, (puta,

PROP. I. De Calculo Centri Gravitatis. 149

tà, ad circumscriptum Parallelogrammum ;) ut 1 ad $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$:
five, ut 3 ad 4.

Et similiter in istiusmodi aliis innumeris.

Item in Reciprocis seriebus ; puta, ejusmodi series cujus Index sit $-\frac{1}{2}$. Erit ad totidem ultimo Æqualium, ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$; five ut 1 ad $\frac{1}{2}$; vel 2 ad 1. Et in reliquis similiter.

Per nostræ *Arithmetica Infinitorum* Prop. 64. 102, &c.

Idem continget, si, pro serie Primanorum

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c.
vel 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. &c.

quæ repræsentet Figuram Inscriptam : Intelligatur Series,

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c.
vel 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. &c.

quæ repræsentet Figuram Circumscriptam :

vel $\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{2}$. $2\frac{1}{2}$. $3\frac{1}{2}$. $4\frac{1}{2}$. $5\frac{1}{2}$. $6\frac{1}{2}$. &c.

hoc est, ut 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. &c.

aut etiam $\frac{1}{4}$. $1\frac{1}{4}$. $2\frac{1}{4}$. $3\frac{1}{4}$. $4\frac{1}{4}$. $5\frac{1}{4}$. $6\frac{1}{4}$. &c.

hoc est, ut 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. &c.

quæ repræsentent Figuram intermediam ; puta quæ sit partim Inscripta, partim Circumscripta ; adeoque major quam inscripta & minor quam Circumscripta. Quippe hæ omnes (atque horum similes) dummodo Series Infinita intelligatur, tantundem valent, (utut in Serie terminorum numero Finitorum secus sit :) Per Schol. Prop. 182. *Arithmet. Infinit.*

Quodque de serie Primanorum dictum est, reliquis Seriebus quæ sunt in Primanorum ratione Duplicata, Triplicata, &c. Subduplicata, Subtriplicata, &c. aut aliàs composita, accommodandum erit.

SCHOLIUM.

Quoties, in sequentibus, serierum hujusmodi mentio fiet : quarum æstimatio ex hac Propositione dependet ; intelligendæ sunt series illæ, ab ipso capite ordiri, puta 0 vel $\frac{1}{2}$; & dato terminari. Quod cum in propositione unâ aut alterâ expressè dictum sit ; idem in sequentibus intelligendum erit ; (nisi contrarium insinuetur :) utut, quo longa periphrasis evitetur, (quæ propositionem, alias fortasse satis implicatam perplexiorem redderet,) illud disertis verbis non dicatur.

PROP.

PROP. II.

- A. Lineæ Rectæ, Parallelogrammi, Parallelepipedi, Prismatis, Cylindri, Superficieï Cylindricæ vel Prismaticæ, aut quæ horum instar sunt; Centrum Gravitatis, est *in media longitudine*
- B. Nempe; Lineæ Rectæ, in Puncto medio: Parallelogrammi, in mediâ Rectâ oppositis basibus parallelâ: Parallelepipedi, Prismatis, aut Cylindri, vel Superficieï Cylindricæ vel Prismaticæ; in medio Plano, oppositis basibus Parallelo.
- C. Adeoque: Parallelogrammi, in ejusmodi binarum Rectarum concursu: Parallelepipedi, in ejusmodi trium Planorum concursu.
- D. Datur igitur Puncti, Lineæ rectæ, Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, horumve Solidorum cujusvis Superficieï, Centrum Gravitatis.
- E. Adeoque &, Punctorum quotlibet, positione datorum, commune Centrum gravitatis datur. Item, Rectarum quotlibet, magnitudinè & positione datorum. Imò, & linearum quarumlibet, magnitudine & positione datorum, quarum singularum Centra gravitatis dantur, datur commune Centrum Gravitatis. Ope Prop. ult. Cap. 4.
- Fig. 108, Et similiter, quotlibet Quadratorum vel Parallelogrammorum
109, quorumlibet; item, quotlibet Cuborum, vel quo-
110, rumvis Parallelepipedorum; aut superficieum horum;
111, (magnitudine & positione datorum;) datur commune
112, centrum Gravitatis. Ope ejusdem Prop. ult. Cap. 4.

A. Si enim intelligatur Linea Recta, Parallelogrammum, Prisma, Cylindrus, aut quod horum instar est aliud; utrinque à medio C; Rectis Planisve parallelis, æquali intervallo ab invicem distitis, positisque in situ ad horizontem rectis; in segmenta invicem æqualia (plura an pauciora,

PROP. II. De Calculo Centri Gravitatis.

151

pauciora, numero finita an infinita,) dividi: Manifestum est, (ex 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) propter segmenta quotlibet ex unâ parte, totidem ex alterâ, Æqualia magnitudine, (adeoque & Pondere; supponimus utique æqualiter gravia:) & in Distantiis respectivè æqualibus posita; Æquiponderare singula singulis respectivè sumptis; adeoque omnibus omnia simul sumpta. Adeoque, quod per C transit, est Æquilibrii Perpendicularum, vel Perpendiculare Planum; (per definitiones;) & in illis Centrum Gravitatis; per 15 Cap. 4.

Adeoque; (per 26 Cap. 4.) in Linea Rectâ, hinc determinatur ipsum Punctum; in Parallelogrammo, aut quod hujus instar est, saltem Rectâ; in Prismate, aut Cylindro, Planum; in quo est ipsum Gravitatis Centrum.

Porro; Cum sint in Parallelogrammo (sive sit Quadratum, Oblongum, Rhombus, aut Rhomboides,) bis bina latera opposita: Habentur hinc duæ rectæ, ut XCS (media inter AB, & DE,) & YCT, (media inter AD, & BE,) in quarum utrâque (per jam demonstrata) est Centrum Gravitatis: Adeoque; in horum communi sectione, C puncto. per 26 Cap. 4.

Denique; Cum sint in Cubo, & quovis Parallelepipedo, ter bina plana opposita: Habentur hujusmodi (per jam demonstrata) tria plana, in quorum singulis, (adeoque in communi omnium concursu C,) est Centrum Gravitatis. per 15 & 26 Cap. 4.

Adeoque, tum Puncti (sive per 29 Cap. 4. sive hinc, quia nihil est quod utrinque ponderet, nedum præponderet,) tum Lineæ rectæ, tum Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, item Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, ipsum Gravitatis Centrum; per jam demonstrata. Quodque de Cubis & Parallelepipedis, dictum est; perinde valet de horum superficiebus.

Et propterea, Punctorum quotlibet, vel quotlibet rectarum; item Quadratorum aut Parallelogrammorum quotlibet; quotlibet item Cuborum vel Parallelepipedorum; quotlibet denique Superficierum Cuborum aut Parallelepipedorum; datur commune Centrum Gravitatis, modo ipsa sint magnitudine & positione data. Per Prop. ult. Cap. præced.

Alia Demonstratio.

$$\begin{array}{ccccccc} P. & P. & P. & P. & & & \\ 0d. & 1d. & 2d. & 3d. & \&c. & \text{usque ad D.} \\ \hline 0dP + 1dP + 2dP + 3dP + \&c. & \text{usque ad DP.} & = & \frac{1}{2}NDP. & & & \end{array}$$

Idem

Fig.
præced.

Idem demonstratur ex 1 hujus. Intelligatur utique, per C mediam longitudinem incedens, Perpendiculare per Axem Planum; (cui intelligantur parallela, Parallelogrammi vel Prismatis Bases oppositæ:) Quæque sunt utrinque CA, CB, rectæ, ex infinitis numero Punctis (eo sensu quo def. 1. Cap. 4. definitum est) constare: (& similiter ex infinitis numero Rectis, Parallelogrammum; & Planis, Prisma, &c.) Quæ intelligantur omnia, æquæ crassa; (& similiter alibi intelligendum, ubi hujusmodi constructio adhibetur, nisi aliud innuatur:) Adeoque tum ipsa (ut Rectarum, Parallelogrammorum, & Parallelepipedorum, natura postulat, utpote in omnibus sui partibus æquæ altorum;) tum & propterea eorum Pondera, inter se æqualia: puta, ut P, P, P, P, &c. quorum omnium numerus intelligatur, N: Sed &, in Distantiis à Perpendiculari Plano per Axem, ut $od, 1d, 2d, 3d$, &c. usque D ad, maximam. Adeoque momenta seu Ponderationes (per 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) ut $odP, 1dP, 2dP, 3dP$, &c. usque ad DP. Quæ quidem infinitæ series Primarum, simul valent ut $\frac{1}{2}NDP$; (nempe, ad NDP, summam totidem Maximo Æqualium, ut 1 ad 2:) per 1 hujus. Cumque hoc, utrinque perinde contingat: Æquiponderabitur utrinque. Adeoque (per 15 Cap. 4.) Centrum Gravitatis est in illo Plano. Quod erat demonstrandum.

Reliquæque hinc deducuntur ut prius.

Alia Demonstratio.

P.	P.	P.	P.	&c.	P.
$od.$	$1d.$	$2d.$	$3d.$	usque ad	D.
$odP + 1dP + 2dP + 3dP + \&c.$ usque ad DP. $= \frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D.$					

Fig. 115,
116.

Idem Analyticè, tanquam si nondum notum esset, sic investigabitur. Intelligatur AB tanquam ex infinitis numero Punctis constans; (& similiter ex Rectis, Parallelogrammum; & ex Planis, Prisma, &c.) æquæ crassis; quorum itaque Pondera sint, ut P, P, P, P, &c. quorum Numerus sit N. Positòque Centro, vel Axe motus in ipso extremo A; erunt eorum inde Distantiæ respectivæ, ut $od, 1d, 2d, 3d$, &c. usque ad D. Et momenta seu Ponderationes, ut $odP, 1dP, 2dP, 3dP$, &c. usque ad DP. Quorum omnium summa (per 1 hujus) est ut $\frac{1}{2}NDP = NP \times \frac{1}{2}D$. Nempe quantum simul ponderaret NP totum Pondus vel summa Ponderum in distantia $\frac{1}{2}D$. Tantundem itaque distat Centrum Gravitatis à perpendiculari per A Plano, (per 24 Cap. 4.) Eritque propterea in parallelo plano per mediam longitudinem. Quod erat ostendendum. Cæteræque hinc deducuntur, ut prius.

S C H O.

SCHOLIUM.

Placuit hanc demonstrandi methodum, in re facili, cæteris sub-
jungere, ut eò melius intelligatur, ubi illa post in difficilioribus
adhibebitur.

Intelligimus (quod semel monendum erit) ubi de figurarum centris
gravitatis agitur, æquabiliter gravia esse, sive puncta, sive plana, sive
solida; hoc est, æquali magnitudini æquale pondus inesse; & propor-
tionalibus, proportionalia.

Item; Puncta, Lineas, aut Plana, ex quibus idem Grave, ut Linea,
Planum, aut Solidum, constari intelligitur; æquæ crassa esse: ut nem-
pe, pro intersectorum numero, distantiarum ratio censeatur. Utut
enim non negaverim, ad def. 1. Cap. 4. posse quidem secus aliquando
assumi: ubi tamen nihil tale insinuat, pro æquæ crassis sunt habenda.

Quæque hic monemus; in sequentibus erunt intelligenda.

Notandum interim, ad hanc Propositionem, & alias sequentes lon-
giores, Literas in margine positas, indicare, in quo Demonstrationis
membro querenda sit istius partis probatio.

PROP. III.

Si quævis Linea (recta aut curva) vel Figura quævis (pla- Fig. 117,
na, curva, solidave,) plano per medium ita divisa sit; 118,
ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius re- 119.
spectivè sumptis, sint æquales & æqualiter à dividente
Plano remotæ: Centrum Gravitationis est in Plano divi-
dente.

Putà, Linea recta, utcunque bisecta. Arcus Circuli, pro-
ducto Radio bisectus. Curva Parabolica, Hyperbolica,
aut Elliptica, Axe producto bisecta. Portio perime-
tri Polygoni regularis (aut etiam tota Perimeter) rectâ
per centrum figuræ transeunte bisecta, si bisecans illa
recta vel Laterum unum vel unum Angulorum bisecet.

Item; Circulus, Ellipsis, Polygonum regulare, (ejusve
portio; ita ut dictum est, rectâ bisecta:) Item Sphæ-
ra, Sphæroides, Conus, Conoides, Cylindrus; & ho-
rum

X

rum Superficies: Item Pyramis & Prisma, basium regularium; Segmentum Circuli, Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ, Sphæræ, Sphæroideos; multæque aliæ figuræ; plano per axem bisectæ.

Harumque aliquarum, (quæ pluribus hujusmodi Planis secari possunt in Puncto unico concurrentibus,) ut Circuli, Ellipseos, Parallelogrammi, Plani Solidive regularis, Parallelepipedi, Sphæræ, Sphæroideos; Centrum Gravitatis hinc determinabitur.

$$\begin{array}{r} lP, \quad mP, \quad nP, \text{ \&c.} \\ rD, \quad sD, \quad tD, \text{ \&c.} \\ \hline lrDP + msDP + ntDP, \text{ \&c.} \end{array}$$

Nam, si Pondera Ponderibus respectivis sint Æqualia, (putà, utrinque $lP, mP, nP, \text{ \&c.}$) & in Distantiis respectivè æqualibus, (putà $rD, sD, tD, \text{ \&c.}$ utrinque,) erunt utrinque æqualia Momenta $lrDP + msDP + ntDP, \text{ \&c.}$ Adeoque, Centrum Gravitatis in dividente Plano. per 15 Cap. 4.

Et quidem, ubi sunt hujusmodi plura Plana, quorum communis sectio sit Punctum unicum; ipsum Centrum Gravitatis determinatur. Per 26 Cap. 4.

Quod autem hæc enumeratis Lineis & Figuris (& harum similibus) conveniant: Ex earum Definitionibus manifestum est, aut inde facile demonstrabitur.

SCHOLIUM.

NOrandum tamen; de Curvis Parabolicis, Hyperbolicis, Ellipticis, (quod & de harum similibus intelligendum,) disertè dictum esse, *Axe* producto bisecandas; (non, *quavis* diametro:) Nam, nisi Punctum bisectionis, sit in Axis vertice; bisecta linea non erit utrinque similiter curva. At in Parabolæ, Hyperbolæ, aut Ellipseos, Portionibus Planis, (rectâ abscissis; quippe de his intelligendum:) quævis Diameter basin totamque aream bisecans, rem præstat.

Dum autem has Linearum aut Figurarum species enumeravimus; alias tamen innumeras reperiri certum est; De quibus Demonstratio non

PROP. IV. De Calculo Centri Gravitatis. 155

non minùs procedit; sùntque sub propositione generali comprehensæ. Nobis interim famosiore aliquot enumerasse sufficit.

Ponderum, quæ ex eâdem parte sunt, quantacunque inæqualitas, aut quantacunque varietas distantiarum, demonstrationi non officit: dummodo in comparandis quæ utrinque sunt, sit æqualitas. Sed &, in prop. sequente, major adhuc erit variandi licentia.

PROP. IV.

Item; Si Linea vel Figura quævis (plana, curva, solida,) ita Plano dividatur; ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius respectivè sumptis, æquiponderent: Centrum Gravitatis est in Plano dividente.

$$\begin{array}{cccccc} lP. & mP. & nP. & rP. & sP. & tP. \\ rD. & sD. & tD. & lD. & mD. & nD. \\ \hline lrDP + msDP + ntDP = lrDP + msDP + ntDP. \end{array}$$

Putà, Si ex unâ parte Pondera lP, mP, nP , sint in distantiiis rD, sD, tD : ex alterâ verò, Pondera rP, sP, tP , in distantiiis lD, mD, nD : Utcunque (propter Pondera distantiiis reciproce proportionalia) comparata comparandis respectivè æquiponderabunt. Adeoque, cum singula singulis respectivè sumptis æquiponderent; etiam omnia omnibus æquiponderabunt: (per 12 El. 5.) Eritque propterea Centrum Gravitatis in Dividente Plano. Per 15 Cap. 4.

PROP. V.

A. C.
Fig. 120,

Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Circuli, ^{121,}
Ellipseos; vel Portionis Circuli, Ellipseos, Parabolæ, ^{122,}
Hyperbolæ, rectâ (vel parallelis rectis) abscissæ; Coni, ^{123,}
Pyramidis, Cylindri, Prismatis, Sphæræ, Sphæroideos, ^{124,}
Conoi, ^{125,}
^{126.}

X 2

Conoideos; vel Portionis cujusvis horum, plano vel parallelis planis abscissæ; vel cujuscunque demum Figuræ planæ solidæve, quæ Diametrum aut Axem habet, quæ sibi ordinatim-applicatas rectas omnes parallelas bifecat, perque omnium sibi ordinatim-applicatorum Planorum parallelorum centra gravitatis transit: Centrum Gravitatis est in ejusmodi Diametro vel Axe quovis.

B.D. Atque hinc datur Circuli, Ellipseos, Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Sphæræ, Sphæroideos, Cubi, Parallelepipedî cujusvis, (& figuræ cujuscunque quæ hujusmodi plures Axes vel Diametros habet in unico puncto concurrentes,) Centrum Gravitatis. Nempe, in duorum pluriûmve concursu.

E Hinc item (cum primâ hujus) datur Centrum Gravitatis Cylindri, Prismatisve vel Solidi Prismatici cujusvis, cujus basium centra gravitatis dantur; (eorûmque Superficierum, dummodo Perimetri Basis centrum gravitatis datum sit:) Nempe; in Axis medio.

A Cum enim (verbi gratia) in Triangulo, Recta à quovis angulo ad apppositi Lateris medium, rectas omnes huic lateri parallelas (Triangulum complentes, per def. 1. Cap. 4.) bifecet, per 2 & 6 El. 6. (quam itaque figuræ Diametrum dico; eâ significatione quâ Conicarum Sectionum Diametri, ab Apollonio definitæ, sic dicuntur:) Adeoque per singularum Centra Gravitatis transeat; (per 2 hujus.) Erit in plano per illam rectam (per 3 hujus) adeoque in illâ rectâ (quippe in trianguli plano, per 2 6 Cap. 4.) Centrum Gravitatis.

Similiter ostendetur, de Figuræ cujusvis Planæ Diametro; (ut Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, Circuli, Parallelogrammi, Plani Regularis, &c.) eâ nempe, quæ omnes parallelas rectas, planum complentes, bifecat.

B Cùmque sint hujusmodi Diametri, in Triangulo tres, (nempe, à singulis angulis ad opposita latera;) in Parallelogrammo, quatuor, (nempe diagonales duæ, & duæ quæ oppositorum laterum media jungunt;) in Polygono regulari, tot quot sunt Anguli, vel Latera: nempe, si laterum numerus par sit; tum à singulis angulis ad angulum oppositum, tum à medio lateris cujusvis ad medium lateris oppositi

PROP. VI. De Calculo Centri Gravitatis. 157

positi, ducentur hujusmodi diametri; sin laterum numerus sit impar, a quovis angulo ad oppositum Latus: in Circulo, & Ellipsi, diametri numero infinitæ: In singulis his figuris (aliisque quibuscunque quæ plures habent diametros ut sunt irregulares multæ,) in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. Per 26 Cap. 4.

In figuris solidis, quæ Axem habent, per Planorum Parallelorum omnium Centra Gravitatis transeuntem; (quales sunt Prisma, Cylindrus, Pyramis, Conus, Pyramidoides, Conoides, Sphæra, Spharoides, aliæque multæ;) idem similiter ostenditur. Quippe Plana omnia per hos Axes (sive erectos sive inclinatos ad ordinatim-applicata Plana) sunt Plana Æquilibrii; (ut quæ, tum singula Parallela Plana per quorum centra gravitatis transeunt, tum propterea quod ex his confiatum solidum, in partes æquiponderantes dividunt;) Adeoque ipsi Axes, Axes Æquilibrii: Et propterea, in illis Centrum Gravitatis. per 15 Cap. 4.

Cumque sint in Parallelepipedo, Sphærâ, Spharoide, (aliisque multis figuris solidis,) hujusmodi plures Axes: in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. per 26 Cap. 4.

Corollarium ultimum; satis per se patet, ex hac & Prop. 1.

PROP. VI.

Lineæ rectæ, Parallelogrammi, Prismatis, Cylindri, Trianguli, Parabolæ, Paraboloidis; Complementi Parabolæ, Paraboloidisve; Pyramidis, Coni, Conoideos Parabolici, vel Paraboloidici; & cujuscunque demum figuræ ex parallelis rectis planisve secundum seriem infinitam (ab o inchoatam, & dato terminatam) Primariorum, Secundariorum, Subsecundariorum, (aliorumve in def. 1. Cap. hujus definitorum,) constantis:

Magnitudo, est ad magnitudinem Parallelogrammi, vel solidi Prismatici, super æquali Base, æque alti; ut 1 ad indicem Seriei unitate auctum: Et Centrum Gravitatis in eâ à vertice distantia quæ Diametrum vel Axem ita dividit

- vidit, ut pars ad Basim, sit ad partem quæ est ad verticem ;
 ut 1 ad Indicem Seriei Unitate auctum : Vel (quod eodem recidit) in eâ quæ est ad Basis distantiam ; ut Index ille Unitate auctus, ad eundem Binario auctum.
- B. Hoc est ; ut pars ad Basim, ad partem quæ est ad verticem ; sit in Linea Rectâ, Parallelogrammo, Prismate, & Cylindro, (intelligendo verticem in utrovis extremo,) ut 1 ad 1.
- C. In Triangulo, superficie erecti Coni vel Pyramidis (demptâ base,) & Conoide (vel Pyramidoides) Parabolico ; ut 1 ad 2.
- D. In Complemento Parabolæ, Pyramide, vel Cono ; ut 1 ad 3.
- E. In Complemento Paraboloidis Cubici, ut 1 ad 4 : Biquadratici ; ut 1 ad 5 : &c.
- F. In Parabola ; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$; five, ut 2 ad 3.
- G. In Paraboloides Cubicali ; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$; five ut 3 ad 4 : in Biquadrato ; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel ut 4 ad 5. &c.
- B. Sive, (quod eodem recidit ;) Distantia Centri Gravitationis à Plano per Verticem basi parallelo, ad distantiam Basis ab eodem Plano : (Quod & in Semicono, Semicylindro, Semi-Parabola, &c. aut quæ horum instar sunt ; non minus valet, atque in figuris integris :) est,
- In Lineâ Rectâ, Parallelogrammo, Prismate, vel Cylindro ; (facto vertice ut prius ;) ut 1 ad 2.
- C. In Triangulo, & Conoide (vel Pyramidoides) Parabolico ; ut 2 ad 3.
- D. In Pyramide, Cono, & Complemento Parabolæ ; ut 3 ad 4.
- E. In Complemento Paraboloidis Cubici ; ut 4 ad 5 : Biquadratici ; ut 5 ad 6, &c.
- F. In Parabolâ ; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 3 ad 5.
- G. In Paraboloides Cubicali ; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 4 ad 7 : Biquadratico ; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 5 ad 9, &c.

Et

PROP. VI. De Calculo Centri Gravitatis. 159

Et similiter in aliis hujusmodi figuris quibuscvis. A. I.
 Et quidem in Figuris Integris, utrinque ad Diametrum vel
 Axem positis; datur ipsum Axis vel Diametri punctum
 in quo est Centrum Gravitatis: In Dimidiatis, excavatis,
 &c. saltem Centri illius à vertice distantia.
 Unde & Frusti figuræ ejusmodi, (parallelis basi rectis pla- K.
 nisve truncatæ) Centrum Gravitatis habetur; ejusve à
 Base Verticisve plano distantia.
 Aut etiam hujusmodi Figuræ utcunque multatæ figurâ cu-
 jus tum Magnitudo nota sit, tum Centrum Gravitatis. per
 27 Cap. præced.
 Item, quæ ex hujusmodi totis, vel harum frustis componi- L.
 tur:
 Et, speciatim, figuræ cujusvis planæ rectilineæ, & solidæ
 Planis terminatæ; Centrum gravitatis habebitur, ex
 eadem 27 Cap. præced.

Nam, si intelligatur Axis motus, per A verticem transiens, Basi A:
 BB parallelus: Quæcunque sit series particularum (putà, Pun- Fig. 129.
 ctorum, Rectarum, Planorum,) ex quibus conflatur linea, figuræve, (pu-
 tà series Æqualium seu Nullanorum, Arithmetice-proportionalium
 seu Primanorum, vel ut horum Quadrata, Cubi, &c. Radices qua-
 draticæ, Cubicæ &c. hoc est Secundanorum, Tertianorum, &c. Subse-
 cundanorum, Subtertianorum, &c. aliæve quæcunque ex definitis in
 def. 1. hujus,) Cum sint in distantis ab axe motus, ut 0, 1, 2, 3, &c.
 Arithmetice proportionalibus, (propter æqualem singularum crassiti-
 em:) Erit series Momentorum (quippe quæ sunt in ratione ex Pon-
 derum & Distantiarum rationibus composita:) uno gradu altior quam
 est series Particularum; sive, series illa cujus Index sit unitate major
 quam Index seriei Particularum: Unde habetur tum magnitudo figuræ,
 tum summa Momentorum; per 1 hujus; adeoque Distantia Centri
 Gravitatis à plano per Verticem; per 24 Cap. 4. Ea quam habet pro-
 positio. Et quidem, ubi per præced. Centrum Gravitatis est in Diame-
 tro vel Axe, datur propterea ipsum Diametri vel Axis Punctum.
 Putà; Cum Linea recta, ut A D, (propter æqualia Puncta;) Pa- B.
 rallelogrammum: ut B B Δ (propter rectas æquales;) vel circa hoc
 constructum Prisma, vel Cylindrus, (propter æqualia plana;) sit
 Series

Series Aequalium seu Nullanorum; (puta ut P, P, P, &c.) cujus Index

P. P. P. P.P.

od. 1d. 2d. 3d.D.

odP, 1dP, 2dP, 3dP, ...DP.

$$\frac{1}{3}NDP = NP \times \frac{1}{3}D.$$

mul omnium momenta, (per 1 hujus;) ut $\frac{1}{3}NDP = NP \times \frac{1}{3}D$. Adeoque distantia Centri Gravitatis, $\frac{1}{3}D$. per 24 Cap. 4.

C Item: Cum Triangulum ABB (propter rectas, Basi BB parallelas, distantias à vertice proportionales,) & superficies Coni Pyramidisve (propter perimetros planorum similium basi parallelorum, distantias à vertice proportionales;) Et Conoides (vel Pyramidoides) Parabolicum, super Parabolâ BAB constructum, (cujus parallela plana, propter ordinatim-applicatas in Parabolâ in subduplicatâ ratione diametrorum interceptorum, sunt in diametrorum ratione, live distantiarum à vertice; quippe in duplicata ratione ordinatim-applicatarum in parabolâ circa quas fiunt illa similia

op, 1p, 2p, 3p, ...P.

od, 1d, 2d, 3d, ...D.

odp, 1dp, 4dp, 9dp, ...DP.

$$\frac{1}{3}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{1}{3}D.$$

que in distantias, ut od, 1d, 2d, 3d, &c. quarum maxima D: Erunt Momenta, ut odp, 1dp, 4dp, 9dp, &c. usque ad DP; series Secundanorum; cujus Index 2. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{3}NDP = \frac{1}{3}NP \times \frac{1}{3}D$. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis à vertice est $\frac{1}{3}D$. per 24 Cap. 4.

D Item; Cum Pyramis vel Conus, circa Triangulum ABB, (propter diametros Circulorum, vel latera similium Planorum, in ratione distantiarum à vertice; adeoque eorum planum, in distantiarum ratione duplicatâ,) sit infinita series Secundanorum; (puta ut

op, 1p, 4p, 9p, ...P.

od, 1d, 2d, 3d, ...D.

odp, 1dp, 8dp, 27dp, ...DP.

$$\frac{1}{4}NDP = \frac{1}{4}NP \times \frac{1}{4}D.$$

1 hujus; Sintque, distantiae ut od, 1d, 2d, 3d, &c. usque ad D: Erunt momenta

PROP. VI. De Calculo Centri Gravitatis. 161

Momenta, ut odp , $1dp$, $8dp$, $27dp$, &c. usque ad DP ; series Tertianorum: cujus Index 3. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{2}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{1}{2}D$. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis a vertice, $\frac{1}{2}D$. per 24 Cap. 4.

Similiter omnino, de Complemento Parabolæ dicendum: quæ series est Secundanorum. *Complementum* autem *Semi-parabolæ*, appello, id quod cum semi-parabolâ complet parallelogrammum circumscriptum; (cujus diameter, est parabolæ Tangens in vertice; & ordinatim-applicatæ, parallelæ diametro parabolæ;) quod, utrinque circa eandem sui diametrum duplicatum, appello, *Complementum Parabolæ*. (Putâ, quod continetur inter duas lineas Parabolicas convexas AB , AB , quas in communi vertice A , tangat AD , complementi diameter; basinque huic ordinatim-applicatam BB , cui parallelæ intelliguntur rectæ figuram complentes.) Hujusque ordinatim-applicatæ ad diametros suas; sunt ut diametri interceptæ in Parabola, ad suas ordinatim-applicatas. Adeoque, in duplicatâ ratione Diametrorum, sive Distantiarum à vertice. Cum itaque sit (ut Pyramis) Series Secundanorum: Momenta, sunt Series Tertianorum: Adeoque simul omnia, ut $\frac{1}{2}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{1}{2}D$: Et Centri gravitatis à vertice distantia; $\frac{1}{2}D$. Ut, de Cono & Pyramide, ostensum est,

Complementum Paraboloidis Cubici, (propter hujus Paraboloidis ordinatim-applicatas, in subtriplicatâ ratione diametrorum interceptarum; adeoque ordinatim-applicatas Complementi, in Triplicatâ ratione diametrorum, sive distantiarum à Vertice Complementi;) est Series Tertianorum: puta, ut op , $1p$, $8p$, $27p$, &c. usque ad P ; adeoque summa omnium ut $\frac{1}{2}NP$; per 1 hujus; (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 1 ad 4:) Cum itaque Distantiæ sint

$$\begin{array}{r} op, 1p, 8p, 27p.....P \\ od, 1d, 2d, 3d.....D \\ \hline odp, 1dp, 16dp, 81dp....DP. \end{array}$$

$$\frac{1}{2}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{1}{2}D.$$

ut od , $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D : Momenta erunt, ut odp , $1dp$, $16dp$, $81dp$, usque ad DP . Et simul omnia (per 1 dujus) ut $\frac{1}{2}NDP = \frac{1}{2}NP \times \frac{1}{2}D$. Et Distantia Centri gravitatis, $\frac{1}{2}D$. per 24 Cap. 4.

Atque, ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis Paraboloidium Complementis, aut etiam solidis eorum conversione circa Axem suum factis: aliisve secundum ejusmodi alias series.

Parabola, BAB , (propter ordinatim-applicatas in subduplicatâ ratione diametrorum,) est series Subsecundanorum; cujus Index $\frac{1}{2}$: puta, \sqrt{op} , $\sqrt{1p}$, $\sqrt{4p}$, $\sqrt{9p}$, &c. usque ad P : Adeoque simul omnia, ut $\frac{1}{2}NP$; (nempe ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3,) per

E.

F.

per 1 hujus. Et propter distantias, ut $od, 1d, 2d, 3d, \&c.$ usque

ad D; Momenta erunt, ut $od\sqrt{p}, 1d\sqrt{1p}, 2d\sqrt{2p}, 3d\sqrt{3p}, \&c.$ vel, ut $od\sqrt{p}, d\sqrt{1p}, d\sqrt{8p}, d\sqrt{27p}, \&c.$ usque ut

DP: quæ est, series Cuborum Subsecundanorum; cujus Index $1\frac{2}{3}$ vel $\frac{5}{3}$. Adeoque (per 1 hujus) omnia, ut $\frac{2}{3}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{2}{3}D$.

Et distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}D$.

G. Paraboloides Cubicale, (propter ordinatim-applicatas in ratione diametrorum subtriplicatâ,) est series Subtertianorum; cujus Index $\frac{5}{3}$.

puta ut $\sqrt{c}op, \sqrt{c}1p, \sqrt{c}2p, \sqrt{c}3p \dots P$ $2p, \sqrt{c}3p, \&c.$ ad P. Et
 $od, 1d, 2d, 3d \dots D$ omnium summa, ut $\frac{2}{3}NP$;
 $od\sqrt{c}op, 1d\sqrt{c}1p, 2d\sqrt{c}2p, 3d\sqrt{c}3p \dots DP.$ per 1 hujus. (hoc est,
 $d\sqrt{c}op, d\sqrt{c}1p, d\sqrt{c}16p, d\sqrt{c}81p \dots DP.$ ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 3 ad 4.)

$$\frac{2}{3}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{4}{3}D.$$

Et, propter distantias, ut $od, 1d, 2d, 3d, \&c.$ ad D: Momenta erant, ut, $od\sqrt{c}op, 1d\sqrt{c}1p, 2d\sqrt{c}2p, 3d\sqrt{c}3p, \&c.$ ad DP; five, ut $d\sqrt{c}op, d\sqrt{c}1p, d\sqrt{c}16p, d\sqrt{c}81p, \&c.$ ad DP; series Biquadratorum subtertianorum; cujus Index $1\frac{2}{3}$ vel $\frac{5}{3}$. Et summa omnium (per 1 hujus) ut $\frac{2}{3}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{4}{3}D$. Et distantia Centri gravitatis, $\frac{4}{3}D$.

Et similiter de aliis seriebus judicandum.

H. Nempe, universaliter; Si Index seriei, Ponderum sit S; adeoque (per 1 hujus) summa totius, ut $\frac{1}{S+1}NP$: Index seriei Momentorum,

erit $S+1$; adeoque horum summa, ut $\frac{1}{S+2}NDP$. Quæ per

summam Ponderum $\frac{1}{S+1}NP$ divisa; exhibet $\frac{S+1}{S+2}D$, distanti-

am Centri gravitatis à vertice; nempe ad distantiam maximam ut $S+1$, ad $S+2$: Adeoque reliquum distantie (quæ est distantia

Centri gravitatis à Basi) ut $\frac{1}{S+2}D$. Et propterea, Axis portio ad

Verticem, ad portionem ad Basem, ut $S+1$ ad 1. Quod erat demonstrandum.

Quod.

PROP. VI. *De Calculo Centri Gravitatis.* 163

Quodque de Figuris integris ostensum est, idem de Dimidiis, si-
militer ostenderetur; (Putà, de Semi-Parabolis, Semi-paraboloidibus, Fig. 130.
& complementis; vel horum Solidis, &c.) quoad distantiam Centri
gravitatis à Plano per verticem basi parallelo. Quamquam enim ip-
sum Centri punctum non hinc innotescat, (quia huiusmodi Dimidiatae
Figurae, Diametrum non habent, quæ & linea recta sit & singulas
ordinatim-applicatas bisecet, quò propositio præcedens hicin subsidi-
um advocetur ut ipsum Centrum determinetur;) tamen, quantum
illud à verticis Plano distet, (quod est hujus Propositionis opus,) non
minus in dimidiatis, quàm in integris figuris, hinc innotescit; & de-
monstratio similiter quadrat; eadem utique est ordinatim-applicatarum
series live in integris, sive in dimidiis figuris. Ut ex earum definitio-
nibus patet: Dimidiorum enim atque Duplorum, eadem est inter se
ratio; per 15 El. 5.

Similiter; Idem obtinet; si non quidem Dimidiata figura (putà,
ADB Semi-parabola,) sed utcumque huiusmodi series una ex alterâ
dematur; residui Centrum gravitatis (figuræ Diametrum vel Axem ha-
bentis,) vel saltem Centri Distantia à plano per verticem basi parallelo.
Putà; Si Semi-parabolæ ADB, eximatur AD b femi-parabola;
residui Ab B Centrum Gravitatis innotescit; saltem, quantum à Plano
per A distat. Nam ejusdem generis series est, tum ADB tum Ab B.

Imò verò; si non ejusdem generis sit AD b, arque ADB; sed ver-
bi gratia, ex ABD Paraboloido Cubico, auferatur Ab D Parabola,
aut Triangulum, aut alia figura quævis quæ ex aliquâ definitarum serie
constatur: Cognitis enim Totius & Ablati tum magnitudine, tum
Centro Gravitatis; etiam Residui cognoscitur; per 27 Cap. 4. Sal-
tem cognitâ utriusque Magnitudine, & Ponderatione respectu expositi
plani; cognoscitur Residui Ponderatio & Magnitudo; adeoque &
Centri gravitatis distantia; per prop. 24. Cap. 4.

De Frustris item similiter fiet judicium. Nempe, Propter datum vel
ipsum Centrum Gravitatis, vel distantiam Centri Gravitatis, unâ cum
magnitudine; totius ADB vel AbB, & ablati ARF, vel Aff, dabitur &
Frustrum reliqui, FRD B, vel Ff b B, ut ante. Per 27, vel 28, Cap. 4.

Similiter; de figuris ex huiusmodi pluribus conflatis, fiet judicium:
Et speciatim de Planis omnibus Rectilineis, (quippe in Triangula
posse dividi, notum est;) & Solidis quæ planis terminantur; (quippe,
hæ saltem in Pyramides dividi poterunt;) Datis utique partium Mag-
nitudinibus, & Centris Gravitatis; dabitur Totius; per 27 Cap. 4.
Vel datis saltem magnitudinibus, & distantis centrorum (ab exposito
plano) adeoque Ponderationibus; dabitur etiam Totius Ponderatio
&

& Magnitudo; adeoque & Centri gravitatis distantia à plano expofito.

Neque hæc de figuris Planis tantum obtinent; fed in Solidis non minus. Putà, fi Conoides Parabolicum, vel Paraboloidicum, vel Conus etiam, aut Pyramis, vel Cylindrus, aut Prisma, &c. Conicè excavetur, vel horum Frufta, Cylindricè; aut alias mille modis: uti ex jam di&is fatis demonstratur.

SCHOLIUM.

HAftenus itaque Centrum Gravitatis invenimus, in figuris omnibus Planis Re&tilineis; & Solidis, quæ planis terminantur: Sed & in Planis Curvilineis, & Solidis curvis superficiei terminatis, non paucis; tum Magnitudinem tum & Centrum Gravitatis determinavimus. Et quidem longè pluribus quàm quò pertigerat doctrina Veterum. Atque, in fequentibus, ad plura adhuc procedendum, ultra quàm (quantum fcio) quifquam pertigit Recentiorum; faltem ultra quàm à quoquam editum eft, ante editam noftram (unde hæc directâ methodo deducuntur) Arithmeticam Infinitorum.

Quod autem, de Figurarum Fruftis, figurisque Excavatis, aut aliàs multatis, & figurarum Aggregatis, &c. ad hanc propofitionem oftendit: Etiam in fequentibus intelligendum erit. Utpote ex prop. 27. Cap. præced. deducendum.

Plura verò quæ huc fpectant, videat (cui id lubitum erit) in noftrâ *Arithmetica Infinitorum*; (ubi hæc Methodus fuſius traditur:) Et in noſtro *Commercio Epifolico*, (cum D Fermatio, aliisque,) Epif. 16, ejusque Appendice.

PROP:

PROP. VII.

- Si intelligatur ex Rectis Planisve, secundum aliquam ex Reciprocis (in def. 2. hujus definitis, Indicem habentibus Negativum) seriem infinitam, (ab ipsâ seriei origine inchoatam, & dato terminatam,) Figura constari: A.
- Habebit hæc, ad Verticem, latitudinem Infinitam: B.
- Finitam tamen, si, ex parte Verticis, intelligatur vel tantillum Plano parallelo abscindi; (adeoque figura saltem truncata magnitudinis erit finitæ:) C.
- Aream verò; quæ sit ad Parallelogrammum, vel Solidum Prismaticum, super æquali Base æquè altum; ut 1, ad Indicem Unitate auctum: D.
- Adeoque vel magnitudine Finitam; si Index sit major quam — 1; (putà $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c.) G.
- Vel Infinitam; si Index sit — 1: E.
- Vel Plusquam Infinitam; si sit Index minor quam — 1; (putà, — 2, — 3, &c.) F.
- Quæque sunt magnitudinis Infinitæ, (aut plusquam Infinitæ,) Centrum Gravitatis non habent. H.
- Quæ sunt finitæ magnitudinis, siquod habent Centrum Gravitatis, in eâ habent à vertice distantia, quâ ita dividitur Diameter vel Axis, ut pars ad Basim, sit ad partem quæ est ad Verticem; ut 1, ad Indicem seriei Unitate auctum. I. L.
- Habent autem Centrum Gravitatis hujusmodi Figuræ (magnitudinis finitæ) si sint Integræ, (hoc est, utrinque Circa Diametrum vel Axem similiter positæ;) Nempe, in Axis illo puncto, quod, ita ut dictum est, distat. K.
- Ex dimidiatis verò (vel quæ harum instar sunt) quæ habent, quæque non habent, in Propositione sequente dicetur. L.
- Quæ,

- M. Quæ, exemplis facile explicantur.
- N. Deque his Figuris Truncatis, aut aliàs Multatis, vel Aggregatis; idem judicandum est atque de illis propositionis Præcedentis.
- O. Atque hæc Figuræ interminabiles (planæ, solidæve;) ad *Paraboloidium* genera spectant, vel ad harum solida.
- P. Ipsæ autem *Linea Curvæ*, ad quarum convexas adjacent Interminabiles hujusmodi Figuræ Planæ; ad *Hyperboloidium* seu *Hyperboloidium* genus referendæ sunt.
- Q. Sed & quæ ad *Hyperboloidium* harum (ea sola excepta quæ est vera Hyperbole Appolloniana) *Concavas* adjacent *Figuræ planæ*, (concava & rectis terminatæ) tum quam magnitudinem habent hinc determinabitur; tum & Centrum gravitatis datum erit.

A. **Fig. 129.** Intelligatur, ad Diametrum vel Axem AD, hujusmodi figura plana solidæve construi, A δ BD; cujus Basis DB; & huic parallelæ rectæ aut superficies planæ (figuram complentes) ordinatim-applicatæ, secundum seriem ex Reciprocis illis quamlibet.

Erit, propter seriei Directæ terminum primum 0, seriei reciprocæ primus terminus ∞ infinitus: puta $\frac{1}{0} = \infty$. (Nam, ubi quantitas quælibet dividitur; si dividens sit 0, quotiens erit ∞ : quippe nulla quantitas finita, pro quotiente posita, dividendem 0 multiplicans, restituet dividendam.) Adeoque Recta Verticis A δ erit interminabilis: Sive, figuræ latitudo, in Vertice, infinita.

B. Cum verò Seriei directæ terminus post primum quilibet quantitatem habeat finitam; seriei reciprocæ reliqui omnes termini sunt finiti; adeoque figuræ infra verticem finita latitudo. (Nam, quantuluscunque sit ille post primum terminus seriei directæ; hic quantitatem finitam dividens, quotientem dabit finitum.)

C. Adeoque, utut tota à vertice ad basin figura, magnitudinis esset infinita (propter infinitam verticis latitudinem;) si tamen intelligatur, ex parte verticis, vel tantillum truncari plano basi parallelo; reliquum figuræ, magnitudinis erit finita. (Erit utique magnitudinis data, altitudo finita; sed & truncatæ latitudo vel amplitudo per jam ostensa; adeoque tota figura, sive plana sit sive solida, sic truncata, magnitudinis erit finita.)

Est

PROP. VII. *De Calculo Centri Gravitatis.* 167

Est autem, à vertice ad basin tota, ad Parallelogrammum, vel solidum Prismaticum (sive sit Parallelepipedum, sive aliud Prisma, sive Cylindrus, vel istiusmodi quodvis Solidum, super quâcunque base, eandem ubique; per totam altitudinem, amplitudinem habens,) super æquali base, æque altum; hoc est, ad seriem totidem ultimo æqualium, (per def. 1. Cap. 4.) ut 1, ad indicem seriei Unitate auctum; per 1 hujus.

Adeoque, (propter Reciprocarum Serierum Indicem negativum,) si Index, sit -1 ; erit $-1 + 1 = 0$; adeoque ratio 1 ad 0, Infinita. Et propterea si series illa sit Reciproca primanorum, (quale est, complementum Hyperbolæ Apollonianæ, per prop. 95. Arithm. Infin.) figura erit magnitudinis infinita. (Quippe ad finitam datam, ut 1 ad 0.)

Si vero Index sit minor quam -1 , (hoc est, magis negativus,) puta, $-1\frac{1}{2}$, -2 , -3 , &c. etiam addito 1, manebit adhuc negativus; puta $-1\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$. $-2 + 1 = -1$. $-3 + 1 = -2$, &c. (per 8 Cap. 1.) adeoque, ratio 1 ad $-\frac{1}{2}$, 1 ad -1 , 1 ad -2 , &c. Nempe, ut Positivi ad Negativum; quæ est plusquam infinita; (nam, 1 ad 0, est infinita; ergo, 1 ad minus quam 0, est major quam infinita; per 8 El. 5.) Ergo, & Figura (quæ, ad datam, illam habeat rationem,) plusquam Infinita.

Sin Index major sit quam -1 , (hoc est, minus negativus,) puta, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. addito 1, fiet Positivus; puta $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$, $-\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$, &c. (per 8 Cap. 1.) Adeoque, ratio 1 ad $\frac{1}{2}$, 1 ad $\frac{2}{3}$, 1 ad $\frac{3}{4}$, 1 ad $\frac{4}{5}$, &c. finita. Ergo, & Figura (ut quæ, ad datam finitam, finitam habet rationem,) magnitudinis finita; utut, latitudinis in vertice, infinita.

Quæ autem Magnitudinis sunt Infinita, (aut plusquam infinita,) Centrum gravitatis non habent. Quippe, si in ipsâ verticis rectâ, A δ, intelligeretur, (aut supra verticem; aut etiam per Basin, aut infra Basin:) Figura tota (respectu Plani basi paralleli per Centrum illud transeuntis,) ad unas partes ponderaret; adeoque non esset Æquilibriuni. Sin intra verticem & Basin intelligatur; quantulacunque sit à vertice distantia; planum basi parallelum per hoc transiens, Figuram dividet in segmenta duo; quorum illud ad basin, Finitum erit, atque in distantia finitâ, (per jam ostensa;) illud autem ad verticem, Infinitum erit; (quippe, si à toto Infinito, Finitum auferatur: reliquum erit Infinitum: secus enim, Finitum Finito additum, faceret Infinitum:) Adeoque, Infinitum hoc ad verticem (in quantulacunque distantia) Finito illi ad basin, (in distantia quantacunque finitâ,) præponderabit: Adeoque non erit in illo plano Centrum Gravitatis. Nusquam igitur.

D.

E.

F.

G.

H.

I. Si verò sint magnitudinis Finitæ; puta, secundum seriem cujus Index Fig. 131. sit $-S$, major quam -1 , (ut jam ostensum est;) Ostendetur (ut

in prop. præced.) totam figuram, sive seriei summam, esse $\frac{1}{-S+1}$ NP, (quæ, nempe sit ad parallelogrammum, vel solidum Prismaticum, NP, ut 1 ad $-S+1$;) & summam momentorum, sive momentum totius, (respectu plani per verticem A, basi paralleli,) ut $\frac{1}{-S+2}$ NDP, (nempe, ad momentum ipsius NP in distantia D suspensi, ut 1 ad $-S+2$;) propter seriem Momentorum, uno gradu altiore, quam est series Ponderum:) per 1 hujus. Adeoque, propter $\frac{1}{-S+2}$

NDP = $\frac{1}{-S+1}$ NP \times $\frac{-S+1}{-S+2}$ D, erit distantia Plani Æquilibrii (per 20 Cap. 3.) adeoque & Centri Gravitatis siquod est, (per 25 Cap. 4.) $\frac{-S+1}{-S+2}$ D; adeoque reliquum distantie maximæ, (quæ baseos est,) $\frac{1}{-S+2}$ D. Hæc igitur ad illam, est ut 1 ad $-S+1$,

K. (in ratione finitâ; propter $-S+1$ quantitatem positivam:) Si itaque tota distantia D (basis à vertice,) ita dividatur puta in C; ut pars ad basin, CD, sit ad partem quæ est ad verticem, CA, ut 1 ad $-S+1$; planum per C transiens, basi parallelum, est Planum Æquilibrii. per 20 Cap. 3. Et quidem (si utrinque ad Diametrum vel Axem similiter construatur figura) in ipso Diametri vel Axis puncto C, (per 5 hujus.) Sin minus; saltem siquod est Centrum Gravitatis, in eo plano est. per 24 Cap. 4.

L. Dico autem, siquod est; quoniam, in figurâ dimidiatâ (vel quæ istiusmodi est,) fieri potest, ut Centrum gravitatis, utut in C Æ infinitâ intelligatur, intelligenda tamen sit ab ipso C puncto in infinitâ distantia, (ut in prop. seq. ostendetur,) adeoque nusquam erit.

M.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{\sqrt{0}p} & \frac{1}{\sqrt{1}p} & \frac{1}{\sqrt{2}p} & \frac{1}{\sqrt{3}p} & \dots & P \\ 0d. & 1d. & 2d. & 3d. & \dots & D \\ \hline \frac{0}{\sqrt{0}dp} & \frac{1}{\sqrt{1}dp} & \frac{2}{\sqrt{2}dp} & \frac{3}{\sqrt{3}dp} & \dots & DP \\ \sqrt{0}dp. & \sqrt{1}dp. & \sqrt{2}dp. & \sqrt{3}dp. & \dots & DP \end{array}$$

$$\frac{1}{2} NPD = 2 NP \times \frac{1}{2} D.$$

Exempli gratiâ. Si sit ADBÿÿ figura, ex serie reciproca subsecundanorum, conflata; (puta, cujus rectæ vel plana sint in reciproca ratione ordinatim-applicatarum in parabolâ;) cujus Index, $-\frac{1}{2}$. Adeoque, ad inscriptum Parallelogrammum vel Prismâ

PROP. VII. De Calculo Centri Gravitatis. 169

ma $ADB\Delta$, (quod sit NP), ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$; hoc est, ut 1 ad Fig. 129. $\frac{1}{2}$, vel 2 ad 1: nempe ut 2 NP . Momentorum series, indicem habebit $-\frac{1}{2} + 1$ vel $\frac{1}{2}$; (quippe uno gradu altior quam Ponderum, propter distantias arithmetice proportionales:) Adeoque totius momentum, ad momentum Parallelogrammi vel Prismatis in distantia maximâ appensi, (quod sit $NP D$), ut 1 ad $\frac{1}{2} + 1$; hoc est, ut 1 ad 1 $\frac{1}{2}$, vel 2 ad 3: Nempe, $\frac{2}{3} NP D = 2 NP \times \frac{1}{3} D$. Distantia itaque Plani Æquilibrii (& si quod est, Centri Gravitatis,) à vertice, est $\frac{2}{3} D$. ejusdemque propterea à Basi distantia, $\frac{1}{3} D$. Adeoque hæc ad illam, (hoc est CD ad CA), ut 2 ad 1: vel 1 ad $\frac{1}{2}$; hoc est, 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$.

Si sit ex serie reciproca Tertianorum; cujus Index $-\frac{1}{3}$. Erit summa Ponderum, (propter $-\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$; & ut 1 ad $\frac{2}{3}$, sic 3 ad 2;) $\frac{1}{2} NP$. Index seriei momentorum $-\frac{1}{2} + 1$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{\sqrt{c} p} & \frac{1}{\sqrt{c} 1 p} & \frac{1}{\sqrt{c} 2 p} & \frac{1}{\sqrt{c} 3 p} & \dots & P & \\ \text{od.} & 1d. & 2d. & 3d. & \dots & D & \\ \hline \frac{0}{\sqrt{c} 0 dp} & \frac{1}{\sqrt{c} 1 dp} & \frac{2}{\sqrt{c} 2 dp} & \frac{3}{\sqrt{c} 3 dp} & \dots & DP & \\ \sqrt{c} c dp & \sqrt{c} 1 dp & \sqrt{c} 4 dp & \sqrt{c} 9 dp & \dots & DP & \end{array}$$

$$\frac{2}{3} NP D = \frac{1}{2} NP \times \frac{1}{3} D.$$

$= \frac{1}{2}$. Adeoque, (propter $\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$; & 1 ad $\frac{2}{3}$, ut 3 ad 5) summa Momentorum, $\frac{2}{3} NP D = \frac{1}{2} NP \times \frac{1}{3} D$. Adeoque, plani æquilibrii (& si quod est, Centri Gravitatis) distantia à vertice, $\frac{2}{3} D$; à base, $\frac{1}{3} D$: Adeoque hæc ad illam, (nempe CD ad CA), ut 3 ad 2; vel 1

ad $\frac{1}{2}$; hoc est, 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$. Atque in aliis similiter.

Si itaque in eâ ratione dividatur AD in C ; sitque figurâ utrinque similiter applicata, ad AD Diametrum vel Axem: erit C Centrum Gravitatis; per 5 hujus. Sin minus; saltem planum per C est planum Æquilibrii; atque in hoc, si quod sit, Centrum Gravitatis.

Porro; Habitis hoc pacto, tum figurâ totius $ADB\Delta$, tum abscissâ ut $ACB\Delta$, magnitudine, & Centro gravitatis; saltem magnitudine, & plano æquilibrii, plano per axem motûs AD parallelo; seu magnitudine & ponderatione: Habentur residui, sive figurâ truncatâ $C\delta BD$, magnitudo & Centrû Gravitatis; saltem magnitudo & ponderatio; adeoque, distantia Centri Gravitatis, Planumve in quo est, plano Basis seu Plano huic parallelo per axem motûs, parallelum. Ut in prop. præced.

Et similiter ostendetur de figuris hujusmodi alias multis, vel aggregatis; atque in prop. præced.

Figuras autem has interminabiles, ego ad Paraboloidium genera refero; aut horum Solida: propter continuatam seriem simplicem, utut reciprocam, quâ disponuntur ordinatim-applicatæ rectæ, vel figuræ planæ, ipsas complentes; ut in Paraboloidibus eorûmque solidis,

Z

ob-

N.

O.

Fig. 129. observare est. Quâ de causâ, & communem sortem subeunt, cum iis
 Fig. 131. in propositione præcedente memoratis, (nisi quod ex his aliquæ sint
 magnitudinis infinitæ, & Centrum gravitatis non habeant.) Et qui-
 dem has in eadem cum illis propositione comprehendissem, nisi quod in
 his (propter infinitatem) speciatim aliqua determinanda essent, quæ in
 illis absque aliquâ determinatione proponuntur. Quippe nulla est ex
 figuris illis quæ vel infinitæ sit magnitudinis, vel Centrum Gravitatis non
 habeat.

P. Ipsæ tamen Curvæ, ad quarum Convexas adjacent huiusmodi figu-
 ræ Planæ, ad Hyperbolarum, vel Hyperboloidium, familiam spec-
 tant.

Et quidem, quæ terminat figuram planam, ex serie reciproca Prima-
 norum conflata, (qualis est media Curvarum trium in figurâ adscrip-
 tâ,) est vera *Hyperbola*, Apolloniæ; cujus Asymptotæ sunt AD ,
 $A\delta$. (ut prop. 91, 95, Arithm. Infin. ostensum est.) Atque perinde
 omnino est, si ex parte D terminata, sit interminata versus δ ;
 si ex parte δ terminata, interminata sit versus D . Utrovis enim mo-
 do evadet figura simpliciter infinita.

Reliquæ verò, quæ *Hyperboloides* dici poterunt; duabus item A-
 symptotis AD , $A\delta$, interjacent: ita quidem ut quæ, versus D termina-
 ta & interminata versus δ , figuras terminant magnitudine finitas;
 eadem terminata versus δ , & interminata versus D , figuras termina-
 bunt plusquam infinitas: Et contra. Quippe, si ad AD ordinatim-
 applicatæ, & ipsi $A\delta$ parallelæ sint, verbi gratiâ, in serie reciproca
 Subsecundanorum; ordinatim-applicatæ ad $A\delta$, ipsi AD parallelæ,
 erunt reciproca series Secundanorum; Et figura ex illi constans non in-
 finita; ex his verò, plusquam infinita. Et in reliquis similiter. Ut
 ad prop. 105. *Arithm. Infin.* ostendimus.

Q. Atque hinc etiam constat, huiusmodi Hyperboloidium figuras, Curvâ
 Concavâ terminatas, quadrandi methodus; & Centrum Gravitatis
 investigandi. Cum enim Frusti $C\beta BD$, (ut hic & prop. seq. osten-
 sum est,) & Parallelogrammi $DC\delta d$, (ut notum est) tum Magni-
 tudo, tum Centrum Gravitatis habetur: Habebitur & Hyperboloides
 βBd , magnitudo & gravitatis Centrum. Atque hoc quidem si-
 ve figura adjacens convexæ, finita sit, si-ve plusquam infinita; quippe ea-
 dem est curva (utut secundum aliam diametrum considerata) quæ u-
 tramque terminat; ut modo ostensum est. At in verâ Hyperbolâ (eâ-
 que, ex jam traditis solâ,) non idem fiet; quippe ad cujus convexam
 adjacens figurâ interminabilis est & magnitudine infinita; si-ve AD ,
 si-ve $A\delta$, pro diametro habeatur.

SCHO-

SCHOLIUM.

ATque hæcenus (ut de Rectilineis Planis, & figuris Solidis quæ planis terminantur, nihil addam,) ostendimus in Planis Curvilineis omnibus, quæ ad genus Parabolicum vel Paraboloidicum spectant, & horum Solidis; atque ex Reciprocis, & Solidis horum, quotquot Centrum Gravitatis habent; distantiam Centri Gravitatis à Vertice: Adeoque, si pro Diametro vel Axe Rectam habeant per omnium sive rectorum sive planorum, ex quibus (secundum def. 1. Cap. 4.) conflare intelligatur figura, centra gravitatis transeuntem; ipsum Gravitatis Centrum totius; utpote quod in ipsâ Diametro Axève constitutum est; per 5 hujus.

In hujusmodi tamen figuris Dimidiatis (ut Semiparabolâ, Semiparaboloides, &c.) aliisque ejusmodi; utut de distantia Centri Gravitatis à vertice constet; de ipso Centri puncto, propter ipsius ab illâ Diametro Axève distantiam nondum traditam, nondum constar.

Hujus igitur à Diametro Axève distantia, propositione sequente tradetur, (atque, in solidis, tertium adhuc æquilibrii planum,) ut ipsum centri punctum determinetur.

PROP. VIII.

Semiparabolæ, Semiparaboloidis, aut Complementi utriusvis; Planive Reciproci (centrum gravitatis habentis;) A: Fig. 131.
ad diametrum axémve adjacentis: *Distantia Centri Gravitatis ab illâ Diametro Axève*, est, ad *distantiam inde puncti medii* (vel centri gravitatis Basis,) ut *Index seriei Unitate auctus*, ad *Duplum ejusdem Indicis unitate auctum*.

In Solidis autem; pro *Basis puncto medio* (quod in planis est basis centrum gravitatis) sumendum est *Centrum Gravitatis Basis*; Eritque totius Centrum gravitatis, in eo per Diametrum Axémve plano quod per illud Basis Centrum-gravitatis transit; adeoque & per omnium *Basi paral-*

Fig. 129. parallelorum Planorum, (quæ similiter posita supponimus,) centra gravitatis.

Fig. 131. (Quod quidem planum, in solidis ex Planorum semiconversione (aliâve conversione quâvis imperfectâ) circa axem illum descriptis; (qualia sunt, Semiconus; Semipyramis; Semi-conoides vel Semi-Pyramidoides Parabolicum, vel Paraboloidicum; Semi-solidum ex conversione figuræ Reciprocae circa axem suum; & horum omnium segmenta quælibet, duobus per axem planis, interjecta:) illud est, quod Basis arcum bifecat.)

Atque, pro Indicis seriei Duplo; ponendum erit *Sesquialterum ejusdem Indicis*.

C. Adeoque; hujusmodi Dimidiatarum figurarum Planarum Fig. 132. (quotquot habent) omnium; & Solidarum circa illas constructarum, quarum Basis Centrum-Gravitatis notum est; Centrum gravitatis determinatur.

D. Nempe; In Semiparabolâ; distat à Tangente Verticis, $\frac{1}{2}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{4}$ Latitudinis (seu Baseos) Parallelogrammi Circumscripti, vel $\frac{1}{2}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloide Cubico; distat à Tangente Verticis, $\frac{4}{7}$ altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{2}$ Semi-latitudinis.

In Semiparaboloide Biquadratico; distat à Tangente Verticis, $\frac{5}{6}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{3}$ Latitudinis; vel, $\frac{5}{6}$ Semi-latitudinis.

In Semiparaboloide Surdefolidali; distat à Tangente Verticis, $\frac{11}{12}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{4}$ Latitudinis; vel, $\frac{11}{12}$ Semilatitudinis. Et similiter in Semiparaboloidibus sequentibus, mutatis mutandis.

In Semiparabolæ Complemento; Distat à rectâ per Complementi verticem (quæ est parabolæ Diameter,) $\frac{1}{2}$ Altitudinis; à Diametro Complementi, (quæ est Parabolæ Tangens in vertice,) $\frac{1}{3}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{2}$ Semi-latitudinis.

In

PROP. VIII. *De Calculo Centri Gravitatis.* 173

In Complemento Semiparaboloidis Cubicalis; distat à vertice Parallelogrammi circumscripti (vel Paraboloidis Diametro) $\frac{1}{4}$ Altitudinis; à Diametro (vel Paraboloidis Tangente in vertice,) $\frac{1}{12}$ Latitudinis; vel, $\frac{1}{8}$ Semilatifudinis.

In Complemento Semiparaboloidis Biquadraticalis; distat à verticis rectâ, (basi parallelâ,) $\frac{1}{8}$ Altitudinis; à Diametro ejus, $\frac{1}{16}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{12}$ Semilatifudinis.

In Complemento Semiparaboloidis Surdesolidalis; distat à verticis rectâ, $\frac{1}{6}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{12}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{8}$ Semilatifudinis. Et in sequentibus similiter, mutatis mutandis.

Figurâ Reciproca dimidiatâ, secundum seriem cujus Index non est major, (hoc est, non minus negativus,) B. quam $-\frac{1}{2}$, constitutâ; Centrum Gravitatis non habent. Sin major sit index quam $-\frac{1}{2}$; sequuntur serierum directarum leges. Nempe, Fig. 133.

Si Index sit $-\frac{1}{3}$; Centrum gravitatis distat à vertice figurâ, $\frac{1}{3}$ Altitudinis; ab ejus Diametro, $\frac{1}{6}$ Latitudinis (seu Baseos) Inscripti Parallelogrammi; vel $\frac{1}{4}$ Semilatifudinis.

Si Index sit $-\frac{1}{4}$; distat à Vertice, $\frac{1}{4}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{8}$ Latitudinis; vel, $\frac{1}{6}$ Semilatifudinis.

Si Index sit $-\frac{1}{5}$; distat à Vertice, $\frac{1}{5}$ Altitudinis; à Diametro $\frac{1}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{8}$ Semilatifudinis. Et sic deinceps.

Si Index sit $-\frac{1}{6}$; distat à vertice, $\frac{1}{6}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{12}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{10}$ Semilatifudinis.

Si index sit $-\frac{1}{7}$; distat à Vertice, $\frac{1}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{14}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{12}$ Semilatifudinis.

Si Index sit $-\frac{1}{8}$; distat à Vertice, $\frac{1}{8}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{1}{16}$ Latitudinis; vel $\frac{1}{14}$ Semilatifudinis. Et in reliquis similiter, mutatis mutandis, fiet ex calculo judicium.

In

- E. In Figuris Solidis, idem plane obtinet atque in Planis, secundum easdem series constructis; nisi quod, pro *Semi-Latitudine* in planis, ponenda erit in Solidis (in illo plano quod per diametrum axemve, & Centrum-gravitatis Basis, incedit,) *Distantia Centri-gravitatis* Basis, à Diametro vel Axe; vel, pro *Latitudine* in illis, *Dupla illa Distantia* in his. Atque, pro *Duplo Indicis*, Indicis *seſquialterum*.

Putà; Si seriei Index sit, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ &c. 2, 3, 4, 5, &c. — $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ &c. qui, in Planis (ut dictum est) exhibet $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ &c. *Latitudinis*; vel $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ &c. *Semilatitudinis*; Substituendum erit, in Figuris Solidis, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31}, \frac{1}{32}, \frac{1}{33}, \frac{1}{34}, \frac{1}{35}, \frac{1}{36}, \frac{1}{37}, \frac{1}{38}, \frac{1}{39}, \frac{1}{40}, \frac{1}{41}, \frac{1}{42}, \frac{1}{43}, \frac{1}{44}, \frac{1}{45}, \frac{1}{46}, \frac{1}{47}, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \frac{1}{50}, \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \frac{1}{53}, \frac{1}{54}, \frac{1}{55}, \frac{1}{56}, \frac{1}{57}, \frac{1}{58}, \frac{1}{59}, \frac{1}{60}, \frac{1}{61}, \frac{1}{62}, \frac{1}{63}, \frac{1}{64}, \frac{1}{65}, \frac{1}{66}, \frac{1}{67}, \frac{1}{68}, \frac{1}{69}, \frac{1}{70}, \frac{1}{71}, \frac{1}{72}, \frac{1}{73}, \frac{1}{74}, \frac{1}{75}, \frac{1}{76}, \frac{1}{77}, \frac{1}{78}, \frac{1}{79}, \frac{1}{80}, \frac{1}{81}, \frac{1}{82}, \frac{1}{83}, \frac{1}{84}, \frac{1}{85}, \frac{1}{86}, \frac{1}{87}, \frac{1}{88}, \frac{1}{89}, \frac{1}{90}, \frac{1}{91}, \frac{1}{92}, \frac{1}{93}, \frac{1}{94}, \frac{1}{95}, \frac{1}{96}, \frac{1}{97}, \frac{1}{98}, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ &c. *Distantiæ* Centri gravitatis Basis, à Diametro vel Axe.

- F. Habet autem Centrum Gravitatis Figura Solida, si seriei Index saltem major sit, quam — $\frac{1}{2}$.

- G. Si quando igitur ad communem Rectam per Verticem, (aut aliam unam aliquam rectis per verticem parallelam,) contrario situ ponantur hujusmodi figuræ (planæ, solidæve,) similes & æquales: Erit Centrum Gravitatis in illa communi rectâ, atque in eâ à communi Diametro Axæve distantia, quam in singulis casibus jam determinavimus. Sin vel dissimiles vel inæquales vel dissimili situ positæ sint ejusmodi figuræ dimidiatæ; cognita tamen erit commune simul utriusque Centrum Gravitatis; per 27 Cap. 4.

Quòdque de figuris Truncatis aut aliàs Multatis, vel Aggregatis, in duabus propositionibus præcedentibus dictum est: Et hic similiter intelligendum est.

- A. **E**ro enim ad AD diametrum vel axem, adjacens istiusmodi Figura Plana dimidiata, cujus parallelæ rectæ figuram complentes, sint secundum seriem directam cujus Index sit S; vel reciprocam, cujus Index

PROP. VIII. De Calculo Centri Gravitatis. 175

dex — S. Cúmque singularum rectarum centra gravitatis sint ipsarum puncta media, (per 2 hujus,) atque perinde ponderant singula acsi ex illis punctis mediis suspenderentur tota, (per 16 Cap. 4.) sintque dimidiæ totis proportionales (per 5 Cap. 1. vel 15 El. 5.) similis erit series Distantiarum centrorum gravitatis (à diametro vel axe) atque ipsorum Magnitudinum seu Ponderum; nempe cujus Index sit item S, vel — S. Cúmque Momentorum seu Ponderationum ratio, composita sit ex rationibus Ponderum & Distantiarum, (per 18 Cap. 4.) Erit Momentorum series, ea quæ Indicem habet S + S, vel — S — S; hoc est 2 S, vel — 2 S. Est ergo (per 1 hujus,) summa Ponderum seu Magnitudinum, hoc est Figura exposita; ad seriem totidem ultimo æqualium, hoc est ad Parallelogrammum super eadem Base æque altum; (puta NP;) ut 1 ad S + 1; vel (in reciprocis) ut 1 ad — S + 1, (adeoque, si — S major quam — 1, erit — S + 1 affirmativus; & propterea figuræ magnitudo finita: secus, infinita,

vel plusquam infinita:) nempe $\frac{1}{S+1} NP$, vel $\frac{1}{-S+1} NP$. Et summa Momentorum, ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, Momentum figuræ expositæ ad momentum Parallelogrammi in distantia D suspensi,) ut 1 ad 2 S + 1, vel ad — 2 S + 1, (quod itaque finitum erit, si — 2 S major sit quam — 1, vel — S major quam — $\frac{1}{2}$; secus, infinitum:) nempe $\frac{1}{2S+1} NPD$, vel $\frac{1}{-2S+1} NPD$.

Hæc itaque summa, per illam divisa, distantiam exhibet Centri gravitatis ab AD, (per 24 Cap. 4.) Nempe; in seriebus directis, $\frac{S+1}{2S+1} D$: In Reciprocis, $\frac{-S+1}{-2S+1} D$. Quod erat propositum.

Requiritur autem, in Reciprocis, quò Centrum gravitatis habeant, ut — 2 S major sit quam — 1; vel — S, major quam — $\frac{1}{2}$. Nam, nisi — S + 1 sit terminus affirmativus; nullum erit Centrum gravitatis, per prop. præced. Atque, nisi & — 2 S + 1 sit item affirmativus, (hoc est, — 2 S major quam — 1, per 8 Cap. 1.) nec-dum erit centrum gravitatis: quippe Affirmativi — S + 1, ad — 2 S + 1 qui vel

B.

vel 0 sit, vel Negativus; ratio erit vel infinita, vel etiam plusquam infinita; adeoque $\frac{-S+1}{-2S+1}D$, distantia infinita, vel plusquam infinita; ipsūque propterea Centrum gravitatis Nusquam. Unde patet determinatio.

C. Cūque termini ultimi, (hoc est, Basis,) centrum gravitatis sit in ipsius puncto medio (ut ostensum est, ex 2 hujus,) ipsius Distantia D , erit semi-Latitudo figuræ, sive Parallelogrammi super eadem basi æque alti. Unde constat particularium casuum Calculus, quod ad distantiam à diametro spectat.

D. Sed & Centri Gravitatis à Plano per verticem, distantia constat, ex 6 & 7 hujus. Ergo & ipsum Centri Gravitatis punctum; (per 26 Cap. 4.) Quod item erat Propositum. Idem nempe quod in singulis casibus designavimus: Ut ex Calculo patet; ne opus sit ut singulis casibus immoremur.

E. In figuris Solidis: De Centri gravitatis Distantiā à Vertice, similiter constat atque in Planis; ex 6 & 7 hujus.

Quodque sit in Plano per Diametrum & Centrum Gravitatis Basis (adeoque & reliquorum basi parallelorum Planorum Centra Gravitatis; propter omnia, quod supponimus, plana similia, & similiter ad diametrum posita;) constabit ex 4 hujus.

Quod sit in eā quam dicimus à Diametro vel Axe distantia; sic item constabit. In similibus Planis (ex quibus constari Solidum intelligatur) Centra Gravitatis sunt similiter sita; (quod ex 4 Cap. 4. & 5 Cap. 1. demonstrabitur;) adeoque ab homologis punctis distant in ratione laterum homologorum; vel, rectorum utcumque in suis respectivè planis similiter positarum; (quod ex def. 1. & prop. 4. El. 6. demonstrabitur;) Cūque, ob similem, quem supponimus, planorum ad Diametrum Axemve situm; homologa similium Planorum puncta sint in Diametro vel Axe constituta: Distantiæ Centrorum gravitatis à Diametro vel Axe, sunt in ratione laterum Homologorum, sive rectorum similiter positarum, in suis respectivè planis: Hoc est; (quod ex prop. 20. El. 6. demonstrabitur,) in subduplicatā ratione Planorum. Adeoque; Si series Planorum, Indicem habeat S , vel $-S$; series Distantiarum, Indicem habebit $\frac{1}{2}S$, vel $-\frac{1}{2}S$: Et series Momentorum, ut quæ sunt in ratione ex rationibus Ponderum & Distantiarum Centrorum Gravitatis composita, per 18 Cap. 4.) Indicem habebit $S + \frac{1}{2}S$, vel $-S - \frac{1}{2}S$; hoc est $\frac{3}{2}S$, vel $-\frac{3}{2}S$. Est igitur (positis P , pro Pondere seu Plano ultimo; N , pro numero Planorum, ex quibus constari intelligatur Solidum; D , pro distantia Centri gravitatis

Basis,

PROP. VIII. De Calculo Centri Gravitatis. 177

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{S+1} NP \right) \frac{2}{3S+2} NPD \left(\frac{2S+2}{3S+2} D \right. & \text{Basis, à Diametro vel} \\ & \left. - \frac{1}{S+1} NP \right) \frac{2}{3S+2} NPD \left(\frac{-2S+2}{3S+2} D \right. & \text{Axe;) } \frac{1}{S+1} NP, \\ & \text{vel } \frac{1}{S+1} NP, & \\ & \left(\frac{1}{S+1} NP \right) \frac{2}{3S+2} NPD \left(\frac{-2S+2}{3S+2} D \right. & \text{Solidum, sive Pla-} \\ & \text{Solidum, sive Pla-} & \text{norum Ponderum-} \\ & \text{ve Aggregatum :} & \\ & \frac{1}{3S+1} NPD, \text{ vel } \frac{1}{-3S+1} NPD; \text{ sive } \frac{2}{3S+2} NPD, & \\ & \text{vel } \frac{2}{-3S+2} NPD; \text{ summa Momentorum, sive Solidi Momen-} & \\ & \text{tum vel Ponderatio. Adeoque divisâ summâ Momentorum, per sum-} & \\ & \text{mam Ponderum; prodibit } \frac{2S+2}{3S+2} D, \text{ vel } \frac{-2S+2}{-3S+2} D, \text{ distan-} & \\ & \text{tia Centri gravitatis Solidi, à diametro vel axe: Nempe, ea quæ sit} & \\ & \text{ad D distantiam Centri Gravitatis Basis, ut } 2S+2 \text{ ad } 3S+2, \text{ aut} & \\ & \text{— } 2S+2 \text{ ad — } 3S+2; \text{ hoc est, ut } S+1 \text{ ad } \frac{1}{2}S+1, \text{ aut} & \\ & \text{— } S+1 \text{ ad — } \frac{1}{2}S+1. \text{ Quod erat demonstrandum.} & \end{aligned}$$

Cumque, in Figuris Reciprois, quo Centrum gravitatis habeant, non solum requiratur, ut $-S+1$ sit terminus positivus, (per prop. præced.) Sed & $-\frac{1}{2}S+1$, (ne ratio illius ad hanc sit vel Infinita, vel plusquam Infinita; adeoque, propter Infinitam, vel plusquam infinitam distantiam, Centrum gravitatis nusquam sit:) major esse debeat (seu minus negativus) $-\frac{1}{2}S$, quam -1 ; sive $-S$, quam $-\frac{2}{3}$: inde constat determinatio.

Porro; quum, in Figuris Solidis, secundum seriem sive Directam, sive Reciprocam constitutis, ostensum sit; tum, quantum distet Centrum gravitatis (adeoque & planum Equilibræ) à plano per Verticem basi parallelo; tum, in quo per axem plano reperiatur; tum denique, quantum in illo plano à diametro vel axe distat: Datur ipsum Gravitatis Centrum; dummodo Centrum Gravitatis basis non ignoretur. (per 26 Cap. 4.) Quod erat propositum. Nempe illud ipsum quod in singulis casibus designat propositio: Ut ex Calculo patebit.

Denique: Quod, de duabus hujusmodi Figuris Dimidiatis, (similibus & æqualibus,) utrinque ad eandem rectam contrario situ positæ; dictum est: constabit ex 5 hujus. Quodque de iisdem (planis solidive) figuris dimidiatis (aut quæ harum instar sunt) truncatis, aliasve mulctatis, vel aggregatis, additur, Constat ex 27 Cap. 4.

A a

SCHO-

F.

G.

SCHOLIUM.

IN præcedentium aliquot propositionibus; in figuris Parabolicis omnibus, & Paraboloidicis, eorumque Solidis, Centra gravitatis determinavimus. Neque hoc tantum in Figuris integris: Sed & (quod nescio an alii nobis priores fecerint) in Figuris Dimidiatis; ut Semi-parabolis, Semi-paraboloidibus, &c. etiam in figuris Reciprocis (quotquot habent) Dimidiatis: Atque in horum omnium Semi-solidis; aut etiam, Solidorum portionibus quibuscumque, duobus per axem planis, interjectis.

De Figuris autem Reciprocis (ut $ADB\beta\delta$), speciatim monendum est; Utut hæc naturâ suâ sint utrinque in infinitum continuabiles, (sunt utique AD , $A\delta$, ad curvam $B\beta$, Asymptotæ;) nos tamen hic eas consideramus ut Base BD terminatas, ad Diametrum ordinatim-politâ (sicut & Parabolas aliasque figuras indefinitè continuabiles, Base pro arbitrio claudimus;) sed ad partes $\beta\delta$ indefinitè continuatas.

Cumque harum aliquas magnitudinè simpliciter Infinitas ostendimus (nempe, cum Index seriei est -1 ; quo casu $B\beta$ curva, est vera Hyperbola, cujus Asymptotæ sunt AD , $A\delta$;) Alias verò vel Finitas, vel plusquam Infinitas: sunt quidem hæc figuræ ad easdem curvas utræque terminatæ. Quippe, si $ADB\beta\delta$, terminata basi BD , interminata verò ad partes $\beta\delta$, sit Finita; eadem ex parte $\beta\delta$ terminata, & interminata ex parte BD , erit Plusquam-infinita: & contra. Quæ verò ad veram Hyperbolam ponitur (seriei indicem -1 habens) utrâvis parte terminetur, (modo ne utrâque,) est pariter Infinita: Atque hæc sola. Quod prop. 105. Arithm. Infin. ostendimus.

Constat autem, ex his Figuris Reciprocis; (quæ inter Geometriæ miranda censentur;) Figuras longitudine Infinitas (Planas Solidasve) Magnitudine Finitas esse posse. Nempe, si $ADB\beta\delta$ ex parte $\beta\delta$ interminata, seriei Indicem habeat negativum quidem, sed majorem quam -1 .

Eademque figura, (longitudine infinita, sed finita magnitudine,) si utrinque ad AD diametrum similiter ponatur; habebit (in ipsâ AD) Centrum gravitatis.

Eadem verò figura dimidiata $ADB\beta\delta$, indicem habens negativum sed majorem quam -1 ; utut magnitudinè finita sit, centrum tamen Gravi-

PROP. IX. *De Calculo Centri Gravitatis.* 179

Gravitatis non habebit; nisi & major sit Index quam $-\frac{1}{2}$. Ne quidem quæ ex duabus hujusmodi dimidiatis utrinque ad infinitam $A\delta$ similiter positis conflatur. Distabit utique ab A versus δ , distantia saltem infinita, vel datâ quavis majore.

Sin major sit Index quam $-\frac{1}{2}$, Centrum Gravitatis habebit, tum dimidiata illa figura, tum & ex duabus utrinque ad $A\delta$ positis conflata.

Item; Figura istiusmodi plana, magnitudine Finita esse potest; (nempe cum Index major est quam -1 ;) & Solida tamen, quæ hujus conversione fit, magnitudine Infinita: (Nempe, si non & major sit, Index quam $-\frac{1}{2}$.) Quippe, si series Rectarum, planum complementium, indicem habeat $-\frac{1}{2}$; series Planorum, quæ harum conversione circa AD sunt, Solidum complementium, (propter Plana in ratione duplicatâ rectarum in illis similiter positarum,) Indicem habebit -1 ($= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$.) eritque propterea magnitudinis infinitæ. Sin series Rectarum Indicem habeat minorem quam $-\frac{1}{2}$; series Planorum habebit indicem minorem quam -1 ; adeoque Solidum erit magnitudinis plusquam infinitæ. Quæ omnia, ex supra demonstratis constant.

Contrà verò; Istiusmodi Figura Plana, non modo magnitudine finita quævis; sed & infinita, modò Index major sit quam -2 ; circa $A\delta$ conversa: Solidum exhibebit magnitudine finitum: Et quidem, modò Index major sit quam -1 ; quod Centrum habeat Gravitatis. Quod ex prop. seq. patëbit.

PROP. IX.

- Fig. 129,
131,
133.
- A. Si Figura Plana (integra an dimidiata;) cujus ad diametrum vel axem ordinatim-applicata recta Planum complentes sint secundum seriem aliquam vel ex Directis (def. 1. hujus, definitis;) vel ex Reciprocis (def. 2. hujus, definitis;) cujus Index major sit quam -2 ; intelligatur, circa rectam per verticem ordinatim-positam, converti: Solidum conversione factum, erit magnitudinis finitæ. Nempe quod sit, ad Parallelepipedum, cujus basis sit parallelogrammum super eadem cum plano base æquæ altum, altitudo verò æqualis Peripheriæ (integræ vel partiali, prout conversio fuerit vel perfecta vel imperfecta) Diametri vel Axis puncto quod in base est, descriptæ: ut 1, ad *indicem seriei in plano expositæ binario auctum*.
- B. Ejusque figuræ, si Integra sit (hoc est, utrinque ad Diametrum Axemve similiter posita; sitque conversio integra;) Centrum gravitatis erit ipsum Punctum verticis Diametri Axisve.
- Si verò (figura plana) Dimidiata sit; ejusque ordinatim-applicatae sint, ad diametrum vel axem, ad angulos rectos; sitque Index vel affirmativus, vel saltem major quam -1 : Solidum illud, Centrum habebit Gravitatis. Nempe, in illâ, à plano ad expositum planum recto, perque ejus Axem incedente, distantia; quæ est, ad distantiam puncti medii in base plani expositi; ut *Index seriei, plani expositi, binario auctus, ad duplum ejusdem Indicis binario auctum*.
- C. Sin major sit Index ille quam -2 , sed non item major quam -1 : Habebit solidum illud magnitudinem finitam, sed non & centrum gravitatis.

Adæoque

Adeoque ; si dimidiata illa figura Plana, sit reciproca secundum seriem cujus Index — 1 ; (quo casu curva, est vera Hyperbola ;) & convertatur circa verticem infinitum (quæ est Asymptotarum una interminata) solidum conversione factum, erit magnitudinis finitæ, (estque Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum* :) Centrum autem gravitatis non habebit. Est utique solidum illud, æquale parallelepipedo, cujus Basis sit Parallelogrammum plano inscriptum, altitudo æqualis cuivis ex peripheriis extimis Solidi: Vel ; (quod eodem recidit) duplo Cylindri, parallelogrammo illo circa rectam verticis converso descripti. Distantia verò Centri Gravitatis, à Plano per axem expositi plani, simpliciter Infinita.

Si Plani series Indicem habeat $-\frac{1}{2}$: Solidum conversione factum, erit ad tale Parallelepipedum (vel duplum Cylindri, ut 1 ad $\frac{1}{2}$ ($= -\frac{1}{2} + 2$;) vel, ut 2 ad 1. Distantia Centri Gravitatis, esset ad semi-latitudinem Parallelogrammi plano inscripti ; ut $\frac{1}{2}$, ad — 1 : plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit.

Si Plani series Indicem habeat $-\frac{1}{3}$; (quæ est Reciproca semi-parabolæ :) Solidum erit ad tale Parallelepipedum (vel Cylindri duplum,) ut 1 ad $\frac{2}{3}$ ($= -\frac{1}{3} + 2$;) vel, ut 2 ad 3. Distantia Centri Gravitatis, ad semi-latitudinem Parallelogrammi ; ut $\frac{2}{3}$ ad 1, seu ut 3 ad 2.

Si Plani series Indicem habeat $\frac{1}{3}$; (quæ est semi-parabolæ :) Solidum est, ad Parallelepipedum (seu Duplum Cylindri, circumscripto semi-parabolæ Parallelogrammo descripti,) ut 1 ad 2 $\frac{1}{3}$ ($= \frac{1}{3} + 2$:) vel, ut 2 ad 5. Distantia Centri Gravitatis, ad semi-latitudinem Parallelogrammi ; ut $\frac{1}{3}$ ad 3 ; seu, ut 5 ad 6.

Atque in reliquis similiter.
Eritque Solidorum ejusmodi, integrâ conversione descriptorum, Centrum Gravitatis (si quod est) in ipso conversionis

D.

E.

F.

G.

H.

I.

versionis Axe; ejusque illo puncto quod distantia jam tradita designat.

- K. Semi-solidorum verò, (aut aliàs imperfectâ conversione descriptorum,) Centrum gravitatis (siquod habent) est quidem in distantia jam assignata à plano quod ab axe plani expositi conversione describitur, & in illo per Axem conversionis plano, quod per Centrum Gravitationis figuræ planæ, expositi plani Axe descriptæ, transit:
- L. Atque in illa ab axe conversionis distantia, quæ est, ad modò dicti Centri gravitatis inde distantiam; ut *Index seriei expositi Plani Binariorum auctus*, ad eundem *Indicem Ternario auctum*; vel (quod eodem recidit) ut *Index seriei Solidi conversione facti Unitate auctus*, ad eundem auctum Binariorum.
- M. Quòdque de Solidis conversione factis dictum est: idem similiter intelligendum erit, de figuris aliis; si, pro Circulis (eorumve portionibus) conversione descriptis, intelligatur ex similibus figuris planis quibuscumque (circulis illis proportionalibus) similiter ad conversionis axem positus, Solidum conflare.
- Quòdque jam traditum est; supponendo ordinatim-applicatas in exposito Plano ad hujus diametrum vel axem ad angulos rectos constitutas; adeoque conversionis axem ad plana circa illum posita rectum esse: perinde verum erit, si ad axem utcumque inclinatum intelligantur similia illa plana parallela ordinatim-poni.
- N. Item; Si ejusmodi exposita figura plana dimidiata, cujus ordinatim-applicatæ non sint ad angulos rectos, sed ad diametrum suam utcumque inclinatæ; conversione suâ solidum describere intelligatur: describet expositi Plani Diameter, (quæque huic sunt parallelæ rectæ,) non quidem circulum, (ut hætenus;) sed superficiem conicam (convexam concavamve, prout angulus, quem cum conversionis axe facit Diameter illa, acutus obtu-

obtu-

PROP. IX. *De Calculo Centri Gravitas.* 183

obtusiusve fuerit:) ad quam tamen superficiem Conicam accommodabuntur omnia (mutatis mutandis,) quæ de Circulo illo, ejusve Plano tradita sunt.

Denique: Quæ de figurâ, circa rectam in vertice ordinatim-applicatis parallelam conversâ, hic tradita sunt; ad conversionem circa rectas alias, alio situ positas, facile accommodantur; Puta, circa Basin, aliasve huic parallelas, sive infra sive supra figuram positas; circa Axem, aut hic parallelas, ultra citrave figuram positas, sive adjacentes, sive utcunque remotas; aliasque situ multis modis variato. Quibus casibus omnibus, pro re nata, principia jam tradita facile accommodabit prudens Geometra.

Est enim expositum Planum, cujus ordinatim-applicatæ ad AD A. diametrum vel Axem, sint secundum seriem directam ADB , Fig. 129, cujus Index sit f ; vel secundum seriem reciprocam, ut $ADB\beta$, 131, cujus Index sit $-f$. Atque intelligatur circa rectam, ad eandem AD , 133. in A , ordinatim-applicatam, puta $A\delta$; converti. Describent rectæ sic conversæ, superficies curvas Cylindricas circa $A\delta$ ut Axem; quæ quidem superficies curvæ æquantur totidem Parallelogrammis quorum Bases æquantur rectis conversis, altitudines verò peripheriis uno aliquo eorum puncto descriptis: (Quippe, curva Cylindrica, expansa, cum hujusmodi parallelogrammo coincidet.) Sunt igitur illæ superficies Curvæ Cylindricæ, in ratione, ex rectarum conversarum, & peripheriarum sic descriptarum, rationibus compositæ: (per 23 El. 6.) hoc est, (propter peripherias radiis proportionales,) ex rectarum conversarum, & earum à recta per verticem $A\delta$ distantiarum, composita. Est autem (propter æqualem quam supponimus rectarum crassitiem) series hæc distantiarum, series Primarum, cujus index 1; adeoque (propter f , vel $-f$, indicem seriei Rectarum,) series superficialium Cylindricarum rectis descriptarum, (vel, his æqualium Parallelogrammorum,) Indicem habebit $f+1$, vel $-f+1$. Quæ itaque simul omnia, (hoc est, Solidum conversione factum,) ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum super AB parallelogrammum, altitudinem habens æqualem peripheriæ puncto D descriptæ; vel, quod Parallelepipedo illi æquale est, a 1 Duplum Cylindri,

dri, parallelogrammo illo circa Verticis rectam conversione descripti:) ut 1 ad $f+2$, vel ut 1 ad $-f+2$. (per 1 hujus.) Hoc est, (posito P pro uno ex æqualibus parallelogrammis, & N, pro omnium numero, adeoque NP pro Parallelepipedo,) $\frac{1}{f+2}$ NP, vel $\frac{1}{-f+2}$ NP. Quod quidem magnitudine finitum erit, si vel f sit Index Affirmativus, vel si Negativus $-f$ major sit quam -2 . (Quippe tum ratio 1 ad $f+2$, vel ad $-f+2$, erit ratio finita: nempe ut terminus positivus ad positivum; non ut Positivus ad 0, vel minus quam 0.) Quæ erant demonstranda. Atque hinc particularium casuum calculus deducetur.

E. Porro; Si Figura plana sic conversa, dimidiata sit, (nam de Integrâ, dubium non est, quin Centrum gravitatis, absolutâ conversione, erit in A puncto:) sintque ad axem AD ordinatim applicatæ, ad angulos rectos: Erunt superficierum illarum curvarum Cylindricarum centra gravitatis in media illarum longitudine; (per 2 hujus.) adeoque (propter dimidiata integris proportionalia) in ratione rectarum in plano, quarum conversione hæ superficies Cylindricæ describuntur: Hoc est; in serie cujus Index est f , vel $-f$. Cumque superficierum illarum, seu Ponderum, series Indicem habeat $f+1$, vel $-f+1$, (ut supra ostensum est;) & series distantiarum Centrorum Gravitatis a Plano per AD, indicem habeat f , vel $-f$, (ut ostensum est modo:) Quæ ex utrisque oritur (per 18 Cap. 5.) Momentorum series, (respectu perpendicularis Plani per AD,) indicem habebit $2f+1$, vel $-2f+1$. Adeoque (posito D pro distantia Centri gravitatis superficiei Cylindricæ rectâ DB descriptæ; quæ est semi-latitudo Parallelogrammi AB;) erit (per 1 hujus) $\frac{1}{2f+2}$ NPD, vel $\frac{1}{-2f+2}$ NPD, simul omnium, hoc est, Solidi, Momentum.

Quod quidem si per $\frac{1}{f+2}$ NP summam Ponderum, dividatur; prodibit $\frac{f+2}{2f+2}$ D, vel $\frac{-f+2}{-2f+2}$ D, distantia Centri Gravitatis a Plano per AD. Quæ quidem distantia, si sit vel f Index Affirmativus, vel Negativus $-f$ major quam -1 , adeoque $-2f+2$ terminus affirmativus, (propter affirmativi ad affirmativum rationem finitam,) finita erit: atque, in illâ, Centrum Gravitatis. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin

$$\frac{1}{f+2} NP) \frac{1}{2f+2} NPD \left(\frac{f+2}{2f+2} D \right.$$

Fig. 132,
134.

$$\frac{1}{-f+2} NP) \frac{1}{-2f+2} NPD \left(\frac{-f+2}{-2f+2} D. \right.$$

Sin major quidem $-f$ quam -2 ; non autem major quàm -1 : Habebit quidem solidum illud magnitudinem finitam; (ut ostensum est:) Sed non & Centrum Gravitatis. Erit enim $-f+2$ ad $-2f+2$, ratio positivi, vel ad 0, vel ad negativum; adeoque distantia Centro Gravitatis debita, vel infinita erit, vel plusquam infinita; quod igitur nusquam erit. Quod item Affirmatum erat.

Quæque hinc, ad particulares casus enumeratos (alióve quolibet) D. deducuntur: Ex calculo patent.

Putæ: Si $ADB\beta\delta$ Plani series indicem habeat -1 , quæ est Trianguli reciproca; (quo casu, curva $B\beta$, est Hyperbola; cujus Asymptotæ sunt AD , $A\delta$: ut prop. 92, 95, Arithm. Infin. demonstravimus: Adeoque, solidum istius conversione circa $A\delta$ descriptum, est Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*; ut ex hujus apud Torricellium definitione constat:) Erit Planum illud Magnitudine Infinitum, (per 7 hujus.) Si tamen, circa $A\delta$ conversum; intelligatur Solidum describere; erit hoc magnitudinis finitæ; tantæ scilicet quanta in Propositione designatur. Cum enim, superficies Cylindrica, rectâ DB descripta; vel, huic æquale, Parallelogrammum cujus Basis DB , altitudo æqualis peripheriæ puncto D descriptæ; sit P : atque huic æque-altum Parallelepipedum, super parallelogrammum AB erectum; sit NP : (cui quidem Parallelepipedo, æquatur Duplum Cylindri eodem Parallelogrammo circa $A\delta$ converso descripti: Nam, quâ ratione circulus radio AD descriptus, æquatur semissi Parallelogrammi cujus Basis est AD , altitudo æqualis Peripheriæ puncto D descriptæ; quod notum est: eadem & Cylindrus parallelogrammo AB descriptus, eandem habens altitudinem, æquabitur semissi Parallelepipedo: propter singula hujus Parallelogramma singulorum in illo Circulorum, respectivè sumptorum, dupla: & communem altitudinem DB ;) Sintque superficies Cylindricæ rectis ipsi DB parallelis descriptæ; (vel, his æqualia Parallelogramma quorum bases, eadem rectæ

B b

rectæ

rectæ, altitudines respectivis peripheriis æquales; (Series æqualium; propter $-f + 1 = -1 + 1 = 0$: (vel etiam; quia tum peripheriæ sunt in ratione distantiarum ab A δ directâ, & rectarum converfarum in earundem distantiarum ratione reciproca, adeoque tum Parallelogramma invicem æqualia tum & Superficies Cylindricæ; per 6 Cap. 1. vel 14 El. 6. Nempe, quod ob minorem basis peripheriam oritur decrementum, auctâ in eadem ratione altitudine compensatur; ut superficies Cylindricæ, rectis in A D B β δ plano ipsi D B parallelis descriptæ, sint invicem æquales:). Erunt simul omnes illæ superficies

Cylindricæ, sive quod ex his intelligitur constare Solidum; $\frac{1}{-f+2} NP$,

hoc est $\frac{1}{-1+2} NP = NP$; æquale scilicet ipsi Parallelepipedo, vel Duplo Cylindri, quod per NP designavimus. At verò; propter Distantias (à plano recta AD descripto) Centrorum gravitatis harum superficierum Cylindricarum, rectis conversis proportionales; adeoque secundum seriem cujus index -1 ex constructione: erit Momentorum seu ponderationum series, indicem habens $-1 = 0 - 1$. (nempe qui ex Indice seriei superficierum cylindricarum, 0; & Indice seriei distantiarum, -1 ; aggregatur) Adeoque summa momentorum, $\frac{1}{-1+1} NPD$; (nempe, quæ sit ad NPD, ut 1 ad $-1 + 1 = 0$; quæ ratio est infinita;) vel $\frac{1}{0} NPD$; quod per NP (quod est omnium Pondus, ut modò ostensum est) divisum: distantiam exhibet, centro gravitatis debitam, $\frac{1}{2} D$, infinitam. Quod igitur nusquam erit.

E. Similiter: Si Plani Series Indicem habeat $-f = -\frac{3}{2}$: (quod est magnitudine infinitum; per prop. 7 hujus.) Erit solidum, hujus Plani conversione factum, $\frac{1}{-f+2} NP = 2 NP$; magnitudine finitum. Sed summa momentorum $\frac{1}{-2f+2} NPD = \frac{1}{-1} NPD$, plusquam infinita. Et distantia Centro gravitatis debita; $\frac{1}{-2} D$, plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit.

F. Item: Si Plani Series Indicem habeat $-f = -\frac{1}{2}$; (cujus itaque ordina-

PROP. IX. *De Calculo Centri Gravitatis.* 187

ordinatim-applicatæ, sunt ordinatim applicatis in Parabolâ, reciprocè proportionales :) Planum hoc est magnitudine Finitum, (per 7 hujus.) Et Solidum conversione factum, item finitum; nempe

$$\frac{1}{f+2} NP = \frac{2}{3} NP. \text{ Eritque hujus Momentum, } \frac{1}{2f+2}$$

$$NP D = NP D, \text{ finitum. Et distantia Centri gravitatis, } \frac{-f+2}{2f+2}$$

$$D = \frac{2}{3} D, \text{ finita.}$$

Item: Si Plani Series Indicem habeat $f = \frac{1}{2}$, (quæ est Semi-para- G.

bolæ :) Solidum conversione factum, erit $\frac{1}{f+2} NP = \frac{2}{5} NP$. Hu-

jus momentum $\frac{1}{2f+2} NPD = \frac{1}{3} NPD$. Distantia Centri Gra-

vitatis, $\frac{5}{6} D$.

Atque ad eandem formam fiet judicium, quæcunque sit expofiti H.
Plani series istiusmodi ex definitis in def. 1, 2, hujus.

Erit autem, in Solidis hisce, integrâ conversione factis; Centrum I.
gravitatis, in ipso conversionis axe; per 5 hujus. Adeoque in ipsius Fig. 123,
illo puncto, quod distantia ab A, jam demonstrata, designat. 133.

Semi-solidorum verò, (quæ semi-conversione describuntur,) alia- K.
rumve portionum duobus per conversionis axem planis interjectarum, Fig. 132,
(putà, quæ conversionis integræ Triente, Quadrante, &c. descri- 134.
buntur;) Centrum gravitatis erit in illo per conversionis axem plano

quod per Centrum gravitatis figuræ planæ rectâ AD descriptæ (ade-
oque per reliquarum huic parallelarum, utpote similium & similiter
ad axem positarum, Centra Gravitatis,) transit: quod probabitur
ex 4 hujus.

Quòdque sit in eâ quam dicimus à conversionis axe distantia; sic L.

constat. Cum Superficies Cylindricæ ex quibus constari intelligatur
solidum, (ut supra ostensum est;) adeoque & harum portiones si-
miles quantacunque integræ conversionis parte descriptæ, (propter arcus
similes, peripheriis suis integris proportionales;) sint series indicem ha-
bens $f+1$, vel $-f+1$, (adeoque si extrema dicatur P, erunt

simul omnes ut $\frac{1}{f+2} NP$, vel $\frac{1}{-f+2} NP$;) sintque earum ab

axe conversionis distantia, adeoque (propter similitudinem figurarum
Bb 2 Centra

Centra Gravitatis similiter sita) distantiae suorum Centrorum gravitatis, rectarum in exposito plano quibus describuntur distantis ab A δ proportionales; adeoque ut series indicem habens 1, (ut supra ostensum est:) Erit momentorum series (respectu axis conversionis A δ) indicem habens $f+2$ vel $-f+2$, (nempe $f+1+1$ vel $-f+1+1$;) Et simul omnium Momenta (posito D pro distantia Centri gravitatis extimae superficiei, recta DB descriptae à conversionis axe A δ ;) ut

$$\frac{1}{f+3} \text{ N P D, vel } \frac{1}{-f+3} \text{ N P D: (per 1 hujus.) Quod, per } \frac{1}{f+2} \text{ N P,}$$

$$\text{vel } \frac{1}{-f+2} \text{ N P, summam Ponderum, divisum, exhibet } \frac{f+2}{f+3} \text{ D,}$$

$$\text{vel } \frac{-f+2}{-f+3} \text{ D, distantiam Centri gravitatis (si quod est) ab axe conversionis A } \delta. \text{ Quod erat propositum.}$$

M. Porro: Si pro circulis circa A δ axem conversione rectarum AD & huic parallelarum descriptis, dum sit D A δ angulus rectus; adeoque, axis A δ ad illos rectus: Intelligantur totidem circuli, his respectivè æquales, circa eandem A δ ut axem inclinatum, quocunque applicationis angulos circumpositi; figuram solidam complere: Vel etiam; si, pro circulis, intelligantur aliae figuræ planæ similes & similiter positæ, circulis illis proportionales: Eadem utcumque, quæ prius, manebit demonstrationum vis.

N. Vel denique; Si, propter D A δ angulum Acutum Obtusumve, conversâ circa A δ ut axem figurâ planâ ADB δ ; loco circulorum rectâ DA & huic parallelis describendorum, describantur conicæ superficies Convexæ Concavæ: Similiter ad superficiem hanc Conicam, rectâ DA descriptam; atque ad circulum eadem, ut prius descriptum; (& de reliquis similiter huic parallelis;) eadem accommodabitur Demonstrationum vis.

O. Denique, quemadmodum in Propositione hac egimus, de Solidis, conversione Planorum circa rectam per verticem Ordinatim-applicatis parallelam, descriptis; eorumque Centris Gravitatis: Pronus eram idem præstare in aliis Planorum conversionibus; putâ, si Parabola, aliavè ex jam tractatis figuris, circa Basem vel Axem, vel rectam Axî parallelam conversâ, intelligatur figuram Solidam describere; aliaque hujusmodi. Abstini tamen; partim, quia ad jam traditorum modum poterit his similia Lector ipse pro libitu plura subungere suo Marte: partim etiam, quia eadem, sequentium aliquot propositionum ope luculentius & simul universalius tradentur: maxime verò ne tardium

PROP. X. *De Calculo Centri Gravitatis.* 189

dium crearem Lectoribus si nimius essem in hisce congerendis; præsertim cum tanta feget hic se offerat, ut vel spicilegium carpenti nimis, intumescat Caput hoc De Calculo Centri Gravitatis.

SCHOLIUM.

TRadidimus hætenus, ea præsertim quæ figuras spectant, (planas solidasve,) ad quarum Diametros vel Axes, quæ ordinatim-applicantur (rectæ aut plana) sunt secundum ordinatam aliquam (ex iis quas def. 1 & 2 hujus capituli definivimus) seriem constituta. Quæ quidem ad centrum gravitatis in figuris innumeris determinandum viam aperiunt: Ex nostra *Infinitorum Arithmetica* plurimum petita: Quæ tamen adhuc facile ampliabit peritus Geometra, & pluribus adhuc casibus innumeris accommodabit.

Quoniam vero non omnes figuræ ordinatam hanc constitutionem fortiuntur: quò aliis utut inordinatis consulatur; sequente propositione methodum adhuc magis generalem exhibemus; ordinatis juxta atque inordinatis pariter applicabilem.

PROP. X.

Si dividi intelligatur Libra quævis, in partes quotlibet æquales, (numero vel finitas vel infinitas,) in distantis à motus sui Centro vel Axe (aut perpendiculari per axem plano) ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionalibus positas; ponderibus, aut ponderum particulis, (æqualibus aut inæqualibus, ordinatis vel inordinatis,) utcumque gravatas: Eaque quibus gravantur pondera, seu ponderum particulæ, in suam quæque ab axe motus (seu plano per axem) distantiam ducantur; hoc est toties sumatur quæque particula quoto est ipsa loco ab axe motus; (Quod variis methodis, prout cuique casui videbitur maxime expedire, consequi licebit:) Habetur (respectu ejusdem axis) Momentum omnium; &

& hujus ope) cognita magnitudine) distantia Centri Gravitatis, ab illo per axem plano.

Fig. 125. **I**ntelligentur, in AE librâ, partes invicem æquales, $AB, BC, CD, \&c.$ quarum distantia (aut mediorum in illis punctorum) à motus axe X , (aut, si partes intelligentur infinite exiguae, ab ipso A puncto) sint ut $1, 2, 3, \&c.$ arithmetice proportionales; suis quæque ponderibus (æqualibus aut inæqualibus) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \&c.$ onustæ. Quorum quodque toties sumatur, quoto est ab axe motus loco.

Putâ: $1\alpha, 2\beta, 3\gamma, 4\delta, \&c.$ seu $\alpha, \beta + \beta, \gamma + \gamma + \gamma, \delta + \delta + \delta + \delta, \&c.$ Hoc est (in partibus infinite exiguis) omnes onustæ rectæ $BB, CC, DD, \&c.$ Triangulum vel Ungulam $AE E$ complentes.

Aut etiam, $\alpha + \beta + \gamma + \delta, \beta + \gamma + \delta, \gamma + \delta, \&c.$ Hoc est, (in partibus infinite exiguis) omnes onustæ rectæ $AE, BE, CE, \&c.$ idem AE triangulum vel unguam complentes.

Aut etiam, $AE, AE - AB, AE - AC, AE - AD, \&c.$ Hoc est, totidem AE demptis omnibus $AB, AC, AD, \&c.$ Hoc est, (in partibus infinite exiguis,) Parallelogrammum seu Prisma (onustum) $AE E$, minus (onusto) Triangulo vel Ungula contraria $AE e$.

Aut etiam alio quocunque modo obtineatur aggregatum omnium toties respectu sumptorum quoto est quodque loco ab axe motus motum.

(Perinde autem est, si ipsa $\alpha, \beta, \gamma, \&c.$ quibus onerari censetur libra, sint lineæ rectæ, aut curvæ; si superficies planæ, aut Curvæ, aut mixtæ; si solida cujuscunque figuræ; aut etiam vires, imperus, &c. aut qualiacunque demum invicem homogenea, quæ aut gravia sint aut tanquam gravia habeantur.)

Dico; his politis, haberi momentum simul omnium respectu ipsius axis motus X : Adeoque (cognitâ etiam magnitudine simul omnium) distantiam Centri gravitatis ab X , seu perpendiculari plano super X motus axem erecto.

Cum enim (per prop. 12. Cap. 3. vel prop. 18. Cap. 4.) cujusque momentum sit in ratione ex ponderum & distantiarum rationibus composita; hoc est, in ratione factorum ex ponderibus in suas singulis distantias ductis; Habito horum aggregato, habetur momentum, (per 18 Cap. 3. vel 22 Cap. 4. Adeoque; si porro habeatur magnitudo simul omnium, habebitur (momento per magnitudinem diviso) distantia Centri gravitatis à perpendiculari per axem plano: per prop. 24. Cap. 4.

SCHO-

SCHOLIUM.

His traditis : Monendum porro est, Hoc, quod *Centrum Gravitatis* dicimus punctum ; etiam aliàs utile esse, quò, quæ ex se sunt Inæqualia, Æqualium instar, propter Æquipollentiam censeantur. Cujus specimen, in sequentibus aliquot Propositionibus exhibebimus.

PROP. XI.

Si, super Base quavis Planâ, erigatur Cylindrus, Prisma, Solidumve quodvis Prismaticum ; Planòq; utcunq; ad Basin inclinato, obliq; secetur: Frustrū, plano basis, planòq; secanti, interjectum, (quæ *Ungula* dici solet) æquatur Solido, super eâdem vel æquali Base, tantæ altitudinis, quanta est altitudo rectæ in Frusto, quæ basis Centro gravitatis insitit similiter inclinata atque ipsum Solidum. A.

Frustrūque Superficies, (exclusis Basibus oppositis, quibus interjacet) æquatur superficiei (exclusis item basibus oppositis) Solidi prismatici, super eâdem vel Isoperimetrâ Base, cujus latus tantæ sit longitudinis quanta est rectæ in frustrō quæ perimetri basis Centro gravitatis insitit, similiter inclinata atque ipsum Solidum. D.

Atque hinc etiam, de Frustrō, Frustrive superficiei, duobus utcunque Planis Obliquis, interjecto ; fiet judicium. C.

Intelligitur autem de Secante Plano, quod expositæ basis Plano occurrat vel extra figuram vel in ipsius saltem extremo ; non, intra figuram. Quippe hoc casu Solidum Prismaticum expositæ basi insitens æquè-altum rectæ Centro B.

Centro Gravitatis insistenti; æquabitur duarum frusti portionum Differentiæ, sub & supra basem expositam factarum, continuato Plano secante donec expositum Solidum Prismaticum item continuatum totum transversim secat. Et de frusti Superficie similiter.

- E. Hinc autem *Ungularum*, quas vocant, omne genus, mensura colligitur.
- F. Item *Ungularum* super eodem Plano, Rectæ, aut Curvæ in Plano descriptæ, (cujus saltem magnitudo nota sit) differentia, prout acies (seu planorum intersectio) propius aut remotius absit.

Aut etiam differentia momentorum ejusdem gravis; prout Axis Motûs propius absit aut remotius.

- G. Hinc speciatim habetur etiam Trilinei vel Polygoni cujuscvis, in Superficie Cylindrica descripti (planis utcumque positis terminati) magnitudo. Quod & de aliis corporum Prismaticorum Superficiebus figurisque iisdem sic inscriptis, intelligendum.

- A. **I**ntelligatur basis plana BD, (rectilinea, curvilinea, an mixta quælibet;) quæ (posito oculo in eodem plano ad infinitam distantiam) projiciatur in BD rectam: (adeoque & huic parallela plana quælibet, in parallelas rectas projecta:) Super quâ erigatur corpus Prismaticum quodvis, (puta, Cylindrus, si basis illa sit circulus; si rectilinea, Prisma Euclidean; saltem Solidum aliquod Prismaticum seu Columnare, quod ex infinitis numero rectis parallelis æqualibus constari intelligatur, quo sensu def. 1. Cap. 4. definivimus,) BD db: sitque super basis Centro gravitatis C, (quod propius remotiusve à B vel D intelligendum erit, prout Basis figura & situs postulerit,) erecta Cc, ipsis Bb, Dd, lateribus parallela. Intelligatur vero solidum hoc Prismaticum, alio adhuc plano ad planum basis oblique inclinato sectum; quod sectionem faciat $\beta\alpha\delta$; rectæ C coccurrens in α . Dico, frustum BD $\delta\beta$, æquale esse Solido Prismatico super eadem base, (vel huic æquali; propter æqualia Prismata & Cylindros quæ sunt super æqualibus basibus æque-alta;) altitudinem habenti eam quæ est rectæ C α ; (nempe, huic rectæ æqualem, si C α sit ad basin perpendicularis; vel saltem, æqualem perpendiculari à puncto α demissa ad planum basis BD.) In-

PROP. XI. De Calculo Centri Gravitatis. 193

Intelligatur utique Planorum $B D$, $\beta \delta$, communis sectio X Fig. 136. recta; quæ in unicum X punctum projiciatur; adeoque & huic parallelæ rectæ, in totidem puncta. Perque rectam X incedat Planum $X P$, plano $X B D$ rectum: quod in $X P$ rectam projiciatur. (Quam projectionis formam eo fine adhibemus, quem ad prop. 14. Cap. 4. insinuavimus; quò & phantasia plurium linearum confusione levetur, neque turbentur interim rationes: Quippe tantundem à plano $X P$ distabunt singula Solidi puncta; atque, ab $X P$ rectâ, eadem in plano projecta distant.)

Ponatur porro; Planum $X B D$, planum Horizontale; recta X , axis motûs; adeoque Planum $X P$, perpendiculare Planum per motûs axem. Adeoque in eâ ratione Ponderant singula Basis puncta B , C , D , &c. quâ distant ab axe motûs X , vel à perpendiculari per hunc Plano $X P$; per 4 Cap. 4. Hoc est, in ratione rectarum $X B$, $X C$, $X D$, &c. Sed & (propter C centrum gravitatis) tantundem simul omnia ponderant, atque si in C puncto intelligerentur omnia: per 16 Cap. 4. Adeoque (per 4 Cap. 4.) tantundem sunt simul omnes $X B$, $X C$, $X D$, &c. atque totidem ipsi $X C$ æquales.

Sed & (propter similia Triangula;) rectis $X B$, $X C$, $X D$, &c. proportionales sunt $B \beta$, $C \kappa$, $D \delta$, &c. Adeoque (per 12 El. 5.) tantundem sunt simul omnes $B \beta$, $C \kappa$, $D \delta$, &c. (frustum $B D \delta \beta$ complentes,) atque totidem $C \kappa$ (complentes Solidum Prismaticum $B D \gamma \gamma$, ipsi $C \kappa$ rectæ æquæ altum:) Adeoque $B D \delta \beta$ Frustum, est solido Prismatico $B D \gamma \kappa \gamma$, æquale. Quod erat demonstrandum.

Atque perinde omnino valet hæc demonstratio, siue basi $B D$ insistens solidum Prismaticum, ejusve frustum, Rectum sit, siue Inclinatorum: Dummodo eodem modo censeatur rectæ $C \kappa$ altitudo, atque prismatis, nempe rectâ perpendiculari a puncto κ ad basis planum demissa.

Supponit autem demonstratio, communem planorum sectionem X , extra figuram, (saltem non intra, sed in ipso forsan solidi extremo;) secus enim, non erit eadem Integri & Frusti Basis, quod supponit Propositio.

Sin planum secans, plano Basis intra figuram occurrat, intelligendum erit eousque deorsum continuandum solidum, ut Frusti segmenta duo sint; alterum supra & alterum infra $B D$ basim; duæque rectæ, $C \kappa$, duorum basis segmentorum Centris erectæ. De quibus intelligenda erit tum propositio, tum Demonstratio. Fig. 137.

Putâ: Si Planum $B D$ plano $\beta \delta$ secetur in X ; sumptis utriusque segmenti $B X$, $X D$, centris gravitatis C , C ; reliquisque ut prius constructis:

$C c$

fructis:

structis: Ostendetur Frustum $DX\delta$, æquale solido Prismatico $DX\gamma\gamma$ (super eadem base XD ,) & frustum $BX\beta$, ipsi $BX\gamma\gamma$.
 Fig. 138. Vel etiam, conjunctim: Retento communi totius Centro gravitatis C , Propter $XD\delta$ supernè (quod notetur signo $+$) & $BX\beta$ infernè (quod signo $-$ notetur) plano basis BD & secanti $\beta\delta$ interjecta; & solidum prismaticum $BD\gamma\gamma$ supernè (signo $+$ notandum:) Erit $+XD\delta - BX\beta = +BD\gamma\gamma$. Quod ex præcedente Demonstratione, mutatis ut res postulaverit signis $+$ $-$, elicietur.

Vel, si quis ejusmodi averfetur demonstrationem; idem aliàs sic ostendetur: Ducto Plano $\beta\delta$ ipsi BD parallelo; ostendetur, ut supra, frustum $\delta\beta\Delta$ æquale solido $\beta\delta\gamma\gamma$: Et, ablato utrinque $\beta XD\Delta$, manebit δXD æquale toti residuo $\beta XD\gamma\gamma$ hoc est, duobus $\beta XB + BD\gamma\gamma$; Adeoque (subductis utrinque βXB) erit $\delta XD - \beta XB = BD\gamma\gamma$. Quod erat ostendendum.

C. Porro: Si duobus utrunque planis idem solidum Prismaticum secetur, (sive eadem sit utriusque cum expositæ basis plano communis intersecio, sive secus;) simile erit præcedentibus judicium: Frustum scilicet utrisque planis interjectum; istiusmodi Prismatum seu solidorum Prismaticorum Aggregato vel Differentiæ (ut res postulaverit) æquabitur.

Fig. 139. Puta: Si solidum quodvis Prismaticum, cujus exposita basis aliqua plana sit BD , ejusque Centrum gravitatis C , per quod transeat $c\alpha Cc$: Quod duobus utrunque planis oblique secetur; puta in $\beta\alpha\delta$, & bcd . Ductis Planis $\gamma\gamma$, gcg , ipsi BCD parallelis: Ostendetur, ut supra, Frusto $BD\delta\beta$ æquale solidum $BD\gamma\gamma$; item Frusto $BDdb$, æquale solidum $BDgg$: Frustum igitur $\beta\delta db$ (duorum $BD\delta\beta$, $BDdb$, summa vel differentia, prout ex oppositis, vel iisdem partibus ejusdem BD sumantur,) Solido Prismatico $\gamma\gamma gg$ (duorum similiter $BD\gamma\gamma$, $BDgg$, summa vel differentia,) æquabitur. Quod ostendendum erat.

Fig. 140. Sin hæc duo Plana secantia, sibi invicem intra Solidum occurrant: idem hic monendum (atque similiter ostendetur) atque prius. Puta; Si $\beta\delta$, bd , plana se mutuo secant in X ; erit $\gamma\gamma gg$ solidum prismaticum, æquale duorum δXd , βXb , differentiæ. Adeoque de Frusto duobus utrunque Planis interjecto, constat. Quod erat propositum.

D: Denique: De Superficie Frusti, quod affirmatur; similiter omnino demonstrabitur atque de Frusto ipso: Hoc prius animadverso: Quod, Prismatis Solidive Prismatici cujuscunque magnitudo æstimatur, ex ductu altitudinis in Basin; Superficies verò Prismatis, Cylindri, Solidi-
 xc

PROP. XI. De Calculo Centri Gravitatis. 195

ve cujusvis Prismatici recti (exceptis basibus) Aream habet æqualem facto ex Lateris longitudine in Perimetrum Basis ducta. Unde, ut ex Solidi Prismatici Altitudine & Base cognitis, cognoscitur solidi magnitudo; quæque æquales habent tum Bases (utrunque dissimiles,) tum Altitudines (utrunque inæqualiter inclinata sint,) sunt inter se æqualia: Sic, hujusmodi Solidorum Rectorum Superficies (exceptis basibus) Aream habent cognitam, si tum Lateris Longitudo, tum Basis Perimeter, notæ sunt; quæque tum Bases habent Isoperimétras, (utrunque dissimiles vel inæquales,) tum Latera longitudine æqualia, æquales habent areas. Quæ quidem ex Elementis nota supponimus, vel inde demonstrabilia.

Construuntur igitur, ut prius; nisi quod C sit jam Centrum Gravitatis Fig. 136. (non quidem Basis, sed) Perimetri Baseos: Quoniam singula perimetri puncta B, D, &c. in eâ ratione ponderant quâ distant ab X motus axe; hoc est, in rectarum X B, X D, &c. ratione: quæ simul omnes (propter C Centrum gravitatis) tantundem sunt atque totidem X C æquales: Sûntque (propter similia Triangula) rectis X B, X D, X C, &c. proportionales B β , D δ , C κ , &c. Tantundem itaque sunt (per 12. El. 5.) simul omnes B β , D δ , &c. (superficiem Frusti recti B D δ β complentes,) atque totidem C κ , complentes superficiem Solidi Prismatici (demptis basibus) B D γ γ . Quod erat demonstrandum.

Si verò exponatur superficialis Ungula Scalena, cum ejusdem basis Prismaticæ, similiter inclinata (hoc utique supponimus in superficialibus, utut in solidis id non erat necesse,) comparanda: Similiter operabitur similis utrobique inclinatio, adeoque non destruet æqualitatem.

Vel etiam, (ut in Fig. 139.) præter duo plana Ungulam Scalenam terminantia, ut B κ δ , b c d; intelligatur tertium aliquod B C D, quod solidum secet ad angulos rectos; adeoque duas exhibeat Ungulas rectas (de quibus procedet præcedens demonstratio) quarum vel summae differentia æquabitur exposita Scalena.

Reliquæque, eodem modo demonstrantur de Frusti superficie, atque de ipso Frusto demonstrata sunt. Adeoque constat Propositum.

Atque hinc *Ungularum*, quas vocant, omne genus (Cylindricarum, Parabolicarum, &c.) Mensuram, (cognito vel supposito Basis Centro gravitatis, vel hujus saltem à communi sectione plani basis, planique secantis, distantia;) quam magno molimine plures sunt aggressi; expeditius, simplicius, atque universalius, unâ vice absolvimus.

Hinc etiam patet; expositi Cylindri, Prismatis, Solidive cujusvis Prismatici, (ut B D d b,) segmentum B D δ β , quocunque plano, & quocunque situ posito, (dummodo totam figuram tranversim secet, non basi intra figuram occurrat, si per idem (in C c rectâ) punctum κ transeat; ejusdem magnitudinis esse. C c. 2 Quod

E.

Fig. 141. Quod & de Frusti Superficie (ita ut dictum est) pariter intelligendum est.

Hinc etiam innotescit differentia duarum Ungularum super eodem plano, rectâve (aut curvâ in plano descriptâ) cujus magnitudo nota sit, prout Ungulæ Acies (seu planorum intersectio) propius remotiusve abfuerit.

Nempe, Si super VA (plano, rectâve, aut curvâ in plano descriptâ) Magnitudinis notæ; erigi intelligantur Ungulæ duæ, quarum altera aciem habeat V seu VB , altera α seu $\alpha\tau$ (ipsi VB parallelæ;) sitque eadem utriusque inclinatio (puta angulus FVA , angulo $f\alpha A$ æqualis:) Manifestum est (propter parallelas sive lineas sive superficies VF , vf ,) Ungularum VFA , $VvFA$, differentiam esse, superficiem solidumve $VFFv$, vel $VvaA$; hoc est, factum ex base VA in altitudinem Vv : Quæ quidem altitudo Vv est vel ipsi αV (distantiarum differentia) æqualis; nempe, si inclinationis angulus FVA , seu $f\alpha A$, seu $v\alpha V$, sit semiquadrantalís: vel illâ major minorve, in eâ ratione quam postulat datus inclinationis angulus.

Adeoque, si Ungula FVA nota sit; addito $VFFv$, vel $VvaA$, (facto ex base VA in altitudinem Vv ,) habetur Ungula $VvFA$. Si nota sit $VvFA$, dempto eodem $VFFv$ vel $VvaA$, habetur Ungula VFA .

Sivero ipsæ VB , $\alpha\tau$, acies, non sint parallelæ; si tamen sint in eodem plano, eademque utriusque Ungulæ inclinatio nota, atque innotescat saltem quanta sit distantiarum à basis Centro gravitatis differentia; idem similiter obtinetur: ut ex ante demonstratis patet.

Quodque de Ungulis dictum est; Momentis gravium quorumvis accommodabitur. Cum enim gravis VA momentum æstimetur ex facto à magnitudine in distantiam Centri gravitatis ab VB , seu $\alpha\tau$, (intellige, a perpendiculari plano per axem, VB , seu $\alpha\tau$,) differentia harum distantiarum (hoc est distantia planorum parallelorum BV , $\alpha\tau$,) in eandem VA magnitudinem ducta, exhibebit Momentorum ejusdem VA differentiam respectu Axium BV , & $\alpha\tau$.

G. Atque hinc speciatim, Trilinei aut Polygoni cujusvis, in superficie Cylindricâ descripti, planis utcumque positus abscissi, (seu quod eodem recidit, rectis, circulis, ellipsisve, quibuscumque terminati,) magnitudo colligitur. Quippe manifestum est, hujusmodi quamlibet figuram in superficie Cylindricâ descriptam, esse vel hujusmodi Ungulam, vel saltem in hujusmodi aliquot Ungulas divisibilem. Adeoque (si dari intelligatur arcus circularis Centrum gravitatis, quod prop. 14. exhibetur:) istius sive Ungulæ, sive Ungularum aggregati, magnitudo hinc habebitur. Quod de aliis item Corporum Prismaticorum superficiebus, figurisque inibi descriptis, pariter intelligendum erit.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Notandum interim, Quamquam universaliter procedat propositio, de quocunque plano $XB CD$ cui intelligatur ut basi insistere Solidum Prismaticum; adeoque & quamcunque habeat ad basin suam inclinationem: Expedire tamen nonnunquam posse, illud ex omnibus Planum seligere, quod solidum rectè fecerit; cui itaque ad angulos rectos insistat solidum. Utur enim vel Frustum fecerit, vel ne attingat quidem, illud $XB CD$ planum, idem interim de altitudine Cx (fig. 139.) intelligendum erit, quod de Cx (fig. 136.) dictum est.

PROP. XII.

Si Figura plana circa rectam quamvis in eodem plano expositam (quæ expositam figuram non secet) conversa, A:
Figuram solidam describat: Æquatur solidum hoc, Fig. 142.
solido Prismatico super eadem vel æquali Base; altitudinem habenti æqualem Peripheriæ (perfectæ vel imperfectæ prout conversio perfecta fuerit vel imperfecta) quæ expositæ figuræ convertendæ Centro Gravitatis describitur.

Idem intellige, de Lineâ rectâ (vel curvâ) in plano illo descriptâ, quæ conversa intelligatur superficiem describere. B.
Æquabitur utique hæc superficies, superficiæ super expositam lineam erectæ, altitudinem habenti æqualem peripheriæ quæ Centro gravitatis conversæ lineæ describitur.

Sin recta, circa quam convertitur, expositam figuram C,
lineamve convertendam secuerit: intelligendum erit de Differentiâ descriptorum, ab illis conversi partibus, quæ utrinque ad rectæ secantis contrarias partes constituentur.

Hinc.

- D. Hinc itaque, Datâ figuræ planæ, lineæve in plano, tum Magnitudine, tum Centro gravitatis, (hujusve ab Axe conversionis distantia;) datur figuræ, expositâ conversione factæ, magnitudo.
- E. Datâque tum conversæ, tum conversione expositâ factæ, magnitudine; datur distantia centri gravitatis conversæ, ab axe conversionis.
- F. Datâ denique, tum magnitudine expositâ conversione factæ, tum Centri gravitatis conversæ distantia ab axe conversionis; datur conversæ magnitudo.
- Conversionem autem expositam hîc dicimus, quæ quota vel quanta pars sit integræ conversionis, aut ipsa integra conversio, exponitur. Supponimus item, peripheriæ datæ longitudinem datam esse.*
- G. Estque Centrum Gravitatis Ungulæ (sive solidæ sive superficialis) in illo per aciem plano quod altitudinem bifecat; Solidi vero aut superficiæ conversione facti, in illo plano quod conversionis angulum vel arcum bifecat.
- H. Atque hinc constat generalis methodus exhibendi solidum figuræ planæ circa rectam quævis in eodem plano descriptam (saltem quæ ipsam non secet) conversione factum; Superficiemve conversione lineæ cujuscunque (rectæ aut curvæ) in eodem cum conversionis axe plano descriptæ.
- I. Hinc utique colligitur; Solidum conversione semiparabolæ circa rectam in vertice Tangentem descriptum; ad Cylindrum qui simili conversione Parallelogrammi circumscripti circa eandem rectam Tangentem describitur; esse, ut 4 ad 5.
- K. Similiter, si circa semiparabolæ basin convertatur, tum semiparabola, tum Circumscriptum Parallelogrammum: Solidum illius, ad solidum hujus conversione factum, invenietur, ut 8 ad 15.

Si,

PROP. XII. *De Calculo Centri Gravitatis.* 199

Si, circa semiparabolæ Axem, utrumque planum convertatur; solidum Semiparabolæ ad solidum parallelogrammi conversione factum; invenietur ut 1 ad 2. L.

Si, circa rectam basi adjacentem, Axi parallelam, utrumque planum convertatur; invenietur solidorum ratio, ut 5 ad 6. M.

Et similiter, Quæ eorundem conversione circa aliam quamvis in eodem plano expositam rectam (quæ figuram non secet) in quacunque distantia remotam, & quocunque situ positam, fiunt Solida; rationem inter se habebunt, hac methodo investigabilem. Idemque in aliis figuris mille modis efficitur. N.

Hinc etiam sequitur: Si conversarum tum Magnitudines, tum Centrorum-gravitatis Distantiæ, sint vel utræque æquales, vel reciproce-proportionales; Figuras, simili conversione factas, æquales esse: Sin minus; saltem in ratione ex illarum Magnitudinum & Distantiarum rationibus compositâ. per prop. 6, 7, Cap. 1. O.

Item; Annulum quemvis, æqualem esse, Plano converso, in Peripheriam Plani Centro gravitatis descriptam, ducto. Quod tum de Annulo integro, tum de ipsius partibus, perinde obtinet; prout Conversio integra fuerit, vel partialis.

Item; Circulum, æqualem esse, facto ex Radio ducto in semissem Peripheriæ; (nempe, in Peripheriam, Radii Centro gravitatis seu puncto medio descriptam; quæ Peripheriæ Radio descriptæ semissis est.) Quod tum in Circulo integro, tum ipsius Sectoribus, perinde verum est.

Item; Curvam Cylindri Superficiem, æqualem facto ex Latere (hoc est, rectâ circumductâ,) in Peripheriam ipsius puncto medio descriptam, (quæ Basis peripheriæ æqualis est.) Idemque de Conversionibus dimidiis, aut Partialibus aliis, perinde obtinet atque de Integris. Et sic in reliquis. Item;

Item ; Cylindri Solidum, æquale, Parallelogrammo circumducto, ducto in peripheriam suo Centro gravitatis descriptam ; (quæ est Peripheriæ Basis dimidia, propter Parallelogrammi Centrum gravitatis in media sive longitudine sive latitudine.)

Item ; Curvam Coni recti Superficiem, æqualem Lateri (hoc est, rectæ circumductæ) ducto in Peripheriam ipsius puncto medio descriptam ; (quæ est dimidia peripheriæ Basis.) Quod & Trunci superficiæ (plano Basi parallelo abscissi) etiam accommodabitur.

Item ; Conum Rectum, æqualem Triangulo circumducto, ducto in Peripheriam ipsius Centro gravitatis descriptam ; (quæ Peripheriæ Basis Triens est.) Quod & Trunco (plano Basi parallelo abscisso) accommodabitur.

Et in reliquis similiter.

A. **Fig. 142.** **E**sto exposita figura plana B C D (in B C D lineam rectam projecta, eâ projectione quâ in prop. præced. usi sumus.) quæ circa rectam in eodem plano X (in unicum X punctum projectam) extra (saltem non intra) figuram expositam conversa, describat B D d b figuram solidam ; (similiter in planum projectam ;) Adeoque basis Centrum gravitatis C describat C c peripheriam.

B. Vel etiam B C D recta vel curva linea quælibet in eodem plano, (similiter in B C D rectam projecta ;) quæ circa X conversa describat B D d b superficiem eodem modo in Planum projectam : Suoque Centro Gravitatis C, describat C c peripheriam.

A. B. Et super eandem basem erigatur Solidum Prismaticum, vel Prismatica Superficies ; cuius recta, Centro gravitatis C insistens, C x, æqualis ponatur ipsi C c peripheriæ. Planoque X x, abscindatur Frustum B D d b.

Cumque tum B b, C c, D d, &c. (similes arcus) sint radiis suis X B, X C, X D, &c. proportionales ; tum (propter similia triangula) iidem X B, X C, X D, &c. proportionales rectæ B A, C x, D d : erunt hæ rectæ arcibus illis proportionales : Adeoque, propter C x ipsi C c æqualem, per constructionem, erunt & reliquæ reliquis æquales ; & omnes omnibus : Hoc est, B D d b figura (sive solida sive superficialiaria

PROP. XII. De Calculo Centri Gravitatis. 201

ciarias conversione facta, ipsi $B D \delta \beta$ Fruſto; adeoque & (per præcedentem) ipsi $B D \gamma \gamma$ figuræ Prismaticæ super eandem vel æqualem basin Altitudinem habenti $C \kappa$, ipsi $C c$ æqualem. Quod erat demonstrandum.

Sin conversionis axis X , fecet figuram lineamve convertendam: similiter ostendetur, segmentum Fruſti $X D \delta$, segmento facti ex conversione $X D d$, & reliquum $X B \beta$, reliquo $X B b$: Ergo & differentia differentiarum æqualis; Et utraque (per demonstrata ad prop. præced.) ipsi Prismatico (solido, vel Superficie), $B D \gamma \gamma$. Quod iudem erat demonstrandum.

Itaque; Datâ figuræ planæ lineæve expositæ ($B C D$) magnitudine quæ sit $B B$, vel B ; atque Centri gravitatis C , Fig. 142.
 $B B$ B ab X conversionis axe, distantia; adeoque & peripheriæ $C c$ longitudine, quæ sit P : datur expositâ conversione factæ magnitudo $P B B$, vel $P B$. Nempe, quod fit ex $B B$, vel B , in P ducto.

Item; datâ magnitudine factæ expositâ conversione; puta $P B B$, vel $P B$; ipsâque conversæ magnitudine $B B$, vel B : datur arcus (specie expositi) longitudo P ; (nempe quod ex $B B$) $P B B$ (P $P B B$ vel $P B$, per $B B$ vel B diviso emergit) adeoque & radii quo describitur: quæ est distantia Centri gravitatis C ab axe conversionis.

Item; datâ $P B B$ vel $P B$ magnitudine figuræ conversione factæ; & distantia centri gravitatis conversæ à conversionis axe; adeoque & quæ ab hoc describitur Peripheriâ P : Datur conversæ magnitudo, $B B$ vel B . Nempe, quod ex $P B B$, vel $P B$, per P diviso, emergit.

Denique; Bisectis $D d$ in m , & $D \delta$ in μ ; ductisque per conversionis axem vel Ungulæ aciem X , planis $X m$, $X \mu$: Erunt, in illo, Centra gravitatis singulorum arcuum ut $B b$, $D d$, conversione factorum; in hoc, rectorum singularum ut $B \beta$, $D \delta$ unguam constituentium, (per 2 & 3 hujus:) Adeoque in illo arcuum commune omnium, (hoc est, superficiæ vel solidi conversione facti,) in hoc, commune omnium rectorum. (hoc est, Ungulæ superficialis solidæ,) centrum gravitatis: per 27 Cap. præced. Quæ erant ultimo demonstranda.

Atque hinc constat generalis Methodus exhibendi Solidum conversione figuræ planæ (lineæve in plano) circa rectam in eodem plano descriptam: Saltem quæ ipsam non fecet.

Exempli gratiâ. Sit $A D B$ semiparabola; cujus magnitudo ad magnitudinem parallelogrammi circumscripti $A D B \delta$ est ut 2 ad 3; $D d$ Centrum

Centrum verò gravitatis à Vertice A distat $\frac{3}{5}$ Altitudinis, per 6 hujus;

Parallelogrammi centrum à vertice distat, $\frac{1}{2}$ Altitudinis: Ergo illius

ad hujus distantiam, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; vel, ut 6 ad 5. Adeoque propter

plani magnitudinem ad magnitudinem, ut 2 ad 3; & Centri distantiam ad distantiam, ut 6 ad 5: Erit solidum ex conversione semiparabolæ ABD ad Cylindrum ex conversione ADB, circa eandem A, in ratione ex illis compositâ, ut 12 ad 15, vel 4 ad 5.

K. Eadem si conversâ intelligatur circa B D, (unde Centrum Gravi-

tatis distat $\frac{2}{5}$ altitudinis; adeoque ad distantiam Centri Gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; sive ut 4 ad 5; et magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 3;) Solidum conversione factum, ad circumscriptum Cylindrum, erit ut 8 ad 15.

L. Eadem circa A D conversâ; (propter magnitudinem, ut prius, sicut 2 ad 3; & distantiam Centri gravitatis

ab A D, $\frac{3}{8}$ Latitudinis, adeoque ad distantiam inde Centri gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut 3 ad 4: per 8 hujus;) solidum faciet, ad Cylindrum circumscriptum; ut 6 ad 12, vel 1 ad 2.

M. Eadem denique circa B D, (unde Centrum gravitatis distat $\frac{5}{8}$ latitu-

dinis; adeoque ad distantiam Centri gravitatis parallelogrammi ut 5 ad 4; & magnitudo ut prius;) solidum faciet, ad circumscriptum Cylindrum, ut 10 ad 12; vel 5 ad 6.

N. Atque eodem planè modo faciendum esset, etiamsi rectæ A B, A D, D B, non adjacerent, sed in remotâ distantia, vel etiam obliquo quovis situ, utcumque in eodem plano; dummodo figuram convertendam non secet expolitus conversionis Axis.

Et similiter quæcumque exponatur figura plana, circa rectam quamvis in eodem plano (quæ illam non secet) utcumque positam conver-

tenda

PROP. XIII. De Calculo Centri Gravitatis. 203

tenda. Quóque de figurâ planâ dictum, de lineâ quâvis in plano descriptâ, similiter convertendâ intelligatur.

Reliqua confectionaria, in ipso propositionis curriculo satis demonstrantur. O.

SCHOLIUM.

HAnc methodum cum ante plures annos inveneram (nesci-
us id prius innotuisse) inveni tandem Torricellio, aliisque post
illum, prius fuisse, notam.

Si verò Figura conversâ, non sit Plana, vel non in eodem Plano cum
conversionis Axe, (quod & de Lineis similiter intellige :) pro conver-
sâ, substituenda est alia (in eodem plano cum Axe) in quam, Con-
versa, sic projecta intelligatur, ut utriusque respectiva Puncta singula
tantundem distent à conversionis Axe.

PROP. XIII.

Si circa rectam quamvis, ut conversionis Axem feratur **A:**
(conversione integrâ vel partiali) Linea recta termina-
ta, in eodem (cum Axe) Plano utcumque posita, (mo- **B:**
do ne axem secet, aut illi sit ad angulos rectos :) Quæ **C:**
à conversâ rectâ describitur Superficies Curva, æquatur
Superficiæ Cylindri recti, quæ simili conversione descri-
bitur à rectâ quæ æqualis sit Axis Portioni duabus rectis
à conversâ rectæ extremis punctis ad axem perpendi-
cularibus interjectæ, in illa ab axe distantia quæ æqualis
sit perpendiculari, medio conversæ rectæ puncto in-
sistenti, ad axem terminatâ, circumlatâ.

Quóque de unâ conversâ rectâ dicitur, pluribus similiter **D:**
accommodabitur.

Adeoque ; Si Semi-circumferentiæ Circuli, vel arcui mi- **E:**
nori, circumponatur ex continuis rectis (quæ mediis
suis punctis peripheriam contingant) conflata linea :
Quæ ab hac lineâ compositâ, circa istius circuli diame-
trum quamvis (quæ illam non secet) conversâ, descri-
bitur Superficies curva ; æquatur Superficiæ curvæ
Cylind-
D d 2

Cylindri recti, æque-alti, basin habentis exposito circulo æqualem.

- F. Adeoque & ; Superficies curva quæ a Semi-perimetro (vel hujus portione, ex integris Lateribus quotlibet constante) *Polygoni regularis*, circa Polygoni illius diametrum (quæ illam non secet) conversâ describitur; æquabitur superficiei curvæ Cylindri recti æque-alti, basem habentis æqualem circulo qui Polygono illi inscribitur. Et Partes partibus respectively sumptis.
- G. Et, speciatim; *Superficies Sphærica*, æquatur superficiei curvæ Cylindri recti circumscripti: Ejusque Portiones, respectivis hujus portionibus; sive Planis per Axem, sive planis ad Axem rectis, abscissis.
- H. Atque hinc sequitur; Superficiem Sphæræ, æqualem esse quatuor circulis in Sphæra maximis.
- L. Item; Superficiei Sphæræ Segmenta, parallelis planis interjecta, Altitudinibus (vel abscissis Axis Portionibus) esse proportionalia.
- K. Et; Segmenti Superficiei Sphæræ, duobus parallelis planis interjecti, Centrum gravitatis esse in Axis segmenti medio.
- L. Quæ quidem Consectaria, etiam *Sinibus Rectis*, & *Subtensis* arcuum (mutatis mutandis) accommodanda sunt (utpote illorum in Superficie Sphæræ Circulorum Radiis & Diametris.) Nempe,
Summa Sinuum Rectorum totius sive Quadrantis sive Semicirculi; adeoque & summa Chordarum vel Subtensarum arcuum totius sive Semicirculi sive Circuli integri; æquatur Parallelogrammo circumscripto. Et partes partibus respectively sumptis, quæ parallelis planis abscinduntur. Nempe,

Summa

PROP. XIII: *De Calculo Centri Gravitatis.* 205

Summa Sinuum Rectorum integri Quadrantis, æquatur Quadrato Radii: Summa Sinuum rectorum totius Semicirculi; vel Subtenfarum arcuum in Semicirculo; duobus Quadratis Radii: Et Summa Subtenfarum in Circulo integro, Quadrato Diametri, seu quatuor Quadratis Radii. M.

Item (in partibus horum) Summa Sinuum rectorum cuiusvis Arcus particulis (in suo situ) convenientium, æquatur Parallelogrammo æque-alto, basem habenti Radium Circuli. (Summaque Subtenfarum correspondentium, hujus dupla.) N.

Adeoque; Summæ partiales, sunt Altitudinibus (seu Axis particulis interceptis) proportionales. O.

Et; Summæ (sive Partialis, sive Totalis,) Centrum-gravitatis, in mediâ Altitudine; Subtenfarum quidem, in ipso Axis medio; Sinuum, saltem æque-altum. P.

Hinc eadem etiam transferuntur ad *Superficiem curvam Ungulæ*, super Semicirculum, ejusve Portionem erectæ, cujus Acies sit Diameter Semicirculum terminans. Nempe, Si plani secantis ad circuli planum Inclinatio, sit graduum 45, seu Semi-quadrantis, (adeoque altitudo maxima, æqualis maximo Sinuum;) Curva Superficies æquatur Summæ Sinuum rectorum; (& partes partibus respectivè sumptis.) Q.

Si verò Altitudo maxima, sit ad maximum Sinuum, ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium; erit Ungulæ Curva Superficies, æqualis curvæ superficiei Sphæræ vel Hemisphæræ eisdem planis (Axis rectis) interjectæ. Atque in aliis Altitudinibus proportionaliter. R.

Et Centrum Gravitatis (quæcunque sit Ungulæ altitudo) in perpendiculari Plano medio inter extremos Sinus. S.

Atque hæc eadem, ad *Figuram Sinuum Rectorum*, sive M, N, T. Qua-

Quadrantis unius sive totius Semicirculi, (quæ quidem nihil aliud est, quam illa Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindri Curva Superficies in planum expansa,) similiter accommodantur. Nempe; Figuram illam Sinuum rectorum unius Quadrantis, æqualem esse Quadrato Radii; totius autem Semicirculi, æqualem duobus Radii Quadratis; & Segmentum quodvis duobus sinibus interjectum, æquale facto ex Radio in Diametri Circularis Segmentum duobus correspondentibus in Semicirculo Sinibus interjectum ducto. (Unde & alia ejusdem portio quælibet, curvæ hujus particulâ & rectâ rectisve terminata, similiter data erit.)

V. Eadẽque porro ampliantur, ad *Summas Quadratorum, Cuborum, Biquadratorum*, aliarumve potestatum, eorundem *Sinuû Rectorum*. Nempe; Ut omnes *Sinus Recti*, Segmento cuius Semicirculi (parallelis Sinibus interjecto) respondentes, æquantur facto ex Radio in Diametri Segmentum interjectum ducto: Sic & eorundem *Sinuû Quadrata omnia*, æquantur Radio in omnes ordinatim-applicatas (eãdem ab invicem distantia sumptas, quâ distant in arcu circulari Sinus ipsi) segmentum illud complentes ducto: Et Sinuum illorum *Cubi omnes*, æquantur Radio in harum Ordinatim-applicatarum Quadrata: Sinuumque *Biquadrata*, Radio in harum Cubos ducto: & sic deinceps.

W. Atque hinc porro habetur, Momentum Superficie Ungulæ istius Semicylindri, ejusve segmenti, respectu (aciei suæ) Diametri circularis. (Nempe, in Semiquadrantali Ungula, Sinuum illorum Quadratorum Summæ æquale: in aliis, pro altitudinum ratione.) Ipsumque gravitatis Centrum.

X. Item; Figuræ Sinuum Rectorum, ejusve Segmenti, Momentum

PROP. XIII. De Calculo Centri Gravitatis. 207

mentum respectu rectæ cui adjacent Sinus illi: Vel, Semicuadrantalīs Ungula (unde & de aliis Ungulis fiet iudicium pro altitudinum ratione,) Figuræ Sinuum Rectorum, ejusve Segmenti, aciem habens rectam illam cui adjacent. (Nempe, Semissis Summæ Quadratorum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis Plani distantia ab ipsa cui adjacet rectâ.

Item; Hujus Ungulæ Momentum, respectu ejusdem adjacentis rectæ, aciei suæ. (Nempe, Triens summæ Cuborum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis inde distantia: (Intellige: Si prius cognoscatur, tum ordinatim-applicatarum illarum Summa, hoc est, ipsum Semicirculi Segmentum; tum summa quadratarum earundem ordinatim-applicatarum: Quorum utrumque methodis jam notis cognoscuntur: atque hic infra docentur.)

Circa Axem XS, recta t (in eodem plano constituta) convertatur; A. cuius medio Puncto T insistens perpendicularis TC, axi occurrat Fig. 149; in C: Ab extremis autem punctis t , t , perpendiculares ad axem ducantur $t d$, $t d$; atque, à T medio, TD.

Si sit $t T t$ axi parallela: Manifestum est, tum TC, TD, eandem esse rectam, tum $d D d$, $t T t$, (parallelas parallelis terminatas,) rectas æquales; adeoque constare propositum.

Si parallela non sit, occurrat Axi in A: Eritque (propter parallelas, & similia triangula,) $t T t$, ad $d D d$; ut AT ad AD; hoc est, (propter similia triangula,) ut CT, ad TD. Adeoque, factum ab extremis, $t t$ in TD; æquabitur factis à mediis, $d d$ in CT. Et (propter, similes Peripherias, radiis suis proportionales,) Factum ex $t t$ in peripheriam radio DT descriptam, ad factum ex $d d$ in similem peripheriam descriptam radio CT, vel qui huic æqualis sit. Adeoque (per prop. præced.) Superficies curva quæ à conversâ $t t$ (cujus centrum gravitatis est T, ejusque ab axe distantia TD) describitur; æqualis erit curvæ superficiei Cylindri, quæ rectâ $d d$ vel huic æquali describatur, in distantia ab axe quæ sit ipsi CT æqualis. Quod erat demonstrandum.

Nempe; quâ ratione CT longior est quam DT, eadem brevior est $d d$ quam $t t$.

Dico.

B. Dico autem; *modo ne Axem secet*; quoniam (ut ad prop. preced. dictum est,) hoc casu, duarum curvarum differentia, æqualis esset illa Superficies Cylindrica.

C. Item; *ne sit ad axem ad angulos rectos*: quoniam, hoc casu, non Curvam sed Planam superficiem describeret conversa recta; cui in Curvâ superficie Cylindricâ nihil responderet. Nec, de illâ procederet demonstratio.

D. Quodque de unâ conversâ rectâ dictum est; pluribus similiter ac: Fig. 150. commodabitur; ductis, a singularum punctis mediis, ad axem, respectivis rectis. Quippe si in omnibus eadem sit, vel æqualis, recta TC; ejusdem Superficie Cylindricæ segmentis æquales erunt quæ à t t rectis describuntur: Sin minus; diversarum.

E. Puta; Si circa Semiperipheriam (arcumve adhuc minorem) circumponatur, ex rectis conflata t t t linea; quarum singularum puncta media T, T, sint in T T peripheria; adeoque TC, TC, invicem æquales: rectis autem t t, t t, æque-altæ d d, d d, axis portiones; atque his æquales $\delta\delta$, $\delta\delta$; quarum ab axe distantia d d sit æqualis ipsi TC, (quæ cum sit inscripti circuli radius; eundem tanget $\delta\delta$.) Ostendetur, ex jam demonstratis, Superficies rectis t t, t t, descriptas, sigillatim æquales eis esse quæ rectis $\delta\delta$, $\delta\delta$, describuntur. Ergo; quæ totâ t t t describitur, toti descriptæ à $\delta\delta$ $\delta\delta$. Quod itidem probandum erat.

F. Adeoque; Si t t sit tota Semi-Perimeter Regularis Polygoni: De hac item constat. Sin ipsius saltem aliqua latera; De superficie saltem his lateribus descriptâ constat. Sin forte, ad complendam Semiperimetrum, desit Semi-latus, ut t d; quod perpendiculare sit ipsi d d Axi; (vel etiam utrinque inter lineæ compositæ t t t extrema, & axem, simile sit interstitium;) saltem tota superficies Curva quæ à Semiperimetrotro describitur, æqualis jam ostensa est descriptæ Cylindri Curvæ à $\delta\delta$ $\delta\delta$. Quippe quæ à t d describitur, plana erit: nec magis hic in considerationem venit, quam Cylindri Bases. De Curvis utique Superficiebus procedit Propositio.

(Atque hinc facile deducerentur, non modò ea prope omnia quæ ab Archimede, de Sphæra & Cylindro; sed & eorum plurima quæ à Torricellio, de Solidis Sphæralibus, demonstrantur.)

G. Denique; Cum Circulus aliud non sit quam Polygonum regulare Fig. 151. laterum numero infinitorum; sitque Semiperipheria, istius Polygoni Semi-

PROP. XIII. De Calculo Centri Gravitatis. 209

Semiperimeter; (juxta def. 1. Cap. 4.) etiam hinc speciatim verum erit quod de omnibus demonstratum est. Hoc est; Quæ Semiperipheriæ DD circa axem DD conversione describitur Superficies Sphærica, æquatur superficiei Curvæ Cylindri æquæ-alti à rectâ dd descriptæ; Et portiones illius portionibus hujus respectivè sumptis; puta, quæ à curva DT describitur, illi quæ à rectâ dd æquæ-alta; item, quæ semiconversione unius, illi quæ à semiconversione alterius; (& in alijs similiter conversionibus imperfectis.) Quæ itidem erant demonstranda.

Atque hinc sequitur, Superficiem Sphæræ, quatuor circulis maximis æqualem esse. Est utique Circuli in Sphæra maximi peripheria, æqualis peripheriæ basis expositi Cylindri (propter æquales utriusque radios:) eaque ducta in latus Cylindri, quod æquatur Diametro Sphæræ,) exhibet Cylindri superficiem curvam, ut notum est; (vel, quod eodem recidit, recta dd in peripheriam ipsius puncto medio descriptam, quæ eadem est cum peripheria circuli in Sphæra maximi, eandem exhibet superficiem curvam Cylindri, per prop. præced.) Cum itaque quod fit ex Semidiametro in Semicircumferentiam æquetur Circulo, (sive, quod fit ex Semidiametro in peripheriam ipsius puncto medio descriptam, quæ dimidia est peripheriæ totâ descriptæ:) quod fit ex tota Diametro in totam Peripheriam, (hoc est, Curva superficies Cylindri, adeoque & Sphæræ,) æquatur Quadruplo ejusdem circuli maximi. Quod erat propositum. H.

Item Superficiei Sphæræ Segmenta, parallelis planis abscissa, altitudinibus (sive portionibus Axis abscissis) sunt proportionalia. Æqualia scilicet respectivis segmentis Superficiei Curvæ Cylindricæ; quæ sunt altitudinibus proportionalia. Quod itidem demonstrandum erat. I.

Adeoque; ut Superficiei Curvæ Cylindricæ, (per prop. 1 & 5 hujus,) sic & Segmenti Sphæræ, parallelis planis abscissi, Centrum gravitatis est in Axis Medio. Nam, quotcunque planis parallelis, utraque secetur superficies curva; æqualia erunt respectiva hujus atque illius Segmenta; & (si intelligantur numero infinita, juxta def. 1. Cap. 4.) æqualiter à medio plano remota, adeoque & æqualiter respectu ejusdem ponderantia. Est igitur in plano medio (bâlibus parallelo) per 4 hujus; estque in Axe, per 5 hujus; ergo in Axis puncto medio, per 26 Cap. 4. Quod erat etiam demonstrandum. K.

Ec

Quæ

L. Quæ quidem Sinibus rectis, & Arcuum Subtensis sive Chordis, facile accommodantur.

Fig. 153. Intelligantur enim, tum à singulis punctis sive particulis infinitè-exiguis Diametri circularis sive Axis $A\alpha$, Ordinatum-applicatæ, ad $\delta\delta$ Tangentem circuli parallelam pertingentes, (parallelogrammum circumscriptum complentes:) tum à Semicircularis arcus $AD\alpha$ singulis punctis, sive particulis infinitè-exiguis (particulis illis Diametri æqualibus) Sinus recti ad Diametrum vel Axem $A\alpha$ demissi: (Quorum itaque numerus seu multitudo, reputanda erit ad numerum seu multitudinem ordinatum-applicatarum, ut est Longitudo Semicirculi ad Diametrum Circuli.)

Cum itaque singulæ arcus Particulæ; seu earum Tangentes, cum particulis illis exiguis quali coincidentes; sint (ut jamjam ostensum est) in eâ ratione magis Obliquæ, seu minus Altæ, quâ Breviores sunt Sinus recti inde demissi: adeoque, Arcus æque alti, in eadem ratione Longiores, indeque Sinus demissi eò plures in eadem altitudine quò breviores sunt; (& quidem eò plures quàm sint in eadem altitudine ordinatum-applicatæ expositæ, quò breviores sunt quam illæ ordinatum-applicatæ Radio æquales:) Erunt ubique, in eadem altitudine, omnes simul Sinus recti, omnibus simul ordinatum-applicatis, æquales: (supplente scilicet Multitudine quod in Longitudine deficit.)

M. Adeoque; Omnes Sinus recti Quadrantis ACD , omnibus Ordinatum-applicatis Quadrati $AC\delta\delta$.

Fig. 155. Hoc est; (Si intelligatur Arcus AD in rectam extendi; eique ad angulos rectos insistere Sinus recti in suis respectivè punctis; & per eorum omnia extrema puncta duci curva, Figuram terminans, quæ *Figura Sinuum Rectorum* dicatur;) Figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, ACD , Quadrato Radii æqualis erit.

Fig. 153. Item; Omnes Sinus recti, in $A\alpha D$ Semicirculi, omnibus Ordinatum-applicatis in Parallelogrammo $A\alpha\delta\delta$.

Fig. 155. Hoc est, Figura Sinuum rectorum totius Semicirculo, $AC\alpha$; duobus Quadratis Radiis.

Adeoque; Si, continuatis Sinibus, compleantur Subtensæ duplorum Arcuum; manifestum est (propter Subtensas Sinuum duplas) Omnes Subtensas Semicirculi, æquari duobus Quadratis Radii; & Omnes Subtensas totius Circuli, quatuor Quadratis Radii, sive Quadrato Diametri. Quod erat etiam probandum.

N. Cùmque hoc ubique obtineat; Idem in partibus non minus valet. Putà

PROP. XIII. De Calculo Centri Gravitatis. 211

Putà, omnes Sinus Recti in portionibus Circularibus ABE , $EBCD$, Fig. 154. $E B F G$, $G F H K$, &c. æquales omnibus Ordinatum-applicatis, in Parallelogrammis $AB\delta$, $\epsilon B C \Delta$, $\epsilon B F \gamma$, $\gamma F H \alpha$, &c.

Hoc est, (expansis Arcibus in Rectas, erectisque Sinibus, & com-Fig. 154, pletà ut prius figurà) Figura figuræ æqualis. Puta $E B F G$ in figura 155. Sinuum, æqualis Parallelogrammo $\epsilon B F \gamma$: Et sic in cæteris. Quod etiam erat probandum.

Sed &, Si Axis $A \alpha$ in Circulo, jam consideretur ut Libra, (in O . situ Horizontali posità;) similiter ostendetur ipsius particulas æquales singulas, insistentibus (in suo situ) Sinibus rectis, æqualiter gravatas esse; non minus quam, ex oppositâ parte, Ordinatum-applicatis.

Adeoquæ; (sive tota $A \alpha$, sive pars ut BF consideretur,) Centrum Æquilibrii erit in assumptæ Libræ medio; (per prop. 2 & 4 Fig. 154. hujus.) Putà, Summæ Sinuum portionis $E B F G$, in altitudine mediâ inter EB & FG , (sive ad easdem, sive ad oppositas centri partes ponantur ipsæ EB , FG .) Quod erat itidem demonstrandum.

Dico autem, *In suo situ*: Quoniam si intelligatur (ut in figura Sinuum, fig. 155.) Arcus in rectam extendi: remanens esse, (ob variatas sinuum distantias,) manifestum est. Nisi cum EB , GF , utrinque à Centro æqualiter distant.

Totumque hoc quod de Sinibus Rectis (Arcuumve Subtensis) hic traditur, eodem planè principio nititur, atque illud de Superficie Sphæricâ, ejusque partibus. Quippe Sinus Recti, Arcuumque Subtensæ, in suo situ existentes, non sunt nisi Radii Diametricæ Peripheriarum, æqualibus ab invicem distantibus remotarum, superficiem illam Sphæricam complementum. Atque ut illæ omnes Peripheriæ, omnibus Cylindricam superficiem complementibus Peripheriis æquantur: Sic & illarum omnes Radii, & Diametri, omnibus item Radiis, & Diametris, Harum. Quod & in partibus obtinet respectivè sumptis pariter utrobique.

Eadem Curvæ Superficie Ungulæ sic accommodantur.

Si super $A \alpha$ D Semicirculo, vel ipsius Segmento quovis, ut $E B F G$, Fig. 154. (rectis EB , GF , quibusvis, quæ sint ad angulos rectos Axi $A \alpha$, intersecto,) erigatur Ungula, cujus Acies (seu communis intersectio Basis Planique secantis) sit in $A \alpha$; sitque Planorum (Basis scilicet, Planique secantis, seu Ungulam abscindentis,) Inclinatio, Semi-quadrantal: (quam *Semi-quadrantalem Ungulam* appellamus:) Rectis EB ,
Ec 2

- EB, GF, reliquisque hisce parallelis,) insistet Triangulum Rectangulum, & quidem (propter Inclinationem Semi-quadrantalem) Isosceles. Adeoque (cum hoc ubique obtineat) singulis Peripheriæ AD α , vel EG, punctis, insistent rectæ (curvam Ungulæ Superficiem complentes) suarum distantis ab A α , seu Sinibus rectis, æquales. Eritque, propterea, Curva Superficies Ungulæ, æqualis summæ Sinuum rectorum; sive (extenso in rectam arcu AD α , vel EG, erectisque Sinibus, & completâ ut prius figurâ,) correspondenti Figuræ Sinuum rectorum, ejusve portioni correspondenti. (Est unque Figura illa Sinuum Rectorum A α C, nihil aliud quam istius Ungulæ Superficies curva, in planum expansa.)
- Fig. 154. Hoc est, per modò demonstrata, Parallelogrammo α A δ (fig. 154.) si Basis Ungulæ sit A α D: vel, Parallelogrammo B F γ , si Basis si EG. Et partes partibus respectivè sumptis æquales.
- Fig. 154, Nempe, Quæ insistet arcui EG curva superficies Ungulæ Semi-quadrantis (aciem habentis BF) æqualis erit superficiei planæ E B G F in figura Sinuum; hoc est B F γ Parallelogrammo. Et sic ubique.
- R. Si verò (pro alia Plani secantis ad Basin Inclinatione) alia sit altitudo: puta, altitudo in E, ad distantiam EB, (& sic ubique) ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium: Pro Sinibus, Sumendæ erunt Peripheriæ vel Semiperipheriæ his Radiis descriptæ, (saltem Rectæ his Peripheriis vel Semiperipheriis æquales;) adeoque Ungulæ curva Superficies, æqualis erit Superficiei Sphæricæ, vel Hemisphæricæ, (hujusve Portioni respectivæ,) ejusdem Arcûs AD α , vel EG, conversione vel semiconversione (circa A α) descriptæ. Atque in aliis altitudinibus proportionaliter. (per prop. 11 & 12 hujus.)
- Adeoque, pro Parallelogrammis α A δ , B F γ , sumenda erunt alia æque-alta; sed quorum Bases, ad Basin A α vel C Δ , (Radio Circuli æqualem,) sint in ea ratione quæ est Altitudo in E (vel aliæ Peripheriæ puncto,) ad hujus ab A α distantiam.
- S. Eritque, propter eandem rectæ EB, rectæque ipsi in E insistentis, (& de reliquis similiter,) distantiam à Plano Sphæram tangente in α , (vel huic parallelo quovis;) Centrum Gravitatis in eadem ab illo Tangente Plano (Planòve illi parallelo) distantia, quæ est Centrum gravitatis Summæ Sinuum, vel Superficiei Sphæricæ, (ejusve portionis,) correspondentis. Hoc est, in Plano inter extremos Sinus, (puta inter EB, GF,) medio, Quæ itidem erant demonstranda.

Hujus

Hujus autem Figuræ Sinuum rectorum $A \propto C$ (quam totam duobus Radii quadratis æqualem ostendimus,) si portionem aliquam, T. Fig. 155.
 duabus utcumque rectis Basi perpendicularibus interjectam, libeat
 mensurare; puta $EBFG$: Sumptis in Semicirculo (huic responden-
 te) $AD \propto$ (fig. 154.) Sinibus rectis EB, GF ; quæ æquales sint,
 & similiter siti ipsis EB, GF , in figura Sinuum (fig. 155.) Interjecta
 Diametri Circularis portio BF , in ejusdem Circuli Radium ducta;
 exhibebit Rectangulum, expositæ portioni $EBGF$ in figura Sinuum,
 æquale: ut in supra demonstratis ostensum est.

Si verò aliam quamvis ejusdem portionem, rectis utcumque abscis-
 sam, (utut non sint basi perpendiculares,) mensurare libeat: id fiet
 additis vel ablatis (hujusmodi Portioni perpendicularibus interjectæ)
 spatiis rectilineis; prout casus expositus postulaverit.

Sciendam porro est; Summam Sinuum rectorum, portioni Circu- V. Fig. 154.
 lari ut $EBFG$ respondentium, dici posse alio atque alio modo com-
 plere tum $EBFG$ in figura Sinuum, tum $EBFG$ in Semicirculo; 155.
 sicut eandem portionem Circularem complere dicantur, tum illa Si-
 nuum summa, tum summa Ordinatum-applicatarum, ipsis EB, GF ,
 interjectarum.

Intelliguntur utique tum Sinus omnes ipsis EB, GF , interjecti in Fig. 153,
 figura Sinuum tum omnes Ordinatum-applicatæ ipsis EB, GF , inter- 154,
 jectæ in portione Circulari; æqualibus ab invicem distantis remotæ 155.
 & quasi æqualiter crassæ seu latæ: sive (quod eodem recidit) exiguis
 quidem sed æqualibus basis vel axis particulis insistentes; quarum ita-
 que æqualium particularum non alia ratio haberi solet (in methodo
 Indivisibilium) quam quod simul-omnes toti æquantur.

Sed in $EBFG$ portione Circulari, Sinus recti (propter Arcum,
 non Axem, in æquales partes divisum) inæqualibus ab invicem inter-
 vallis remouentur; adeoque inæqualibus axis particulis insistant;
 (minoribus prope polos, quam longius inde:) quarum itaque habenda
 ratio.

Æqualibus utique Tangentibus tt, tt , (quas T dicemus,) sive Fig. 156.
 Peripheriæ Particulis (quæ, cum infinite-exiguæ supponantur, cum
 ipsis Tangentibus reputandæ sunt coincidere;) inæquales respondent
 Axis Particulæ dd, dd , (quas d dicemus,) quibus insistere intelli-
 gantur Sinus recti respectivè sumpti.

Hac autem consideratione interpositâ; non minùs dicetur Summa
 Sinuum, quam summa Ordinatum-applicatarum, complere expoli-
 tam

Fig. 153, 154, 155. tam portionem Circularem. Tana enim omnes-sinus s , in suas respective d ducti, quam omnes Ordinatum-applicatae (quas o dicemus) in suas singulae T particulas aequales ductae, eandem portionem Circularem complent. (Supponimus autem, quod & prius dictum est, particulas Peripheriae quibus respondent Sinus recti, particulis Diametri seu Axis quibus respondent Ordinatum-applicatae, aequales esse.) Hoc est, Omnes $s d$ aequales omnibus $o T$, (iisdem EB , GF , interjectis,) portionem $EBFG$ in Semicirculo, pariter complentes. Omnes autem iidem Sinus s , in Arcus sui, Rectave, EG , Particulas T ; hoc est, Omnes $s T$; aequales spatio $EBFG$ in figura Sinuum: adeoque Parallelogrammo (ut supra probatum) $EBF\gamma$, portioni Circulari $EBFG$ (vel huic simili & aequali $EBFg$) aequo-alto, basin habenti Radio aequalem. (Differentia quae extenso Arcu in Rectam oritur, est $eg\gamma^*$.) Sic, in portione Circulari $GFHK$, Omnes Sinus recti s , in suas respective d , portionem complentes; aequantur Omnibus Ordinatum-applicatis o in T ductis, quae complent (illi similem & aequalem) portionem $GFHK$: Omnes autem iidem s in T ducti, (complentes spatium $GFHK$ in figura Sinuum,) aequantur Parallelogrammo $\gamma FH\kappa$; excedenti spatium Circulare $GFHK$, spatio $\gamma g k^*$. Et sic ubique.

Similiter; Sumptis tum Sinuum omnium, tum omnium Ordinatum-applicatarum, Quadratis, Cubis, &c. erunt Omnes $s^2 d$ aequales Omnibus $o^2 T$: Item, Omnes $s^3 d$ = Omnibus $o^3 T$: & Omnes $s^4 d$ = Omnibus $o^4 T$. &c.

Fig. 149. Quanta autem sit d in singulis, sic colligitur. Cum sit (ut in hac prop. § A. demonstratum est) t^2 ad dd , ut CT ad TD ; Hoc est, T ad d , ut R ad s ; Adeoque $s T = d R$: Erit $d = \frac{s T}{R}$.

Adeoque; $s d = \frac{s^2 T}{R}$: Et Omnes $s d$, hoc est, Omnes $o T$, aequales Omnibus $\frac{s^2 T}{R}$: Et Omnes $s^2 T$, aequales Omnibus $o T R$:

Sive, Omnes s^2 , aequales Omnibus $o R$. Hoc est; Summa Quadratorum Sinuum Rectorum in spatio Circulari $EBFG$; aequalis, Fig. 154. Omnibus $o R$; hoc est, ipsi spatio $EBFG$ in radium R ducto. Et sic ubique.

Item, Omnes $o^2 T = Omn. s^2 d = Omn. \frac{s^3 T}{R}$. Adeoque Omnes $o^2 R = Omn. s^3$.

Item;

PROP. XIII. De Calculo Centri Gravitatis. 215

Item; $Omnes o^3 T = Omn. s^3 d = Omn. \frac{s^4 T}{R}$. Adeoque $Omnes o^3 R = Omn. s^4$. Et sic deinceps. Quæ ostendenda erant.

Atque hinc porro habetur Momentum Curvæ Superficieî Ungulæ Semi-cylindri, Semicirculo $AD\alpha$, ejusve Segmento cuius $BEGF$, Fig. 154. insistentis, (Acîem habentis $A\alpha$.) respectu aciei suæ. Cum enim omnes Rectæ superficiem illam complentes, sint Sinibus rectis qui eisdem arcus punctis respondent Æquales, (nempe, si Planorum Inclinationo sit Semi-quadrantis,) vel saltem Proportionalis, (quæcunque sit Plani secantis ad Basin inclinatio;) sintque earundem ab $A\alpha$ distantia, iidem Sinus Recti: Erunt earundem Momenta, ut Sinuum horum Quadrata; & Summa Momentorum, hoc est, Momentum Superficieî Curvæ, ut Summa Quadratorum illorum: Nempe huic summæ æqualis si Inclinationo Ungulæ sit Semi-quadrantis; vel ad illam saltem summam eam habebit rationem quam habet rectarum quævis superficiem illam curvam complentium ad suam respectivè ab $A\alpha$ distantiam.

Quod quidem Momentum, per Magnitudinem (jam traditam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à Plano per Acîem $A\alpha$, rectis superficiem curvam complentibus parallelo. Sed & in eo per aciem Plano esse constat, quod Rectas superficiem curvam complentes bifecat; per prop. 11. hujus. Atque in Plano inter rectarum illarum extremas medio, ad axem recto, jam ostensum est. § S. Ergo, ipsum Centrum datur. per prop. 26. Cap. 4.

Item; Momentum Figuræ Sinuum Rectorum $AC\alpha$, ejusve Segmenti ut $BEGF$, respectu rectæ cui adjacent $AD\alpha$: Seu (quod eodem recidit) Semi-quadrantis Ungulæ ejusdem Figuræ Sinuum, ejusve Segmenti, aciem habens eandem $AD\alpha$ rectam. Cum enim (propter cujusque Rectæ Centrum gravitatis in medio sui) cujusque Sinuum Momentum, seu Triangulum eidem insistent, sit ejusdem Semi-quadratum, (ducto scilicet unoquoque Sinuum in semissem sui: perit summam Quadratorum, ipsum Plani Momentum, seu Semi-quadrantis Ungulæ. (Unde & de aliis Ungulis, servatâ Alitudinum ratione, fiet judicium.)

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (jam inventam) divisum, exhibet Centri gravitatis distantiam, ab ipsa $A\alpha$ rectâ.

Denique; Hujus Ungulæ Momentum, hinc etiam habetur. Cum enim cujusque Triangulorum horum Centrum gravitatis, à recta $A\alpha$, communi omnium Acie, aut huic potius insistente perpendiculari Plano distat,

distat, duobus Trientibus istius cui insistit Sinus; sitque ipsum Triangulum (uti jam ostensum est) Semissis Quadrati; Erit (propter $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$) Cujusque Trianguli Momentum, Cubi Triens: Adeoque Triens Cuborum Sicutum illorum omnium, est ipsum Ungulæ (Semi-quadrantis) Momentum.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (modo inventam) divisum, exhibet Centri-gravitatis Ungulæ, ab ipso, in A, erecto Plano.

Cum verò, pro inveniendâ Summa Quadratorum, *Omn. s^2* ; & Summa Cuborum, *Omn. s^3* ; habenda erunt *Omn. $o R$* , & *Omn. $o^2 R$* , (per § V. hujus:) hoc est, Summa Ordinatim-applicatarum, & Summa Quadratorum ex illis, (in *R* ducenda:) Hæc quò habeantur nihil impedit; cum & jam notis methodis, haberi possint; & methodis à nobis infra tradendis.

S C H O L I U M.

Possent quidem hæc Propositio, prout Superficiem curvam ex circumducto Arcu Circuli ortam spectat, ab illâ quæ sequitur (aliunde demonstratâ) inferri. Nam datâ Arcus Magnitudine, ejusque Centro gravitatis; habetur tum Ungulæ superficies curva, (sive, quod eodem recidit, Summa Sinuum Rectorum;) tum Superficies curva illius conversione facta: per prop. 11 & 12 hujus. Sed perinde est sive hæc ab illâ, sive ab hac illa, inferatur; dummodo harum saltem altera aliunde probetur. Ego hanc potius præmissi, propter sequentis ex hac demonstrationem perspicuam, & quidem simpliciorē quàm apud alios hætenus viderim. Illa enim (meâ methodo) directè sequitur & immediatè, à demonstratis olim ab Archimede, & post illum aliis.

Quæ autem hic tradita sunt de Curva superficie Ungulæ Semi-cylindri, aciem habentis Diametrum basis circularis; seu, quod eodem recidit, Arcus Momento respectu istius Rectæ: facile (per ea quæ ad prop. 11. tradidimus) transferri poterunt ad Ungularum aliarum Cylindricarum Superficies curvas, alios habentes Axes; seu Arcuum Momenta respectu rectarum aliarum. Cumque omnes in superficie Cylindricâ Figuræ, planorum sectionibus terminatæ, resolvi possint vel in curvas figuras Cylindraceas, vel saltem Ungulares hujusmodi: poterunt propterea ejusmodi Figuræ omnes in Superficie Cylindraceâ, hac methodo, ad certas mensuras revocari. Quod cum solius calculi opus

PROP. XIII. De Calculo Centri Gravitatis. 217

opus sit; atque etiam in sequentibus aliquantò fusiùs tradendum: non erit necesse ut hic pluribus exponam.

Ea verò Linea Curva, quæ *Figuram Sinuum rectorum* (modo Fig. 155. memoratam) terminat, $AC\alpha$ fig. 155. alia non est quam Semi-ellipsis, sectione Semi-Cylindri facta, in planum expansa. (Quod olim docui in meo *de Cycloide Tractatu*; & in subjunctâ illi Epistola, pag. 99.)

Quippe si super $A\alpha D$ Semicirculo (fig. 154.) erigatur Semi-cylindrus, altitudinem habens, in D , æqualem ipsi DC , perque punctum ipsi D (in ea altitudine) imminens, Basisque diametrum $A\alpha$, transeat Planum (Ungulam Semi-quadrantalem abscindens;) Sectionem illam, Plano secanti & Superficie Cylindricæ communem, Semi-ellipsen esse constat. Eadem verò abscissæ Ungulæ curva superficies, in planum expansa, est ipsa quam *Figuram Sinuum rectorum* vocamus, $AC\alpha$. Ipsaque $AC\alpha$ illam terminans, eadem est linea jam in planum expansa, quæ, in Superficie Cylindri, fuerat Semi-ellipsis.

Sin porro, Planum idem (quod Ungulam hanc ex Semi-cylindro abscindit) continuetur per totum Cylindrum, integram Ellipsin sectione perficiens, eaque integra Ellipsis, eodem modo quo hæc semi-ellipsis, expansa in planum superficie curvâ, expandatur: Continuata curva $AC\alpha$ in $A\alpha$, exhibebit (utrinque à C) curvam eam (quam *Ellipsin expansam* pridem nominavimus) quæ *Figuram Sinuum versorum* terminabit. Quod in Tractatu de Cycloide fusiùs ostendimus; quæque in istius Tractatus Fig. 7 & 30. exhibetur: Et in sequentibus ulterius considerabitur, ad prop. 17 hujus.

PROP. XIV.

- A, B. Arcus Circuli, Centrum gravitatis, est in Axis sui eo Puncto, cujus distantia à Centro Circuli, est ad Radium, ut expositi arcus Chorda, ad Arcum suum: Et quidem, in Semiperipheria, ut Circuli Diameter ad Semiperipheriam; seu ut Duplum Radii, ad Peripheriæ Semissilem.
- C. (Adeoque; Datâ ratione Chordæ cujusvis ad Arcum suum; datur Arcus Centrum gravitatis: Et, Dato Arcus cujusvis, totâ Peripheriâ minoris, Centro gravitatis; datur Arcus ad Chordam suam ratio: Et, consequenter, Circuli Quadratura, seu ratio Diametri ad Perimetrum.)
- D. Estque Distantia Centri-gravitatis, Superficie Solidæ, conversione (perfecta vel imperfecta) facti, ab Axe conversionis suæ; ad Distantiam Centri-gravitatis, correspondentis Ungulæ (Superficialis Solidæve,) à Plano per ipsius Aciem transeunte (rectis in ipsius Curva superficie parallelo;) ut est, ad conversionis Arcum, Chorda sua: Et quidem, in Semiconversione, ut Diameter ad Semiperipheriam; seu, ut Duplum Radii, ad Peripheriæ semissilem.
- E. Atque hinc habetur, Superficie Sphæricæ, Zonæ dimidiæ (aliûsve imperfectæ) Centrum gravitatis.
- A. **E**sto Arcus circularis BAB, qui non sit major Semiperipheria; Chorda BB, à cujus extremis punctis B, B, demissæ (ad parallelam Diametrum DCD) Perpendiculares sint Bb, Bb. Adeoque, si circa DCD ut Axem, converti intelligatur DAD semiperipheria; quæ à DB describitur portio superficie Sphæricæ, æqualis erit facta ex bD in Circuli Peripheriam, (atque hoc utrinque;) quæque à BAB

A.
Fig. 156.

PROP. XIV. *De Calculo Centri Gravitatis.* 219

BA B describitur, æquabitur factò ex bb, hoc est B B, in eandem circuli Peripheriam: (per §. G, H, I, prop. præced.) Hoc est, si Chordæ seu Basìs B B magnitudo ponatur c ; & integræ Peripheriæ, P ; erit, quæ ab Arcu describitur curva Superficies, $c P$.

Est autem, quæ ab illo Arcu describitur Superficies curva; æqualis factò ab Arcu in Peripheriam Centro gravitatis descriptam; per prop. 12 hujus.

Ergo; si per magnitudinem Arcûs, ut a , dividatur $c P$; prodibit $\frac{c}{a} P$ periphèria centro gravitatis descripta. Adeoque pro Periphèria P , substituendo Radium, ut R ; erit $\frac{c}{a} R$ (cui æqualis ponatur G) Distantia centri gravitatis à D C D diametro.

$$a) c P \left(\frac{c}{a} P. \right. \quad a) c R \left(\frac{c}{a} R = G. \quad a.c :: R.G.$$

Est autem, in Arcûs Axe A C; per prop. 3 hujus. Ergo, in illius eo Puncto quod à Diametro D C D, ejûsve puncto C, (circuli centro,) ita distat. per prop. 26. Cap. 4. Nempe, ut a ad c , sic Rad G . Hoc est, ut Arcus B A B, ad B B Chordam; sic C A Radius, ad Centri Gravitatis à Centro Circuli distantiam, C G. Quod erat propositum.

Exponatur deinde, Arcus circuli Semiperipheriâ major, B a B. B. Invento, ut priùs, residui arcûs B A B centro gravitatis G: erit (propter totius Centrum gravitatis C, per prop. 5 hujus) expositi Centrum-gravitatis γ , in G C continuatâ: Atque ut B a B, ad B A B, sic C G, ad C γ : (per prop. 27. Cap. 4.) sive, ut $a = P - a$, ad a ; sic $G = \frac{c}{a} R$, ad $\gamma = \left(\frac{a}{a} \times \frac{c R}{a} \right) = \frac{c}{a} R$. Adeoque ut a ad c , sic R ad γ : Vel ut B a B Arcus, ad chordam suam B B; sic Radius C a, ad C γ , distantiam Centri gravitatis arcûs expositi, à circuli Centro C. Quod erat propositum.

$$a : a :: G = \frac{c}{a} R. \quad \gamma = \frac{c}{a} R. \quad a.c :: R.\gamma.$$

Speciatim verò, in Semiperiphèria, (quam ad utrumvis duorum casuum referamus, perinde est;) cum sit (propter $c = D$), $c P = D P$; C.
F f 2 fi

220 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

si hoc per Arcum $a = \alpha = \frac{1}{2}P$ dividatur, erit $\frac{1}{2}P)DP$ (2 D periphēria Centro gravitatis descripta, cujus itaque Radius $\frac{2D}{P}R$, hoc est, $\frac{4R^2}{P}$, est Centri Gravitatis à Circuli Centro distantia, $CG = G = \frac{4R^2}{P}$.

$$a : \frac{1}{2}P :: \frac{1}{2}P : D :: R : G = \frac{4R}{P}R = \frac{4R^2}{P}$$

D. Corollarium item patet. Cum enim eadem sit ratio Arcus BAB ad BB chordam suam, quæ est Radii CA ad CG distantiam centri gravitatis in ipsa CA: Datâ rationum unâ, datur alterâ. Datâ verò unius Arcus (cujus ratio ad totam Periphēriam nota intelligatur) ad Chordam suam ratione, dabitur ejusdem, adeoque totius Periphēriæ, ad aliam quamvis Chordam, adeoque ad Diametrum ipsam.

E. Item illud de Ungulis, Solidisque aut Superficiebus conversione factis, similiter patet. Si enim Superficie Solidive bdb (conversione Lineæ Planive BD facti) singuli Arcus bBb, dDd, (plano XBD bisecti) extendi intelligantur in totidem sibi æquales rectas βββ, δδδ, eisdem plani XBD punctis ad angulos rectos insistentes, atque ab eodem bisectas, (æqualem Ungulam, vel ex duabus compositam, complentes; per prop. 12 hujus:) Rectarum Centra Gravitatis in ipsis B, D, punctis constituta, ab axe conversionis X distabunt, respectivorum arcuum Semidiametris XB, XD. Ipsorum vero Arcuum singulorum (Rectis æqualium, & invicem similium,) Centra gravitatis (propter curvationem) in eadem ratione omnia (propter arcus similes) propius admoventur ad conversionis Axem X; atque in eadem ratione minuitur Momentum (respectu ejusdem X axis) singulorum; adeoque & simul omnium; & propterea, communis omnium Centri gravitatis distantia. Nempe (per modò demonstrata) ut Arcuum unus quilibet bBb, ad bB Chordam suam; sic Distantia Centri gravitatis, adeoque Momentum, tum singularum, tum simul omnium, Rectarum βββ, δδδ, &c. Ungulam complentium; ad Distantiam centri gravitatis, & momentum, tum singulorum respectivè, tum simul omnium, Arcuum bBb, dDd, &c. (Superficiem Solidumve conversione circa X factum, complentium,) ab eodem X conversionis Axem.

PROP. XIV. De Calculo Centri Gravitatis. 221

Axe. Putà, ut Arcus a , ad Chordam c ; sic XG distantia illa, ad distantiam hanc $X\gamma$. Quod item demonstrandum erat.

Hoc est; In Semi-conversione; ut $\frac{1}{2}P$ ad $2R$; seu ut P ad F .
4 R.

Porro: Cum ostensum sit (ad §. K. prop. præced.) In portione G.
Sphæricæ Superficie integræ, parallelis planis interjecta (quam *Zo-* Fig. 154.
nam integram appello,) putà, quæ Arcus EG circa BF conversione
integrâ describitur; Centrum gravitatis esse in Axe medio, (putà,
in rectæ BF puncto medio:) Adeoque in *Zonis imperfectis*, (putà,
quæ conversione dimidiatâ, aliâve imperfectâ, describuntur,) & cor-
respondentibus Ungulis; Centrum Gravitatis in eo plano esse, quod
tantundem distet à plano Sphæram in a tangente, seu, quod medium est
inter B & F axi rectum:

Sitque (per prop. 12 hujus) in illo plano quod (per conversionis
Axe vel Ungulæ Acie Aa incedens) bisecat, in superficie Ungu-
lari, erectas omnes rectas illam constituentes; in Sphærali, omnes Ar-
cus conversione factos: Quippe, in quo Plano sunt Omnium Centra
gravitatis, in eodem est commune omnium. (Quod autem rectarum
illarum unam bisecat, bisecat omnes; Arcuumque unum bisecans, om-
nes bisecat: propter similia illic Triangula, hic Arcus similes; ob
eundem Inclinationis Angulum ad Acie vel Axe Aa .) Adeoque
in duorum illorum Planorum communi sectione:

Quò ipsum Centrum determinetur (in Ungulis hisce, & Zonis
imperfectis,) Quærenda erit etiam ejusdem (in hoc plano per Axe
tanseunte) distantia ab Acie vel Axe Aa . Quod sic habetur.

Intelligatur Arcui cuivis, ut EG , insistenti Semiquadrantis Un-
gulæ (acie habentis BF) superficies Curva: Cujus singulas rectas
arcui insistentes (superficiem curvam complentes) æquales esse respecti-
vis Sinibus rectis (ad §. Q. prop. præced.) ostensum est; (adeoque
superficiem illam Summæ Sinuum æqualem; hoc est, factò ex Altitudi-
ne BF , quam l dicamus, in Radium ductæ; hoc est, lR ; per §. N.
prop. præced.) Sed earundem distantie à perpendiculari plano per
axem BF , sunt item iidem Sinus recti. Momenta itaque singularum (mag-
nitudine in distantiam ductâ) sunt ut Sinuum Quadrata. Adeoque
omnium Momenta (respectu rectæ BF) ut *omnia* s^2 , summa Qua-
dratorum Sinuum. Hoc est (per §. V. ejusdem) ut spatium $EBFG$
in Radium ductum. Quod quidem spatium $EBFG$ (cum satis inno-
tescat) dicamus k^2 ; adeoque $k^2 R$ est Momentum expositæ super-
ficie curvæ Ungularis, respectu rectæ BF . Atque hoc Momentum

per.

per Magnitudinem lR divisum, exhibet $\frac{k^2 R}{lR} = \frac{k^2}{l}$ distantiam Centri gravitatis à perpendiculari Plano super $A\alpha$ erecto.

Cumque eadem sit ratio (hoc respectu) Ungularum cujuscunque fiat Altitudinis; (utcunque enim aucta Altitudine, adeoque & Magnitudine, & Momento; puta, in ratione P ad R ; erit adhuc eadem distantia; $\frac{k^2 P}{lP} = \frac{k^2 R}{lR} = \frac{k^2}{l}$.) Erit cujuscunque Superficie Ungularis, super Arcum Circuli erectæ, (Acie habentis, Circuli Diameter $A\alpha$.) Distantia Centri gravitatis à perpendiculari plano per ipsam $A\alpha$, $\frac{k^2}{l}$; hoc est, quæ oritur ex plano $EBFG$ ad rectam BE applicato.

Eademque esset, (dempta curvitate, quæ conversione oritur,) in Superficie conversione facta, à conversionis Axe distantia; (propter singulos Arcus in hac, singulis in correspondenti Ungulæ superficie curva respectivis rectis, æquales; atque in eadem à conversionis Axe Distantia, qua sunt illæ à parallelo Plano per Acie suam.) Sed, propter curvaturam conversione factam; minuenda est ea Distantia, pro Ratione quam habet Conversionis Arcus ad Chordam suam; ut jam ostensum est. Puta; in Semiconversione, ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad Diameterum $2R$; in conversione Quadrantali, ut $\frac{1}{4}P$ ad $R\sqrt{2}$; Et, universaliter, ut Arcus a vel m , ad Chordam suam c vel n ; sic distantia in Ungulâ (jam ostensa) $\frac{k^2}{l}$, ad $\frac{k^2 c}{la}$ vel $\frac{k^2 m}{ln}$ distantiam Centri gravitatis Zonæ imperfectæ, à conversionis Axe.

Sed & in duorum Planorum, prius memoratorum, communi sectione reperiri, supra ostensum est: Ergo, in hujus sectionis eo Puncto quæ sic (ut dictum est) distat. Datur igitur, tum in Ungulâ, tum in Zonâ utut imperfectâ, ipsum Gravitatis Centrum. Quod erat ultimò ostendendum.

PROP.

PROP. XV.

Sectoris Circuli (duobus Radiis & Arcu comprehensi) A.
Centrum gravitatis est in Axis sui illo puncto, cujus à Fig. 158.
Centro Circuli distantia, est ad duos Trientes Radii,
ut expositi Arcus Chorda, ad Arcum suum.

Adeoque, in Semicirculo; Ut Semiperipheria ad Dia-
metrum, sic $\frac{2}{3}$ Radii ad distantiam Centri gravitatis Se-
micirculi à Circuli Centro.

Atque hinc etiam Segmenti circularis (recta abscissi) Cen- B.
trum gravitatis colligitur: Atque de aliis Portionibus
similiter. Cæteraque quæ hinc dependent.

Nempe; Si ponatur, in exposito circulo, Radius CA vel C.
CB = R; Peripheria integra, P; Arcus BA = a, a- Fig. 159.
deoque BAB = 2a; Chorda BA = c; Sinus rectus 160.

BV = s, adeoque Chorda BB = 2s: Sinus versus
AV = v, reliquusque Vα = 2R - v = b; à Centro
Distantia VC = x = R - v si V sit supra Centrum,
vel VC = x = v - R si infra, vel VC = x = 0 si
in Centro: Item a - s = e; a + s = f; R + v = z.

Erit, totius Semicirculi ADα, Magnitudo, $\frac{1}{2}RP$: cen- D.
trique gravitatis, sive à τα, sive à TA, distantia, R; I.
Momentum respectu τα, vel TA, $\frac{1}{4}R^2P$: Distantia Q.
Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R^2}{3P}$; Momentum respectu
Aα, $\frac{2}{3}R^3$.

Sectoris BCA magnitudo $\frac{1}{2}aR$: Centri gravitatis di- D, I.
stantia a DC, $\frac{2s}{3}R$; à τα, $R + \frac{2s}{3}R$; à TA, $R - \frac{2s}{3}R$;
Momentum ejus, respectu τα, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$;
momentum ejusdem respectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$:
Centri

- Q.W. Centri gravitatis distantia ab $A\alpha$, $\frac{2}{3} \frac{vR}{e}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3} v R^2$.
- E.K. Trianguli B C V, magnitudo $\frac{1}{2} s x$: Distantia Centri gravitatis à D C, $\frac{2}{3} x$; à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} R - \frac{2}{3} v$; à T A, $R \pm \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} R + \frac{2}{3} v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} s x R \pm \frac{1}{3} s x^2 = \frac{sR - 2v}{6} s x$; respectu T A, $\frac{1}{2} s x R \pm \frac{1}{3} s x^2 = \frac{sR + 2v}{6} s x$. Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3} s$;
- R.T. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6} s^2 x$;
- F.L. Semisegmenti B V A, magnitudo $\frac{1}{2} e R + \frac{1}{2} s v$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R + \frac{1}{3} s^3$; respectu T A, $\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R - \frac{1}{3} s^3$: Distantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; a T A, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; a D C, $\frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; a B V, $\frac{2s^3}{3eR + 3sv} - R + v$; momentum respectu B V, $-\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{2} s v R - \frac{1}{6} s^3$;
- R.T.V. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6} v R^2 - \frac{1}{6} s^2 R + \frac{1}{6} s^2 v = \frac{1}{6} v^2 R + \frac{1}{6} s^2 v$; distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{vR + s^2}{3eR + 3sv}$.
- F.N. Trianguli B A V, magnitudo $\frac{1}{2} s v$: Distantia Centri gravitatis a T A, $\frac{2}{3} v$; a $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3} v$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $s v R - \frac{1}{3} s v^2$; respectu T A, $\frac{1}{3} s v^2$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3} s$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6} s^2 v$.
- R. Segmenti A B A, magnitudo $\frac{1}{2} e R$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} e R^2 + \frac{1}{6} s v R$; respectu T A, $\frac{1}{2} e R^2 - \frac{1}{6} s v R$;
- G.N. distantia Centri gravitatis a D C, $\frac{sv}{3e}$; a $\tau\alpha$, $R + \frac{sv}{3e}$;
- Q. a T A, $R - \frac{sv}{3e}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6} v^2 R$: distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{v^2}{3e}$.

Et

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 225

Et similiter de segmento $\alpha B \alpha$, mutatis mutandis.

Trianguli $BC \alpha$, magnitudo $\frac{1}{2} s R$: Centri gravitatis distantia a $\tau \alpha$, $R - \frac{1}{3} v$; a TA , $R + \frac{1}{3} v$; infra DC , $\frac{1}{3} v$; momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{6} s v R$; respectu TA , $\frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$: Distantia centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{1}{3} s$; momentum respectu $A \alpha$, $\frac{1}{6} s^2 R$. H.M. S.T.

Trianguli $BV \alpha$, magnitudo $\frac{1}{2} s b$: Distantia centri gravitatis a $\tau \alpha$, $\frac{2}{3} b$; a TA , $2R - \frac{2}{3} b$; momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{3} s b^2$; respectu TA , $s b R - \frac{1}{3} s b^2$: Distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{2}{3} s$; momentum respectu $A \alpha$, $\frac{2}{6} s^2 b$. H.M. S.T.

Sectoris $B \alpha A$, magnitudo $\frac{1}{2} f R$: Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{2} f R^2 + \frac{1}{6} s b R$; respectu TA , $\frac{1}{2} f R^2 - \frac{1}{6} s b R$; distantia centri gravitatis a $\tau \alpha$, $R + \frac{s b}{3 f}$; a TA , $R - \frac{s b}{3 f}$; a DC , $\frac{s b}{3 f}$: Momentum respectu $A \alpha$, $\frac{1}{3} v R^2 + \frac{1}{6} s^2 R$; S.

Centri gravitatis inde distantia, $\frac{2 v R + s^2}{3 f}$. H.M.

Momenta autem eadem sunt ubique & Semiquadrantales Ungulæ: Solidaque respectiva integrâ conversione facta, sunt ad Ungulas illas, ut P ad R ; & Semisolida, eorum Semisses; quod & proportionaliter intelligendum est de Solidis aliis imperfectâ conversione factis. O.

Quæque de Momentis & Solidis respectu rectarum TA , $\tau \alpha$, DC , BV , dicta sunt; facile transferentur ad alias rectas hisce parallelas: Et, quæ respectu $A \alpha$, ad alias huic parallelas: Aut (propter ipsa Centra gravitatis Planorum data) ad alias etiam rectas transferentur. O.P.X.

Quæque de Circulo dicta sunt, ejusque Portionibus; eadem Ellipsi, & portionibus hujus, facile accommodantur. Y.

Intelligatur Circuli Sector $C B A B$, vel $C B \alpha B$, (major, minor, an aequalis Semicirculo, perinde est:) ex infinitis numero Sectoribus componi: Sive, quod (propter infinitatem) eodem recidit, ex totidem A. Fig. 158.

G g

totidem triangulis, invicem æqualibus, (quorum communis vertex sit C Centrum:) per def. 1. Cap. 4. Quæ totidem rectis (ut eorundem Triangulorum Axibus) repræsententur, ut CB . Cùmque (per prop. 6 hujus) Centrum gravitatis in Triangulo, Altitudinis Triente a Base distet, (sive, à parallelo plano per Verticem, duobus Trientibus;) Si Radius $Cb = \frac{2}{3} CB$, describatur peripheria bb , (expositæ BB similis, & similiter posita) tranſibit hæc per Triangulorum singulorum Centra gravitatis. Cujus itaque cum singula puncta (æqualibus ab invicem distantis remota) æqualiter onerentur (æqualibus utique Triangulis, quorum Centra gravitatis sustinere intelligantur:) idem erit arcus bb sic onusti Centrum gravitatis, atque ipsius Sectoris BCB , per 16 Cap. 4. Facto itaque, ut chorda bb ad arcum suum, hoc est, ut Chorda BB ad arcum suum, sic CG , ad radium Cb , hoc est, ad $\frac{2}{3} CB$: (Hoc est, $CG = \frac{2}{3} R$;) Erit G Centrum gravitatis Arcus bb , (per prop. præced.) adeoque & (per jam demonstrata) Sectoris BCB . Quod demonstrandum erat.

Hoc est, speciatim in Semicirculo; Ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad Chordam suam, hoc est, ad Circuli Diametrum, $2R$: sic duo Trientes Radii, $\frac{2}{3}R$, ad $\frac{8R^2}{3P} = CG$, distantiam Centri gravitatis Semicirculi (in axe suo positi) à Circuli Centro C .

B. Corollarium, de Circuli Segmento; constat ex 27 Cap. 4. Quippe cognitis tum magnitudine, tum Centro gravitatis, Sectoris CBA , vel CBA , & Trianguli BBB : Cognoscitur inde tum Magnitudo tum Centrum gravitatis Segmenti BBB , vel BBB .

Idemque in aliis Circuli portionibus ostendetur.

C. Exempli gratia. In exposito Circulo, sit Radius CA (vel CB) $= R$: Integra Peripheria, P : Arcus $BAA = a$: Adeoque $BAA = 2a$: Chorda $BA = c$: Sinus rectus $BV = s$; adeoque Chorda $BB = 2s$: Hujusque ab A vertice distantia, (hoc est, Segmenti BBA altitudo, vel expositi arcus BAA sinus versus) $VA = v$: ejusque Altitudo seu distantia à base, $Va = 2R - v = b$; ejusque à Centro C distantia $VC = x$. (eritque $x = R - v$, si V sit supra Centrum C , adeoque BAB minor quam Semiperipheria; vel $x = v - R$, si V sit infra Centrum, adeoque BAA major quam Semiperipheria; vel denique $x = 0$, si V sit in Centro, adeoque BAB Semiperipheria:) Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$.

D. Est itaque Sectoris $BCBA$ magnitudo aR , (nempe $\frac{1}{2}BAB \times CA$, per

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 227

per prop. 12 hujus;) ejusque Semifissis B C A, $\frac{1}{2} a R$. Et, speciatim, Fig. 159, totius Semicirculi, (propter $a = \frac{1}{2} P$,) $\frac{1}{4} R P$. 160.

Item Trianguli B B C magnitudo $\frac{1}{2} B B \times C V$ (per prop. 6 hujus;) E.
hoc est $s v$: (Nempe, $s R - s v$, si V fuerit supra Centrum; vel $s v - s R$, si infra:) Adeoque B C V = $\frac{1}{2} s v$: Hoc est, $\frac{1}{2} s R - \frac{1}{2} s v$, si supra; vel $\frac{1}{2} s v - \frac{1}{2} s R$, si infra.

Adeoque, Si à Sectore B C B A = $a R$, Auferatur Triangulum F.
B B C = $s R - s v$; vel Addatur Triangulum B B C = $s v - s R$;
(prout fuerit V supra infrave Centrum:) utrovis casu habetur Seg-
mentum B B A = $(a R \mp s v) = a R - s R + s v = e R + s v$.
Adeoque B V A = $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s v = \frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v = \frac{1}{2} e R + \frac{1}{2} s v$.

Hoc est: Si inscripto (in Circuli Segmento) Triangulo æqualto
A B B (= $s v$) addatur Triangulum aliud ($a R - s R = e R$) cujus
nempe Basis sit æqualis Circuli Radio (= R) & Altitudo (= $2a - 2s$
= $2e$) æqualis excessui Arcus supra subtensam: Habetur Segmenti
B B A magnitudo; $a R - s R + s v = e R + s v$. Ejusque Semifissis,
Semisegmentum B V A = $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} s v = \frac{1}{2} e R + \frac{1}{2} s v$.

Adeoque, duo simul Segmenta abscissa A B, A B, (quæ, cum G.
inscripto Triangulo, complent Segmentum B B A,) æquant $a R - s R = e R$,
& eorum utrumvis $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} e R$.

Hoc est; Si ($a - s = e$) excessus Arcus B A supra suum Sinum
rectum B V, ducatur in ($\frac{1}{2} R$) Semissem Radii: Habetur magnitudo
Segmenti B A; = $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} e R$.

Si verò Segmento B B A (= $e R + s v$), adjiciatur Triangulum H.
B B a (= $h s$:) Habetur Sector B a B A (angulum habens B a B
in peripheria, & B A B arcum,) $e R + s v + s h$; hoc est (propter
 $v + h = 2 R$), $e R + 2 s R$; vel (propter $e = a - s$), $a R + s R = f R$.
Adeoque B a A = $\frac{1}{2} a R + \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} f R$.

(Idem proveniret, si Sectori B C B A = $a R$, adderentur duo Trian-
gula B C a, B C a; quorum communis Basis est C a = R , & utri-
usvis Altitudo B C = s : adeoque simul utraque $s R$. Hoc est,
B a B A = $a R + s R = f R$: Et B a A = $\frac{1}{2} a R + \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} f R$.)

Hoc est; Si ($a + s = f$) aggregatum Arcus B A, & Sinus Recti
B V, ducatur in Semissem Radii (= $\frac{1}{2} R$:) Habetur Sector B a A
= $\frac{1}{2} a R + \frac{1}{2} s R = \frac{1}{2} f R$.

Similiter de Centro Gravitatis procedendum.

Nempe, (per jam demonstrata ad hanc propositionem § A,) Secto-
ris B C B A (sive Semicirculo major sit, sive minor, sive ipsi æqualis)
Centrum gravitatis est in C A recta, supra Centrum C, quantum est

Gg 2

2 s

Fig. 159, $\frac{2s}{3a} R$. Nempe eâ ratione ad $\frac{2}{3} R$, quæ est Chordæ BB = $2s$, ad
160. arcum BAB = $2a$; sive ut s ad a :.) Adeoque illius, à puncto a ,

feu τa tangente, distantia est $R + \frac{2s}{3a} R = \frac{3a+2s}{3a} R$. Adeoque à

T A (tangente verticis) $R - \frac{2s}{3a} R = \frac{3a-2s}{3a} R$. Eademque est,

ab eisdem τa , T A, distantia Centri gravitatis semifectoris B C A; Propter dimidias BV & huic parallelas semifectorem complementibus, totis BB & huic parallelis complementibus Sectorem integrum, proportionales, & in eisdem cum illis distantis sive à τa , sive à T A. (Quod & si niliter intelligendum erit de Semi-conis, Semi-segmentis, &c. quorum Centra gravitatis sive à Basis plano, sive à Plano verticis basi parallelo, tantundem distant, quantum inde distant Centra gravitatis integrorum suorum sive Conorum, sive Segmentorum, &c. Quod semel monitum esto, ne opus sit idem sæpius repetere.) Et, speciatim, Semicirculi A D a, Centri gravitatis (utpote in DC jacentis) distantia sive à τa , sive à T A, est $R = C a = C A$.

Adeoque (propter magnitudinem Sectoris B C B A = $a R$, & B C A = $\frac{1}{2} a R$.) Momentum (respectu rectæ τa ut Axis Libræ) Sectoris B C B A, est $\frac{3a+2s}{3} R^2$, (magnitudine scilicet in distantiam ductâ;) & Semifectoris B C A, $\frac{3a+2s}{6} R^2$. Et, respectu rectæ T A, Momentum Sectoris B C B A, est $\frac{3a-2s}{3} R^2$, & ipsius B C A, $\frac{3a-2s}{6} R^2$. Et speciatim, totius Semicirculi A D a, momentum sive respectu τa , sive respectu T A, (propter $a = \frac{1}{2} P$, & $s = 0$.) est $\frac{1}{4} R^2 P$.

K. Estque (per 5 & 6 hujus) Trianguli B B C, Centrum gravitatis in C V, ejusque à C Centro distantia $\frac{2}{3} C V = \frac{2}{3} x$. Adeoque à τa , $R + \frac{2}{3} x$, prout infra supràve, Centrum fuerit; (nempe $R + \frac{2}{3} x$ si supra; $R - \frac{2}{3} x$ si infra Centrum;) Hoc est (propter $x = R - v$ si supra Centrum, & $x = v - R$ si infra Centrum,) utroque casu, $\frac{2}{3} R - \frac{2}{3} v$. Adeoque ejusdem à T A distantia, $R + \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} R + \frac{2}{3} v$.

Est autem (ut supra, § E,) magnitudo Trianguli B B C = $s x$ (hoc est, $s R - s v$ si supra, vel $s v - s R$ si infra Centrum.)

Quod ductum in Centri gravitatis distantiam à τa , $R + \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} R - \frac{2}{3} v$, exhibet ejusdem, respectu rectæ τa , momentum $s x R + \frac{2}{3} s x v$.

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 229

$= \frac{5R-2v}{3}sx$; Hoc est $\frac{5sR^2-7svR+2sv^2}{3}$ vel $\frac{-5R^2+7svR-2sv^2}{3}$; Fig. 59, 16c.
 prout supra infrave fuerit.

Idemque ductum in ejusdem à T A distantiam, $R-\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$; exhibet ejusdem B B C Trianguli momentum respectu rectæ T A, $sR-\frac{2}{3}sv$; hoc est $\frac{sR^2+svR-2sv^2}{3}$ vel $\frac{-sR^2-svR+2sv^2}{3}$, prout supra infrave Centrum fuerit.

Aut etiam (propter A a, A B, A V; hoc est $2R, c, v$; continue proportionales: adeoque $2vR=c^2=s^2+v^2$;) Illic quidem $\frac{5sR^2-3svR-2s^3}{3}$ vel $\frac{-5sR^2+3svR+2s^3}{3}$; Hic vero $\frac{sR^2-3svR+2s^3}{3}$ vel $\frac{-sR^2+3svR-2s^3}{3}$; prout supra infrave Centrum fuerit hoc Triangulum.

(Atque hic monendum duxi; quod oppidò notandum velim, ne sit opus idem iterum repetere: Hanc reductionem in sequentibus sæpissime occurrere. Nempe, propter $2vR=c^2=s^2+v^2$; quoties occurrit c^2 vel v^2 ; pro c^2 substitui $2vR$; & pro v^2 , substitui c^2-s^2 , hoc est $2vR-s^2$. Ominino enim expedire compertum habeo, ut unam aliquam formam designandi eandem quantitatem adhiberem; ad quam æquipollentes aliæ reducantur quum opus fuerit; ne symbolorum varietas confusionem pareret. Quod memineris velim, ne, in reductionibus à nobis subinde crebrò faciendis, aliquando hæreas.)

Atque hoc Trianguli Momentum, respective Subtractum Additumve, (prout supra Centrum infrave fuerit,) Momento Sectoris BCBA, (nempe, $aR^2+\frac{2}{3}sR^2$ respectu rectæ τa , & $aR^2-\frac{2}{3}sR^2$ respectu rectæ T A,) exhibet (utroque casu) Momentum Segmenti B B A respectu rectæ τa , $aR^2-sR^2+svR+\frac{2}{3}s^3=cR^2+svR+\frac{2}{3}s^3$; & semisegmenti BVA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}cR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$. Et, respectu rectæ T A, Momentum Segmenti B B A, $aR^2-sR^2+svR-\frac{2}{3}s^3=cR^2+svR-\frac{2}{3}s^3$; & semisegmenti BVA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}cR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, per magnitudinem segmenti B B A $=cR+sv$, aut semisegmenti BVA $=\frac{1}{2}cR+\frac{1}{2}sv$, (relative,) divisa: exhibent Segmenti, aut Semisegmenti, distantiam à τa $R+\frac{2s^3}{3cR+3sv}$: Atque à T A, $R-\frac{2s^3}{3cR+3sv}$: Adeoque illius altitudinem supra Centrum C, aut C D rectam, $\frac{2s^3}{3cR+3sv}$, hoc est $\frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv}$: Et supra rectam B B, seu BV, $\frac{2s^3}{2s^3}$

L

Fig. 159, $\frac{2s^3}{3eR + 3sv} - R + v = \frac{2s^3}{3aR - 3sR + 3sv} - R + v$.
160.

Atque hac demum, à BV, distantia, in magnitudinem ducta, exhibet momentum, respectu rectæ BV, Segmenti BBA, $\frac{2}{3}s^3 - aR^2 + sR^2 + avR - \frac{2}{3}svR + sv^2 = -\frac{2}{3}eR^2 + avR - \frac{1}{3}s^3$. Et semifegmenti BVA, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3 = -\frac{1}{3}exR + \frac{1}{6}sv$.

M.

Deinde, Trianguli BBA, aut BVA, distantia Centri gravitatis à τa , est $\frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R - \frac{2}{3}v$: adeoque à TA, $\frac{2}{3}R - \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}v$. Quæ in magnitudines ($sh, \frac{2}{3}sh$) ducta, exhibet Trianguli BBA, momentum respectu τa , $\frac{2}{3}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{2}{3}sv^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{2}{3}s^3$; & respectu TA, $\frac{2}{3}shR - \frac{2}{3}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 + \frac{2}{3}svR - \frac{2}{3}sv^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{2}{3}s^3$, & Trianguli BVA, momentum respectu rectæ τa , $\frac{1}{3}sh^2 = \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; & respectu rectæ TA, $\frac{1}{3}shR - \frac{1}{3}sh^2 = \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, addita respectivis momentis Segmenti BBA, & Semisegmenti BVA, (§L inventis) exhibent Sectorum BBA, BBA, momenta respectu earundem τa , TA. Nempe, Sectoris BBA momentum respectu τa , $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR = fR^2 + \frac{1}{3}shR$; & respectu rectæ TA, $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 + \frac{1}{3}svR = fR^2 - \frac{1}{3}shR$: Et Sectoris BBA, momentum respectu rectæ τa , $\frac{1}{3}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & respectu TA, $\frac{1}{3}fR^2 - \frac{1}{6}shR$.

Eodem modo, Trianguli BCA, Centrum gravitatis est in recta $\alpha\beta$, quæ à puncto α ad medium rectæ BC ducitur, ejusdem $\alpha\beta$ duas tertias versus α abscondens. Est autem ipsius medii puncti β , eadem altitudo supra τa , quam habet rectæ CV medium punctum γ ; nempe $\alpha\gamma = R + \frac{1}{2}x$ (prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) hoc est, (utroque casu) $\alpha\gamma = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}v$. Adeoque distantia Centri gravitatis Trianguli BCA, à τa est $\frac{2}{3}\alpha\gamma = R - \frac{1}{3}v$; atque à TA, $R + \frac{1}{3}v$.

Adeoque (propter magnitudinem Trianguli unius BCA = $\frac{1}{2}sR$; & simul amborum 2 BCA = sR) erit unius momentum respectu rectæ τa , $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, & simul utriusque $sR^2 - \frac{1}{3}svR$: Et, respectu rectæ TA, momentum unius $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; & simul utriusque $sR^2 + \frac{1}{3}svR$.

Quæ quidem addita momentis Sectorum BCA, & BCBA, nempe $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$, & $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (per §I.) exhibent momentum, respectu rectæ τa , Sectoris BBA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}svR - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & sectoris BBA, $fR^2 + \frac{1}{3}shR$: Et respectu rectæ TA, momentum Sectoris BBA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}svR - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$; & Sectoris BBA, momentum $fR^2 - \frac{1}{3}shR$, ut prius.

Atque

PROP. XV. *De Calculo Centri Gravitatis.* 231

Atque hæc demum momenta, per suas respective planorum magnitudines ($\frac{1}{2}fR$, fR) divisa; exhibent utriusvis Sectoris B α A, 160.

B α BA, Centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $R + \frac{sb}{3f}$; & à TA, $R - \frac{sb}{3f}$;

Adeoque altitudinem ejus supra Centrum C, vel CD rectam,
 $\frac{sb}{3f} = \frac{2sR - sv}{3a + 3s}$.

Similiter, Trianguli ABV, magnitudo, est $\frac{1}{2}sv$; distantia centri gravitatis à TA, est $\frac{2}{3}v$; adeoque, à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$; & propterea ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$; & respectu TA, $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$. N.

Quæ quidem momenta, subducta ex respectivis momentis Semicircuiti BVA, (nempe, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$, per § L.) relinquit Segmenti ABA momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; & respectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$.

Atque hæc momenta, divisa per sectoris ABA magnitudinem, $\frac{1}{2}eR$ (per § G.) exhibent distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{sv}{3e}$;

& à TA, $R - \frac{sv}{3e}$; adeoque supra DC, $\frac{sv}{3e} = \frac{sv}{3a - 3s}$.

Pariter, de Segmento $\alpha B\alpha$ judicandum; puta, pro arcu AB = a , substituendo arcum reliquum ad Semicirculum $\alpha B = a = \frac{1}{2}P - a$; & pro sinu verso AV = v , substituendo $\alpha V = h = 2R - v$; item pro TA tangente contermino arcui AB, substituendo $\tau\alpha$ tangentem conterminum ipsi αB ; & vice versa, TA pro $\tau\alpha$. Quippe sic momentum Segmenti $\alpha B\alpha$, respectu Tangentis oppositi TA, erit $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR$; & respectu Tangentis contermini $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$.

Aut etiam, ex $\frac{1}{4}PR^2$ momento totius Semicirculi AD α , respectu Tangentis utriusvis $\tau\alpha$ vel TA, auferendo $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ momentum sectoris B α A respectu ipsius $\tau\alpha$ (per § M.) habetur residui ad semicirculum Segmenti $\alpha B\alpha$ respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; hoc est (propter $\frac{1}{2}P - a = a$, & $v = 2R - h$), $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}shR$. Atque similiter inde subducendo ejusdem B α A sectoris momentum respectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; habetur segmenti $\alpha B\alpha$, respectu ejusdem TA, momentum $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; hoc est (propter $\frac{1}{2}P - a = a$, & $v = 2R - h$), $\frac{1}{4}PR^2 - \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}shR$. ut prius.

Et

O. Et simili ratione, mutatis mutandis, eorundem expositorum omnium Planorum momenta respectu alius rectæ ipsiſ τa , TA , BV , parallelæ; cujus distantia infra vel supra harum aliquam datur.

Fig. 159.
160.

Quodque de horum Planorum Momentis respectu rectarum τa , TA , BV , aut hisce parallelarum, dictum est; pariter intelligendum est de Ungulis super eadem plana erectis, quæ plano abscindantur per easdem respectivè τa , TA , BV , vel hisce parallelas, (quæ expositum planum non secant,) tranſeunte. Nempe; Si secantis plani ad expositum inclinationis angulus sit Semiquadrantalſ seu grad. 45, (quam *Semiquadrantalem Ungulam* dicimus,) eadem erit (per 11 hujus) Ungulæ atque Momenti designatio. (Erit enim Ungulæ altitudo, super quodvis expositi plani punctum, eadem atque ejusdem puncti ab illâ rectâ quæ est communis planorum interſectio quam *Ungulæ aciem* dicimus, distantia.) Sin major fuerit minorve Inclinationis Angulus; major erit minorve illa Ungula; & quidem in ratione Tangentium Anguli Inclinationis. Nempe Solido Prismatico seu Columnari æquatur; cujus Basis, sit expositum Planum; Altitudo, æqualis altitudini rectæ Centro gravitatis inſiſtentis; (ut ad prop. 11. ostensum est;) Hoc est, (ſi angulus Inclinationis sit Semiquadrantalſ,) æqualis distantiæ Centri gravitatis ab illa rectâ quæ concipitur vel ut Axis motus, vel ut planorum, expositi & secantis, communis ſectio, seu Acies Ungulæ.

Denique; Eadem quæ diximus Momenta, exhibent etiam Magnitudinem Solidi, quod expositorum Planorum circa expositas rectas conversione describitur; (per 12 hujus.) Nempe, in ea ratione ad momenta ut jam designata, vel Ungulas Semiquadrantales, quam habet Peripheria (integra, vel dimidia, &c. prout conversio illa est integra vel dimidia, &c.) ad ſui Circuli Radium. Est enim distantia Centri gravitatis plani, ab expositâ rectâ, Radius iſtius Peripheriæ (ſive perfectæ, ſive imperfectæ) quæ conversionis Centri gravitatis circa illam rectam describitur.

Putâ, Sectoris $B C A$, respectu rectæ τa Momentum, vel Semiquadrantalſ Ungula, est (ut ſupra, § I.) $\frac{1}{2} a R^2 + \frac{1}{3} s R^2$; & respectu rectæ TA , $\frac{1}{2} a R^2 - \frac{1}{3} s R^2$. Ergo Solidum Annulare, illius integra conversione circa τa factum, est, $\frac{1}{2} a R P + \frac{1}{3} s R P$; & semiconversione, $\frac{1}{4} a R P + \frac{1}{6} s R P$; Et, circa TA , integrâ conversione, $\frac{1}{2} a R P - \frac{1}{3} s R P$; & semiconversione, $\frac{1}{4} a R P - \frac{1}{6} s R P$.

Item, Sectoris $B a A$, respectu rectæ τa , momentum, vel Semiquadrantalſ

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 233

drantalis Ungula, (ut § M.) est $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; Fig. 159, & respectu rectæ TA, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$. Ergo, 160.

Solidum illius integra conversione circa τa descriptum, est, $\frac{1}{2}aRP + \frac{1}{6}sRP - \frac{1}{6}svP = \frac{1}{2}fRP + \frac{1}{6}shP$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP + \frac{1}{12}sRP - \frac{1}{12}svP = \frac{1}{4}fRP + \frac{1}{12}shP$: Atque, circa TA, conversione integrâ, $\frac{1}{2}aRP + \frac{1}{6}sRP + \frac{1}{6}svP = \frac{1}{2}fRP - \frac{1}{6}shP$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP + \frac{1}{12}sRP + \frac{1}{12}svP = \frac{1}{4}fRP - \frac{1}{12}shP$.

Item, Semisegmenti BVA, respectu ipsius τa momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est (per § L.) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$ = $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$; Et, respectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$. Ergo Solidum illius integra conversione circa τa descriptum, est, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{2}sRP + \frac{1}{2}svP + \frac{s^3P}{3R} = \frac{1}{2}eRP +$

$\frac{1}{2}svP + \frac{s^3P}{3R}$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP + \frac{1}{4}svP + \frac{s^3P}{6R} = \frac{1}{4}eRP + \frac{1}{4}svP + \frac{s^3P}{6R}$: Ac, circa TA, conversione integrâ, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{2}sRP + \frac{1}{2}svP - \frac{s^3P}{3R} = \frac{1}{2}eRP + \frac{1}{2}svP - \frac{s^3P}{3R}$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP + \frac{1}{4}svP - \frac{s^3P}{6R} = \frac{1}{4}eRP + \frac{1}{4}svP - \frac{s^3P}{6R}$.

Item, ejusdem Semisegmenti BVA, respectu rectæ BV, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est (per § L.) $e - \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3$. Ergo Solidi illius circa BV, conversione integrâ, descriptum, est $-\frac{1}{2}eRP + \frac{1}{2}avP - \frac{s^3P}{6R}$; & conversione dimidiâ, $-\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{4}avP - \frac{s^3P}{12R}$.

Quodque hic de Semisolidis, (intellige, quæ conversione dimidiâ describuntur,) ostensum est; quæ sunt Integrorum dimidiâ: Similiter de aliis, quæ conversionibus aliis imperfectis, (puta Quadrantali, &c.) describuntur; servatâ proportionem, judicandum erit. Quod & in sequentibus pariter intelligendum erit.

Quodque, de Solidis, Planorum horum conversione circa rectas τa , TA, BV, ostensum est; similiter ad alia, mutatis mutandis, accommodabitur, quæ eorundem planorum, circa aliam quamvis in eodem plano rectam illis parallelam (quæ planum convertendum non fecer,) in quacunque ab illis distantia, infra suprà, positam, conversione describuntur.

Hh

Atque

P. Atque jam quidem, quod ad Sectores integros $BCBA$, $B\alpha BA$,
Fig. 159, & integrum Segmentum BBA , &c. quorum non modo Centri gravita-
160. tis altitudo, (puta quantum distat à $\tau\alpha$, TA , BV , vel CD , &c.)
sed ipsa Centra jam determinantur (ut quæ sint, in altitudine designatâ,
in ipso Axe, puta $A\alpha$ rectâ, per § hujus:) Illorum Momenta, Un-
gular, & Solida conversione facta, satis determinantur; non modo re-
spectu rectæ quæ sit ipsis $\tau\alpha$, TA , &c. parallela, sed respectu rectæ
cujusvis expostæ utcumque in illo plano sitæ (saltem quæ convertenda
Piana, seu; Ungular Basin, non fecer. Nam, propter datum ipsum
gravitatis Centrum, datur etiam ejusdem distantia à quavis sic expo-
sitâ rectâ: Unde reliqua consequuntur.

Quod etiam, de Sectore $B\alpha A$, Segmentis ABA , $\alpha B\alpha$, Trian-
gulis BVC , $B\alpha C$, &c. similiter intelligendum est: utpote quorum
ipsa Centra gravitatis non minus determinantur, quam ipsorum $BCBA$,
 BBC ; quippe in illorum axe posita.

Sed Semisectoris $B\alpha A$, & Semisegmenti BVA ; quorum Centra
Gravitatis nondum ipsa determinantur, sed ipsorum tantum à $\tau\alpha$, TA ,
vel quæ hisce parallele sunt rectis, Distantia: Momenta, Ungular,
& Solida conversione facta, nondum determinantur, nisi respectu ip-
sarum $\tau\alpha$, TA , rectarum, aut hisce parallelarum. Quum verò eo-
rum item Centrorum distantia ab $A\alpha$ determinata fuerit (quod jam
facturi sumus;) adeoque illorum Centra ipsa determinata; eadem
etiam ad rectas ipsi $A\alpha$ parallelas, aut etiam alias in eodem plano
rectas, similiter transferentur.

Ut igitur, de his etiam, eadem universaliter determinentur: eorum
ipsa Gravitatis Centra jam determinabimus, (per 26 Cap. præced.)
exhibita eorum etiam ab $A\alpha$ distantia, quæ ipsis $\tau\alpha$, TA , &c.
parallela non est.

Q. Nempe; Centri gravitatis Sectoris BCA , à rectâ $A\alpha$, distantia,
Fig. 161, est $\frac{c^2}{3a} = \frac{2vR}{3a}$. Quod sic ostenditur. Bisectis BA , BA , arcubus in
162. δ, δ ; erit (propter arcum $\delta\delta$, æqualem arcui $BA = a$;) Chorda
 $\delta\delta = BA = c$; ejusque semissis $\delta = \frac{1}{2}c$. Item Sectoris BCA ,
Centrum gravitatis G , in rectâ $C\delta$; ejusque à Centro distantia
 $CG = \frac{2}{3}cR$; (per hujus § A.) Atque (propter similia Triangula)
ut $C\delta = R$, ad $\delta = \frac{1}{2}c$; sic $CG = \frac{2}{3}cR$, ad $Ge = \frac{c^2}{3a}$, distantiam Cen-

trj.

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 235

tri gravitatis ab $A\alpha$, vel (propter $2vR=c^2$) $\frac{2vR}{3a}$. Et, speciatim, in Semicirculo $AD\alpha$, (propter $v=2R$, & $a=\frac{3}{2}P$), distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, est $\frac{8R^2}{3P}$. In Quadrante vero ADC , (propter $v=R$, & $a=\frac{3}{2}P$) distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, est similiter $\frac{8R^2}{3P}$.

Est igitur, (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}aR$, per § D.) Sectoris BCA , Fig. 159, respectu rectæ $A\alpha$, momentum vel Ungula Semiquadrantis, (ductâ 160, magnitudine in distantiam,) $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$. Adeoque Solidum integrâ conversione circa $A\alpha$ descriptum, $\frac{1}{6}c^2P=\frac{1}{3}vRP$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{12}c^2P=\frac{1}{6}vRP$. Et, speciatim, Momentum Semicirculi $AD\alpha$ respectu $A\alpha$, vel correspondens Ungula, $\frac{2}{3}R^3$: Et solidum conversione circa $A\alpha$ factum (nempe Sphæra integra) $\frac{2}{3}R^2P$; & Semisolidum, seu Hemisphærium, $\frac{1}{3}R^2P$.

Quæque Quadrantem spectant, sunt eorum Semisses.

Sin, ex hoc Sectoris BCA momento $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$, auferatur momentum (respectu ejusdem $A\alpha$) Trianguli ABC , hoc est (propter Basin $AC=R$; altitudinem $BV=s$, adeoque à base AC distantiam, $\frac{1}{3}s$), $\frac{1}{6}s^2R$: Habetur, segmenti ABA , momentum (respectu ejusdem $A\alpha$) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}c^2R-\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}v^2R$. Quod, per magnitudinem $\frac{1}{2}cR$ (per § G.) divisum; exhibet Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantiam $\frac{v^2}{3c}=\frac{2vR-s^2}{3a-3s}$. Solidumque ejusdem integra conversione circa $A\alpha$, $\frac{1}{3}vRP-\frac{1}{6}s^2P=\frac{1}{6}v^2P$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{6}vRP-\frac{1}{12}s^2P=\frac{1}{12}v^2P$.

Et similiter de segmento aBa , mutatis mutandis: Puta, substitutis a pro a , & b pro v .

Deinde, Trianguli BVC , distantia centri gravitatis ab $A\alpha$, (per 6 hujus) est $\frac{1}{3}BV=\frac{1}{3}s$. Adeoque (propter magnitudinem, ut prius $\frac{1}{2}sx$; hoc est, $\frac{1}{2}sR-\frac{1}{2}sv$, vel $\frac{1}{2}sv-\frac{1}{2}sR$, prout supra intrave Centrum fuerit;) ejusdem, respectu rectæ $A\alpha$, momentum, vel Semiquadrantis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2x$; hoc est $\frac{1}{6}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$, vel $\frac{1}{6}s^2v-\frac{1}{6}s^2R$, prout supra infrave fuerit. Adeoque Solidum integrâ conversione circa $A\alpha$ factum, est, $\frac{s^2xP}{6R}$; (hoc est, $\frac{R-v}{6R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{6R}s^2P$, prout supra infrave fuerit;) Et, semiconversione, $\frac{s^2xP}{12R}$; hoc est (prout supra infrave fuerit) $\frac{R-v}{12R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{12R}s^2P$.

H h 2

Illudque

Fig. 159,
160.

Illudque Trianguli BVC momentum vel semiquadrantis Ungula, momento vel Ungula semiquadranti Sectoris BCA (respectu ejusdem Az rectæ,) sublatum si supra Centrum fuerit, vel additum si infra; exhibet momentum (respectu ejusdem Az) vel semiquadrantalem Ungulam correspondentem, Semisegmenti BVA. Hoc est, si momento Sectoris BCA, $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$ (per § Q.) auferatur $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$, vel addatur $-\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; habetur Semisegmenti BVA momentum (vel Semiquadrantis Ungula) respectu ipsius Az , $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque Solidum illius integrâ conversione circa Az descriptum, $\frac{1}{3}vRP - \frac{1}{6}s^2P + \frac{s^2vP}{6R}$; & Semiconversione, $\frac{1}{6}vRP - \frac{1}{12}s^2P + \frac{s^2vP}{12R}$.

Centrique gravitatis, ejusdem BVA Semisegmenti distantia ab Az , (diviso Momento per magnitudinem § F inventam) erit $\frac{\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v}{\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}s^2v} = \frac{2vR^2 - s^2R + s^2v}{3eR + 3sv}$.

Aut etiam, propter $2vR - s^2 = c^2 - s^2 = v^2$; Momentum erit $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$; Solidum conversione integrâ factum $\frac{1}{6}v^2P + \frac{s^2vP}{6R}$; &

conversione dimidiâ, $\frac{1}{12}v^2P + \frac{s^2vP}{12R}$; & distantia centri gravitatis ipsius Semisegmenti BVA, ab Az , $\frac{v^2R + s^2v}{3eR + 3sv} = \frac{vR + s^2}{3eR + 3sv}$.

Si autem, ex hoc Semisegmenti BVA momento $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$, auferamus momentum Trianguli BAV (respectu ejusdem Az) $\frac{1}{6}s^2v$ (est enim Basis AV = v , altitudo BV = s , Centrique gravitatis a base distantia $\frac{1}{3}s$; adeoque momentum $\frac{1}{6}s^2v$;) relinquitur Segmenti ABA (respectu ejusdem Az) momentum, $\frac{1}{6}v^2R$. Ut prius.

Similiter; Distantia Centri gravitatis Trianguli BC α , à recta Az , est (per 6 hujus) $\frac{1}{3}BV = \frac{1}{3}s$; ejusque magnitudo $\frac{1}{2}sR$. Ergo illius (respectu rectæ Az) momentum, vel Semiquadrantis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2R$. Adeoque Solidum integrâ conversione circa Az factum, $\frac{1}{6}s^2P$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{12}s^2P$.

Triangulique BC α momentum illud $\frac{1}{6}s^2R$, additum Sectoris BCA momento (§ Q reperto) $\frac{1}{3}vR^2 = \frac{1}{6}c^2R$; exhibet Sectoris B α A (respectu ejusdem Az) momentum, vel Semiquadrantalem Ungulam, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R + \frac{1}{6}s^2R$: Solidumque integrâ conversione circa Az factum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P = \frac{1}{6}c^2P + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum, $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P = \frac{1}{12}c^2P + \frac{1}{12}s^2P$.

Aut

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 237

Aut etiam; Propter Trianguli BV α magnitudinem $\frac{1}{2}sh = sR - \frac{1}{2}sv$; Fig. 159,
& Centri gravitatis ab A α distantiam $\frac{1}{3}s$; erit ejusdem, respectu A α , 160.
momentum $\frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$: Et solidum ejusdem circa A α inte-
grâ conversione factum, $\frac{s^2bP}{6R} = \frac{1}{3}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}$; & Semisolidum, $\frac{s^2bP}{12R}$

$$= \frac{1}{6}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}.$$

Triangulique BV α momentum illud $\frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$; semisegmenti
BVA momento $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$ (§ R. reperto) additum; ex-
hibet Sectoris B α A (respectu ejusdem A α) momentum, seu semi-
quadrantalem Ungulam $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$. Ut prius. Adeoque (ut pri-
us) Solidum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P$.

Eritque (Momento per magnitudinem $\frac{1}{2}AR + \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}fR$, § H
inventam, diviso,) Sectoris B α A distantia Centri gravitatis ab A α ,
 $\frac{\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R}{\frac{1}{2}AR + \frac{1}{2}R} = \frac{2vR + s^2}{3f} = \frac{c^2 + s^2}{3f}$.

Determinavimus igitur (inter alia) tum Sectoris BCA, tum B α A,
tum Semisegmenti BVA, Centra gravitatis, (per eorum tum à $\tau\alpha$, seu
TA, seu BV, seu DC, tum ab A α , distantias,) quæque hinc dependen-
t.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, de aliis circuli porti-
onibus judicandum erit.

Possunt autem hæc eadem, quæ rectam A α spectant, (§ Q, R, S, T,
tradita,) hac adhuc aliâ methodo explorari.

Sunt utique (per Nostræ *Arithmetica Infinitorum*, prop. 111, 121,
123, &c.) Quadrata ordinatim-applicatarum in Quadrante, (vel
Subtensarum in Semicirculo,) Series Equalium mulâtata serie Secun-
danorum. Puta, ut $R^2 = 0$, $R^2 = 1$, $R^2 = 4$, $R^2 = 9$, &c. usque ad
 $R^2 = R^2$. Hoc est, ut Plana Cylindri Conice excavati, (per prop.
113. ejusdem,) Vel, (per ejusdem prop. 112.) ut Rectæ in Semi-
parabolâ diametro parallelæ.

Si enim Quadranti ADC, circumferibatur AODC quadratum, quod Fig. 163.
Diagonali CO dividatur; ducanturque ordinatim-applicatæ VB,
occurentes ipsi DO in M, ipsique CO in N: Manifestum est, Qua-
dratum ordinatim-applicatæ BV, æquari quadrato CB minus quadrato
CV (per 47 el. 1. Euclidis:) Hoc est, Quadrato VM minus quadra-
to VN: sunt enim VM = CB, & VN = CV: & sic ubique.

Adeoque, Omnia quadrata BV complementum ADC quadrantem;
æquantur omnibus quadratis VM complementum AODC quadratum,
minus

Fig. 163. minus omnibus quadratis NV. complementum ACO Triangulum.
Et singula singulis respective sumptis.

Adeoque si ex Parallelepipedo ODCA (quod compleant omnia MVq;) eximi intelligatur Pyramis OCA (quam compleant omnia NVq;) quod reliquum est, æquabitur omnibus BVq.

Aur etiam (propter Circulos Quadratis Radiorum proportionales) Cylindrus ODDO, exempto Cono OCO, æquabitur Hæmisphærio, DAD.

Sed & (propter singula BVq, singulis MVq—NVq, æqualia,) etiam partes partibus respective sumptis æquantur.

Nempe; Parallelepipedum OMVA dempto pyramidis trunco ONVA (si V sit supra Centrum) vel dempta pyramide auctâ OCNVA (si infra Centrum;) hoc est, dempto OCA+NCV: Æquatur quadratis ordinatim-applicatarum in ABV, segmento. Et sic ubique.

Et similiter: Cylindrus OMMO, dempto ONNO vel OCNNO (hoc est, dempto Cono OCO, mulâtato vel aucto simili cono NCN, prout supra infra Centrum fuerit punctum V) æquatur Segmento Sphærico ABB. Et sic ubique.

His positis; erit (propter MVq=R², & AV=v,) Parallelepipedum OMVA=vR².

Item; (propter OAq=ACq=R², & AC=R,) est Pyramis OCA= $\frac{1}{3}$ R³.

Item; (propter NVq=VCq=x², & VC=x;) Pyramis NCV= $\frac{1}{3}$ x³.

Est ergo, Summa Quadratorum omnium Ordinatim-applicatarum, (puta omnia o²) complementum ipsum ABV semisegmentum; OMVA—OCA+NCV=vR²— $\frac{1}{3}$ R³+ $\frac{1}{3}$ x³.

Est autem, supra Centrum, x=R—v; infra Centrum, x=—R+v. Adeoque illic x³=R³—3vR²+3v²R—v³; hic verò x³=—R³+3vR²—3v²R+v³. Ergo (cum illo casu habeatur + $\frac{1}{3}$ x³; hoc verò — $\frac{1}{3}$ x³;) erit vR²— $\frac{1}{3}$ R³+ $\frac{1}{3}$ x³=v²R— $\frac{1}{3}$ v³ (utroque casu) summa omnium o²; seu Quadratorum ordinatim-applicatarum complementum ABV semisegmentum.

Vel etiam (propter v²=c²—s²=2vR—s²; adeoque v²R=2vR²—s²R; & $\frac{1}{3}$ v³= $\frac{2}{3}$ v²R— $\frac{1}{3}$ s²v= $\frac{2}{3}$ vR²— $\frac{2}{3}$ s²R— $\frac{1}{3}$ s²v;) erit eadem Omnium o² summa v²R— $\frac{1}{3}$ v³= $\frac{2}{3}$ vR²— $\frac{1}{3}$ s²R+ $\frac{1}{3}$ s²v.

Sed & manifestum porro est, cuiusque rectæ ut BV, (atque de huic parallelis, Semisegmentum BVA complementibus simile erit iudicium,) momentum respectu rectæ Aa, æquari semiquadrato ejusdem, (propter Rectæ Centrum gravitatis in ipsius medio; adeoque VBx $\frac{1}{2}$ VB= $\frac{1}{2}$ VBq.)
Et

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 239

Et similiter quæ semiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aa) Fig. 153. complent plana, ipsi BV insistentia, æquari ejusdem BV semiquadrato; (nam, propter angulum in V semirectum; altitudo in B , æqualis erit ipsi BV basi; ipsumque Triangulum Rectangulum Isosceles, erit Quadrati dimidium.) Et consequenter, tum Semisegmenti BVA momentum respectu ipsius Aa ; tum semiquadrantis Ungula eidem BVA insistens, aciem habens Aa ; æquabitur eorundem $\frac{1}{2}$ semisumma; Hoc est, $\frac{1}{2}v^2R - \frac{1}{6}v^3 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}v^3 = \frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}v^3$. Idem quod supra (§ R.) repertum erat.

Huic verò Semisegmenti BVA momento (respectu rectæ Aa) sic invento; Si addantur Triangulorum BVC , BVa , (respectu ejusdem Aa) Momenta, (§ R, S, reperta:) Prodebunt Momenta (respectu ejusdem Aa) Sectorum BCA , BaA : Cateraque de Solidis conversione circa Aa factis, Centrisque gravitatis planorum ab Aa distantis, similiter elicientur atque prius. Ut non sit opus eisdem ulterius iminorari.

At interim haud erit incommodum hic loci monuisse; eadem etiam methodo Triangulorum BCV , BaV , BCa , momenta respectu ipsius Aa , haberi posse.

Cum enim singularum BV rectarum (seu huic parallelarum) Triangulum BCV complentium, momenta respectu Aa , seu Triangula eisdem insistentia, semiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aa) complentia; sint earundem BV , &c. Semiquadrata: Quæ quidem Semiquadrata, Pyramidem complent, cujus Basis est $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}v^2$, altitudo, $CV = x$; Erit ipsa Pyramis (per 6 hujus;) Hoc est, momentum illud, seu semiquadrantis ungula BVC aciem habens Aa , $\frac{1}{2}v^2 \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}v^2x$, ut prius § R.

Item, (pari de causa,) Momentum Trianguli BaV , seu huic insistentis Semiquadrantis Ungula aciem habens Aa ; Pyramis erit, cujus Basis, $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}v^2$, altitudo $Va = h$; adeoque ipsa Pyramis (hoc est, Momentum illud, seu semiquadrantis Ungula,) $\frac{1}{2}v^2 \times \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}v^2h$. Ut prius § S.

Estque Triangulum BCa ; idem atque BVa dempto additove (prout supra infræ Centrum C , sit V punctum,) BCV : Adeoque (respectu ipsius Aa) momentum Trianguli BCa ; idem atque momentum BVa , dempto, additove, momento BCV : Adeoque Trianguli BCa momentum (respectu ipsius Aa) seu Semiquadrantis Ungula eidem insistentis aciem habens Aa ; est $\frac{1}{6}v^2h + \frac{1}{6}v^2x$. Hoc est, (propter $h = 2R - v$; &c, supra Centrum, $x = R - v$, auferendum; infra vero, $x = -R - v$ addendum; adeoque $h + x = R$;) $\frac{1}{6}v^2R$. Ut prius, § S.

Eadem

V. Eadem item ostenduntur ex prop. 112. Arithm. Infin.

Fig. 154. Cum enim illic ostendatur, Rectas in Semiparabola, Diametro vel Axi parallelas, esse ut Seriem Æqualium serie Secundanorum Multatam; (sunt enim Omnes $V\delta$, parallelogrammum $AC\Delta\delta$ complentes, series Æqualium; omnesque $\beta\delta$, complentes Semiparabolæ complementum $\Delta\Delta\delta$, series Secundanorum; Ergo, omnes residuæ $V\beta$, parabolæ diametro $C\Delta$ parallelæ, sunt series Æqualium multata serie Secundanorum:) Hoc est, Ut quadrata ordinatim-applicatarum in Circuli quadrante; ut modo ostensum est.

Si igitur, super eadem Az rectâ, (ut communi Base,) describatur tum $AD\alpha$ Semicirculus, tum $A\Delta\alpha$ Parabola recta (cujus Axis $C\Delta$ æqualis sit ipsi CD circuli Radio:) Et ordinatim-applicata in Semicirculo qualibet BV producta, occurrat Parabolæ in β : Erunt omnes $V\beta$ Rectæ, omnibus Quadratis VB respective sumptis proportionales.

Adeoque ductis omnibus $V\beta$ rectis, (sive totam Parabolam, sive ipsius segmentum ut $AV\beta$ complentibus,) in communem altitudinem $R = C\Delta = CD$: Erunt omnia $V\beta$ in R parallelogramma (Prisma Parabolæ, ejusve portioni, insistentis complementia,) æqualia omnibus VB quadratis (& singula singulis respective sumptis;) Hoc est (per ante demonstrata) Duplo momenti Semicirculi, ejusve cui insistent portioni, respectu rectæ $A\alpha$; seu, Duplo semiquadrantalæ Ungulæ correspondentis, aciem habentis $A\alpha$. (Sunt enim hæc Parallelogramma, propter communem altitudinem R , ipsis quibus insistent Rectis $V\beta$, proportionalia; adeoque, per jam ostensa, proportionalia ipsis VB quadratis: Sed &, propter $CD = C\Delta = R$, Parallelogrammum, $C\Delta$ in R , æquatur ipsi CD quadrato: Ergo & reliqua reliquis respective.) Eademque, $V\beta$ in $\frac{1}{2}R$, (utpote illorum dimidia,) ipsi momento plani ABV respectu ipsius $A\alpha$; vel Semiquadrantalæ Ungulæ correspondenti æquantur.

Si igitur, Parallelogrammo $AV\delta\delta$, auferatur $A\beta\delta\delta$ vel $A\Delta\beta\delta\delta$ (hoc est, Semiparabolæ Complementum $\Delta\Delta\delta$, dempto additove $\Delta\beta\delta$, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) habetur Parabolæ segmentum $AV\beta = AV\delta - A\Delta\delta + \beta\delta\delta$.

Est autem (propter $AV = v$, & $V\delta = R$,) Parallelogrammum $AV\delta\delta = vR$.

Item; (propter Semiparabolæ Complementum, subtripulum circumscripti Parallelogrammi, & 22. Arithm. Infin. vel prop. 1. hujus; rectamque $AC = C$ complementum $\Delta\Delta\delta = \frac{1}{3}R^2$;

PROP. XV. De Calculo Centri Gravitatis. 241

Item; (propter $AC=CA$;) Parabolæ Latus rectum erit æquale Fig. 164.
 ipsi $CA=R$: Et (propter $sb=VC=x$) erit $\beta\delta=b\delta=\frac{x^2}{R}$: Adeo-
 que Semiparabolæ complementum $\beta\Delta\delta$ (utpote circumscripti Paralle-
 logrammi $\beta b\Delta\delta$ triens) $=\frac{x^3}{3R}$.

Ergo; Parabolæ Segmentum $AV\beta=AV\delta-A\Delta\delta+\beta\Delta\delta=vR$
 $-\frac{1}{3}R^2+\frac{x^3}{3R}$. Atque hoc demum in $\frac{1}{2}R$ ductum; exhibet $\frac{1}{2}vR^2$
 $-\frac{1}{6}R^3+\frac{1}{6}x^3$ Semisegmenti Circularis ABV momentum respectu rectæ
 $A\alpha$; vel Semiquadrantalem Ungulam correspondentem: Eiusque
 duplum, $vR^2-\frac{1}{3}R^3+\frac{1}{3}x^3=v^2R-\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{3}v^2R+\frac{1}{3}v^2v$; ut
 prius, § T.

Atque hinc similiter eliciuntur, tum Sectorum BCA, BaA, mo-
 menta seu semiquadrantales Ungulæ respectu rectæ $A\alpha$, tum Centro-
 rum gravitatis inde distantia; cæteraque ut prius.

Eadèque adhuc aliàs sic investigantur.

Si intelligatur Sphæra, vel Sector Sphæricus, (puta BCB ex conversione Fig. 159,
 Sectoris circularis BCA circa $A\alpha$ factus,) ex numero-infinitis Pyrami- 160.
 dulis (juxta def. 1. Cap. 4.) conflare: Quorum omnium communis
 vertex sit C Centrum; & communis altitudo Circuli Sphæræve Ra-
 dius; Basesque compleant ipsam superficiem Sphæricam, vel Sectoris
 Sphærici Superficiem curvam, (puta BAB quæ arcus BA circa $A\alpha$ con-
 versione describitur:) Erit (propter, Pyramides Prismatum super
 eisdem basibus æque altorum Trientes, per prop. 6 hujus;) Sector
 Sphæricus BCBA, æqualis superficiei Sphæricæ segmento BAB in Tri-
 entem Radii ducto.

Habetur autem Superficiæ Sphæricæ segmentum illud BAB, si du-
 catur Arcus $AB=a$, in Peripheriam ejusdem arcus Centro gravitatis
 descriptam, per 12 hujus. Est autem ejusdem AB arcus Centrum
 gravitatis, puta G (in fig. 161, 162.) in rectâ $C\delta$ arcus axe; recta- Fig. 161,
 que $CG=\frac{c}{a}R$, (per 14 hujus.) Rectaque $\delta\epsilon=\frac{1}{2}c$, (ut § Q. 162.
 ostensum est:) Atque (propter similia Triangula) Ut $C\delta=R$, ad
 $\delta\epsilon=\frac{1}{2}c$, sic $CG=\frac{c}{a}R$, ad $\frac{c^2}{2a}=Ge$ distantiam Centri gravita-
 tis Arcus AB, ab $A\alpha$; Adeoque $\frac{c^2P}{2aR}$ est Peripheria ejusdem integræ
 conversione circa $A\alpha$ descripta. In quam itaque si ducatur $AB=a$, ha-
 betur

betur Sphæricæ Superficiæ segmentum $BAB = \frac{c^2 P}{2R}$: vel (propter $c^2 = 2vR$;) Superficiæ Sphæricæ segmentum $BAB = vP$.
 Fig. 159, 160. Veletiam (per 13 hujus;) Propter integram sphærae superficiem quatuor Circulis maximis æqualem; hoc est, $2RP$: atque abscissum segmentum AB , in ea ratione ad totam, qua est ipsius altitudo $AV = v$, ad $Aa = 2R$: Erit ut $Aa = 2R$, ad $AV = v$, sic tota superficies Sphærica $2RP$, ad ipsius segmentum $BAB = vP$, ut prius.

Quod itaque superficiæ Sphæricæ segmentum, in $\frac{1}{3}R$ ductum, exhibet Sectorem Sphæricum $BCBA = \frac{1}{3}vRP$: Adeoque Semiquadrantalem Ungulam, seu Plani BCA momentum respectu Aa , $\frac{1}{3}vR^2$. Idem quod supra, § Q. repertum est. Cæteraque hinc, ut ibidem, deducuntur.

X. Exhibuimus itaque Semicirculi Partiūque ipsius expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; eorumque distantiam Centri gravitatis a rectis illis. Adeoque per prop. 26. Cap. præced. (propter datas eorum à duabus in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantias,) ipsa gravitatis Centra.

Eademque methodo, de aliis Circuli portionibus, eorumque Momentis, & Solidis conversione factis fiet iudicium. Puta, si pro sectore BaA , (ad verticem terminato) exponeretur sector DaB , aliūve huiusmodi: Cum enim tum Sectoris BaA , tum DaA , magnitudines & momenta (reliquaque quæ hinc dependent) jam exhibeantur; etiam sectoris DaB (qui illorum vel differentia vel summa sit) magnitudines & momenta (adeoque & quæ hinc dependent) facile exhiberi poterunt.

Item; eadem methodo quæ momenta, verbi gratia, semisegmenti BVA , a recta τa , ad rectas TA , vel BV , transferuntur; possunt similiter à recta Aa , ad $T\tau$, vel Ba , transferri. Eaque, quæ hic traduntur, mille modis aliis ampliari.

Y. Quæ autem de circulo ejusque portionibus dicta sunt: eadem ad ellipsin, huiusque portiones, facile transferentur. Nempe, si intelligatur axium ellipsos alter Aa , alter $D\Delta$: Manente, ut prius, $Aa = 2R$; (adeoque $AV = v$, $Va = h$;) erit $D\Delta$ in ea ratione ad $2R$, quæ est ad Aa ; adeoque BV in eadem ratione ad s . Adeoque ubicunque BV , aut huic parallelæ in calculum veniunt; pro s , substituenda erit quantitas quæ sit, ad s , in ea ratione qua est $D\Delta$ ad Aa : (majore quidem,
 si

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 243

si $D \Delta$ sit axium major; minore, si minor;) Adeoque, pro s^2 ; quantitatem quæ sit ad hanc in duplicatâ ratione rectæ $D \Delta$ ad $A a$: &c similiter, mutatis mutandis, in reliquis ejusdem potestatis.

PROP. XVI.

Sectoris Sphærici Centrum gravitatis, est in Axis sui illo puncto, quod à Centro Circuli distat Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus altitudinis superficiæ Curvæ: Seu Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus sinus versi: Seu, quod à Centro Circuli distat, Tribus Octantibus altitudinis residuæ superficiæ curvæ; seu Tribus Octantibus Sinus versi residui. A: Fig. 165.

Hoc est, in Hemisphærio; $\frac{1}{8}$ Radii.

Atque hinc Segmenti Sphæræ (plano abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Et in aliis portionibus similiter. B.
Et quæ hinc dependent.

Nempe; Si ponantur Symbola ut in propositione præcedente; erit, Semiquadrantalæ Ungulæ totius semicirculi, aciem habentis $A \alpha$, (unde de Solidis conversione factis, & Semisolidis fiet judicium,) Magnitudo $\frac{2}{3} R^3$; Distantia Centri gravitatis, sive à $\tau \alpha$, sive à $T A$, R ; Momentum respectu $\tau \alpha$, vel $T A$, $\frac{2}{3} R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{1}{3} P$; Momentum respectu $A \alpha$, $\frac{1}{6} R^3 P$. Fig. 159, 160. C.

Aciemque habentis $\tau \alpha$, Magnitudo $\frac{1}{4} R^2 P$; Momentum respectu $A \alpha$, $\frac{2}{3} R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{8 R^2}{3 P}$; Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{6} R^3 P$; respectu $T A$, $\frac{1}{6} R^3 P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau \alpha$, $\frac{1}{2} R$; à $T A$, $\frac{1}{4} R$. I. T.

II 2

Aciem-

I. Aciemque habentis TA, Magnitudo $\frac{1}{2}A^2P$; Momentum
 159, respectu Ax, $\frac{1}{3}A^3$; Distantia Centri gravitatis ab Ax,
 100, $\frac{8R}{3P}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}A^2P$; respectu TA,
 T. $\frac{1}{6}R^3P$; Distantia centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R$; à TA,
 $\frac{1}{4}R$.

C. Semiquadrantis Ungulæ, Sectoris BCA, aciem habentis Ax, (unde de Solidis conversione factis, & semisolidis, fiet iudicium;) Magnitudo, $\frac{1}{2}vR^2$; Distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{1}{2}b$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{1}{8}b$; à TA, $R - \frac{1}{8}b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis ab Ax, $\frac{3}{8}R + \frac{1}{8}b$; Momentum respectu Ax, $\frac{1}{8}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$.

I. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}vR^3$; Momentum respectu Ax, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis ab Ax, $\frac{8vR + 3v^2}{12a + 8v}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2 + \frac{1}{24}vR^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15aR + 19vR - 3sv}{12a + 8v}$; à TA, $\frac{9aR - 3vR + 3sv}{12a + 8v}$.

II. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}vR^3$; Momentum respectu Ax, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis ab Ax, $\frac{8vR - 3v^2}{12a - 8v}$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{24}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{24}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9aR - 3vR + 3sv}{12a - 8v}$; à TA, $\frac{15aR - 13vR - 3sv}{12a - 8v}$.

D. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Trianguli BVC, aciem

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 245

aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}s^2x$; Distantia Cen- Fig. 159,
tri gravitatis à DC, $\frac{1}{4}v$; à $\tau\alpha$, $R\frac{1}{4}x$; à TA, $R\frac{1}{4}x$; ico.
momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}s^2xR + \frac{1}{8}s^2x^2$; respectu TA,
 $\frac{1}{8}s^2xR + \frac{1}{8}s^2x^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; Q.
momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}s^3x$.

Acicmque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}sxR - \frac{1}{2}sxv$; Momen- M.
tum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}sxR - \frac{1}{2}sxv$; Distantia Centri gra-
vitatatis ab $A\alpha$, $\frac{7R-3v}{20R-8v}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2$ X.
 $-\frac{1}{2}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; Distantia
Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; à TA, $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$.

Acicmque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}sxR + \frac{1}{2}sxv$; Mo- M.
mentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}sxR + \frac{1}{2}sxv$; Distantia Cen-
tri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{R+3v}{4R+8v}$. Momentum respectu $\tau\alpha$, X.
 $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2 + \frac{1}{4}sx^3$; Di-
stantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; à TA,
 $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$.

Ungulæ Semisegmenti BVA aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, E.
 $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}v^2v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}v^2R^2$
 $+\frac{1}{6}v^2vR + \frac{1}{6}v^4$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{6}v^2vR$
 $-\frac{1}{6}v^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{6R-3v}{4vR+4v^2}$
à TA, $R - \frac{6R-3v}{4vR+4v^2}$; à DC, $\frac{6R-3v}{4vR+4v^2} = \frac{3v^2k=3h^2v}{4vR+4v^2}$
à BV, $\frac{3h^2}{4R+4v} - R + v$; Momentum respectu BV,
 $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{24}v^4$. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}vR^3$ Q.
 $+\frac{1}{6}v^2vR^2 + \frac{1}{24}v^3x$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
 $\frac{3vR^3 + 3v^2vR^2 + v^3x}{4v^2R + 4v^3}$. Acicmque

246. De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

K. Fig. 159, 160. Aciemque habentis $\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; Mo-
mentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; Distantia

T. Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R + 3s^2h}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}v$. Mo-
mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; re-
spectu TA , $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; respectu BV ,
 $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gra-
vitatís à $\tau\alpha$, $\frac{\frac{1}{4}R + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}}{\frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}}$; à TA , $\frac{\frac{1}{4}R - \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}}{\frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}}$; à BV , $\frac{\frac{1}{4}R - h + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}}{\frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}}$
 $= -\frac{1}{4}R + v + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$

K. Aciemque habentis TA ; Magnitudo $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$; Mo-
mentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; Distan-

T. tia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - 8s^2h}{12eR^2 + 12svR - 8s^3}v$; Mo-
mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; respectu
 TA , $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; respectu BV , $-\frac{1}{6}eR^3$
 $+\frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravi-
tatís à $\tau\alpha$, $\frac{\frac{1}{4}R + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}}{\frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}}$; à TA , $\frac{\frac{1}{4}R - \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}}{\frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}}$; à BV , $\frac{\frac{1}{4}R - h + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}}{\frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}}$
 $= -\frac{1}{4}R + v + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$

K. Aciemque habentis BV ; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3$; Mo-
mentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4 - \frac{1}{6}v^2R^2$,
 $-\frac{1}{24}v^2h^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
 $\frac{4vR^2 - s^2h}{12eR^2 + 12avR - 4s^3}v$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{6}eR^3$

V. $-\frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; respectu TA , $-\frac{1}{6}eR^3$
 $+\frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; respectu BV , $\frac{1}{6}eR^3$
 $+\frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gra-
vitatís

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 247

vitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3+12avR^2+3svR^2-6s^3R+2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à Fig. 159;
160.

TA, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à BV,
 $\frac{15eR^3+15svR^2-12as^2R+2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$.

Ungulæ Trianguli BAV, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2v$; Centri gravitatis Distantia à $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{4}v$; à TA, $\frac{3}{4}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3v$. G. S.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; Centri gravitatis distantia ab $A\alpha$, $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2+10s^2R-3s^2v}{4vR+4s}$; à TA, $\frac{4R^2-2s^2R+3s^2v}{4vR+4s^2}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$. N. Y.

Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{3}sv^2$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{1}{8}s$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{4}v$; à TA, $\frac{1}{4}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R-\frac{1}{4}sv^3$; respectu TA, $\frac{1}{4}sv^3$. N. Y.

Ungulæ Segmenti ABA, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{2}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{1}{2}h$; à TA, $R-\frac{1}{2}h$; à DC, $\frac{1}{2}h$. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2-4v^2}$. G. S.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; Centri gravitatis ab

- Y. ab A α distantia $\frac{4R^2 - 2hR + s^2}{6eR + 3sv}v$: Momentum respectu
 Fig. 159, $\tau\alpha$, $\frac{5eR^3 + 2\frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R}{12eR - 4sv}$; respectu TA, $\frac{5eR^3 + 2\frac{1}{2}svR^2}{12eR - 4sv}$
 160. $-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
 $\frac{15eR^2 + 7svR + 2s^3}{12eR - 4sv}$; à TA, $\frac{9eR^2 + 5svR - 2s^3}{12eR + 4sv}$.
- N. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$; Mo-
 mentum respectu A α , $\frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; Centri gravita-
 tis ab A α distantia $\frac{4R^2 - 2hR - s^2}{6eR - 2sv}v$. Momentum respectu
- Y. $\tau\alpha$, $\frac{5eR^3 + 2\frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R}{12eR - 4sv}$; Respectu TA, $\frac{5eR^3 - \frac{1}{6}svR^2}{12eR - 4sv}$
 $+\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2 + 5svR - 2s^3}{12eR - 4sv}$;
 à TA, $\frac{15eR^2 - 9svR + 2s^3}{12eR - 4sv}$.
- F. Ungula Trianguli BC α , aciem habentis A α ; magnitudo,
 $\frac{1}{6}s^2R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{1}{2}v$; à TA,
 $\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; re-
 R. spectu TA, $\frac{1}{24}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis
 ab A α , $\frac{1}{2}s$; momentum respectu A α , $\frac{1}{12}s^3R$.
- M. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; Momen-
 tum respectu A α , $\frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; Centrique gravitatis
 X. ab A α distantia, $\frac{5R - 2v}{12R - 4v}s$; Distantia Centri gravita-
 tis à $\tau\alpha$, $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$; à TA, $\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R - 2v}$; momen-
 tum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA,
 $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.
- M. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; Mo-
 mentum respectu A α , $\frac{1}{24}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri
 X. gravitatis ab A α , $\frac{3R + 2v}{12R + 4v}s$; Momentum respectu $\tau\alpha$,
 $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{1}{12}sR^3 + \frac{1}{4}svR^2$
 $-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
 $\frac{5R^2}{5R^2}$

$$\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R + 2v}; \text{ à TA, } \frac{7R^2 + 5vR - s^2}{6R + 2v}.$$

Fig. 159,
160.

Ungulæ Trianguli BV α , aciem habentis A α ; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2b$; Centri gravitatis distantia à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}b$; à TA, $\frac{2R - \frac{1}{4}b}{3}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}s^2b^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{1}{2}s$; Momentum respectu A α , $\frac{1}{12}s^3b$. R.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{3}s^2b^2$; Momentum respectu A α , $\frac{1}{6}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{1}{3}s$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}b$; à TA, $\frac{2R - \frac{1}{4}b}{3}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}s^2b^2$; respectu TA, $\frac{2}{3}s^2b^2R - \frac{1}{4}s^2b^2$. W.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $sbR - \frac{1}{3}s^2b^2$; Momentum respectu A α , $\frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{8R - 3b}{24R - 8b}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{4}s^2v = \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2b^2 = \frac{1}{3}s^2b^2 + \frac{1}{3}s^2b$; respectu TA, $\frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{4}s^2v$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à TA, $R + \frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2}$; à DC, $\frac{3s^2v}{8R^2 - 4vR + 4s^2} = \frac{3v^2}{12R - 4b} = \frac{3v^2}{4R + 4v}$. W.

Ungulæ Sectoris B α A, aciem habentis A α ; Magnitudo $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{6}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; à TA, $R - \frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; à DC, $\frac{s^2b}{4vR + 2s^2}$; Momentum respectu A α , $\frac{8vR^3 + \frac{1}{3}s^2vR^2 + \frac{1}{12}s^2R^2}{8vR + 4s^2}$; Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{3vR^2 + 3svR + 2s^3}{8vR + 4s^2}$. R.

Kk

Aciem-

L. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2$
 Fig. 159, $+ \frac{1}{6}fR^2 - \frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2$
 160. $- \frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,

W. $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6fR + 2sh}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}aR^3$
 $+ \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3 + \frac{1}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; re-
 spectu TA , $\frac{1}{8}vR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3$
 $- \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
 $\frac{15fR^2 + 9shR - 2s^3}{12fR + 4sh}$; à TA , $\frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR + 4sh}$.

L. Aciemque habentis TA ; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2$
 $+ \frac{1}{6}fR^2 + \frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2vR$;

W. Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + sv}{6fR - 2sh}$; Momen-
 tum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$
 $= \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA , $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3$
 $+ \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Distantia
 Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR - 4sh}$; à TA ,
 $\frac{15fR^2 - 7shR - 2s^3}{12fR - 4sh}$.

Z. Adeoque exhibuimus, Sphæricorum Sectorum & Segmen-
 torum, Ungularum item aliorumque Solidorum exposi-
 torum tum magnitudines, tum momenta respectu expo-
 sitorum aliquot planorum, eorūque Centrorum gra-
 vitatis à planis illis distantiam, ipsaque gravitatis Cen-
 tra.

Quæ omnia, ad alia etiam Solida, ad Sphæram ejusve
 partes spectantia, facile poterunt accommodari: Aut
 etiam ad alia Solida ex Circulorum portionibus ori-
 unda.

Quæque, de Ungulis Semicirculi ejusve portionum;
 Sphæraque & portionibus hujus, dicta sunt; eadem ad
 Ungulas Semiellipseos hujusve portionum; & Sphæ-
 roides,

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 251

roides, portionésque hujus; facile accommodantur.

Intelligatur BCB Sector Sphæricus; (intellige Figuram Solidam A. in Sphæra, quæ conversione Sectoris Circularis BCA, seu BCa, Fig. 165. Circa ACa, describitur:) Ex infinitis numero Pyramidulis similibus & æqualibus (juxta def. 1. Cap. 4.) componi: Quarum communis vertex sit Sphærae Centrum C; Basesque component Sphæricæ superficiei segmentum Sectori sphærico conveniens. Erit itaque, Tum simul omnium Magnitudo, æqualis Trienti Radii (communis Altitudinis omnium) in Sphæricam superficiem BAB, vel BaB, sectori convenientem, (utpote Basium Aggregatum,) ducto: (Quod ex 1 vel 6 hujus probabitur; propter Parallela Pyramidum Plana similia, aut etiam parallelas sectorum sphæricorum curvas superficies similes, in ratione Secundanorum:) Tum Centra gravitatis omnium, in Simili Superficie Sphæricâ, descriptâ Radio $Cb = \frac{1}{4}CB = \frac{1}{4}R$: (propter Centra gravitatis Pyramidum, in Axe suo posita, tres quadrantes ejusdem ad verticem abscondentia; per 6 hujus.) Cujus quidem superficiei b a b, radio Cb descriptæ, cum singula puncta intelligantur æque onusta, (ut quæ æqualium Pyramidum Centra gravitatis sustineant;) idem erit hujus Centrum gravitatis, atque expositi Sectoris Sphærici. Puta (in sectore BCBA) in G, medio puncto rectæ a v (sinus versæ arcûs b a) per 13 hujus. Est autem, (propter $Cb = \frac{1}{4}CB = \frac{1}{4}R$:) recta $av = \frac{1}{4}AV = \frac{1}{4}v$, Adeoque $aG = \frac{1}{2}av = \frac{1}{8}v$, & $CG = Ca - aG = \frac{1}{4}CA - \frac{1}{8}AV = \frac{1}{4}R - \frac{1}{8}v = \frac{1}{8}h$, (propter $2R - v = h$.) Et similiter ostendetur, in opposito Sectore BCBa; $av = \frac{1}{4}aV = \frac{1}{4}h$; & $aG = \frac{1}{2}av = \frac{1}{8}h$; & $CG = Ca - aG = \frac{1}{4}R - \frac{1}{8}h = \frac{1}{8}v$, (propter $2R - h = v$.) Hoc est, Distantia Centri gravitatis Sectoris Sphærici (in Sectoris Axe positi) à Centro Sphærae, æqualis Tribus Quadrantibus Radii minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ Sectori convenientis; aut etiam (quod eodem recidit) æqualis Tribus Octantibus altitudinis reliquæ superficiei sphæricæ. Quod erat propositum.

Hoc est, speciatim in Hemisphærio, (propter $v = h = R$,) $\frac{1}{4}R - \frac{1}{8}R = \frac{1}{8}R$.

Corollarium constat; ex prop. 24. Cap. præced. Nam Sectori BCBA, dempto BBC Cono, habetur Segmentum BBA; & Sectori BCBa, addito eodem BBC Cono, habetur Segmentum BBa. Cum itaque tum Sectoris sphærici (per jam ostensâ,) tum dempti additive Coni (per 6 hujus,) magnitudines & Centra gravitatis assignantur;

K k 2

habebitur

B.

habebitur & Residui, vel Aggregati, Segmenti Sphaerici, tum Magnitudo, tum & Centrum gravitatis. Et similiter, (mutatis mutandis,) in aliis Sphaerae portionibus.

C. Exempli gratia. Centri gravitatis Sectoris integri BCBA (con-
Fig. 159, versione Semisectoris Circularis BCA, circa CA, descripti) distantia
16c. a C, (per modo demonstrata) est $\frac{1}{4}CA - \frac{1}{8}AV = \frac{1}{8}Aa - \frac{1}{8}AV = \frac{1}{8}Va$,
in ipso Axe AC.

Hoc est (positis ut in demonstratione propositionis praecedentis,
Radio $CA = CB = Ca = R$; integra Peripheria, P ; Arcu $BA = a$;
chorda $BA = c$; sinu recto $BV = s$; & verso $AV = v$; versique res-
siduo ad Diametrum $Va = 2R - v = h$; à Centro Distantia $VC = x$
 $= R - v$ vel $v = R$; Item $a - s = c$; $a + s = f$; &c.) $\frac{1}{4}R - \frac{1}{8}v$
 $= \frac{1}{8}h$.

Adeoquæ ejusdem Centri gravitatis ab a , vel ra , (intellige; à plano
in a Sphaeram Tangente,) $R + \frac{1}{8}h = \frac{1}{4}R - \frac{1}{8}v$. Atque à TA,
 $R - \frac{1}{8}h = \frac{1}{4}R + \frac{1}{8}v$.

Eademque est ab iisdem ra , vel TA, planis; distantia Centri gra-
vitatís Semisectoris, (puta, qui plano per Aa transeunte, integrum
bifecante, determinatur;) aut Sectoris Quadrantalís; aliúve im-
perfecta quavis conversione descripti, (adeoque duobus ejusmodi pla-
nis, quorum communis sectio sit Aa , interjecti;) propter omnia
plana, Sectorem integrum complementa, ipsorum partibus, Sectors
partiales complementibus, proportionalia, atque in iisdem à ra , TA,
planis Tangentibus, distantis. Quod de semi-conis, vel semisegmen-
tis Sphaericis aliis, aliisve Solidis imperfecta conversione descriptis,
& correspondentibus Ungulis, &c. similiter obtinet. Quod semel
moneo, ne saepius sit opus idem repetere.

Est autem (per prop. praeced. § Q.) Sphaerici Sectoris integri
BCBA, magnitudo, $\frac{1}{6}c^2P = \frac{1}{3}vRP$; (adeoque semisectoris magni-
tudo, $\frac{1}{12}c^2P = \frac{1}{6}vRP$;) & Ungulae Semiquadrantalís, qui huic
respondet, (intellige, qui Sectori circulari BCA insistit, aciem ha-
bens Aa ;) magnitudo $\frac{1}{6}c^2R^2 = \frac{1}{3}vR^2$.

Ducta igitur distantia illa, in magnitudinem; Habetur momentum
sphaerici sectoris integri BCBA (respectu Axis motus, Planive Tan-
gentis, ra ;) $\frac{1}{6}c^2RP + \frac{1}{12}c^2hP = \frac{1}{12}vR^2P - \frac{1}{8}v^2RP = \frac{1}{12}vR^2P + \frac{1}{8}v^2RP$;
Semisectoris, $\frac{1}{12}vR^2P + \frac{1}{16}v^2RP$; Ungulaeque Semiquadrantalís,
 $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{8}v^2RP$.

Et, respectu ipsius TA, momentum sphaerici Sectoris integri
BCBA, $\frac{1}{6}c^2RP - \frac{1}{12}c^2hP = \frac{1}{12}vR^2P + \frac{1}{8}v^2RP = \frac{1}{12}vR^2P - \frac{1}{8}v^2RP$;
Semi-

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 253

Semifectoris $\frac{1}{2}vR^2P - \frac{1}{16}s^2RP$; Ungulaeque Semiquadrantis, Fig. 159, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$. 160.

Et speciatim, quæ toti Semicirculo insitit Semiquadrantis Ungula aciem habens $A\alpha$; (propter $v=2R$, & $s=c$.) Est $\frac{2}{3}R^3$, & solidum conversione factum, hoc est, Sphæra integra, $\frac{2}{3}R^3P$; & Semisolidum, seu Hemisphaerium $\frac{1}{3}R^3P$. Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, vel TA , R : Momentum Ungulae respectu $\tau\alpha$, vel TA , $\frac{2}{3}R^4$; Sphærae, $\frac{2}{3}R^3P$; Hemisphaerii $AD\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$.

Deinde (per prop. præced. § R.) Coni integri BBC, (conversione D. Trianguli BVC, circa $A\alpha$.) magnitudo est $\frac{xsP}{6R}$; Semi-coni, $\frac{xsP}{12R}$; Ungulae Semiquadrantis, $\frac{1}{6}xs^2$. Hoc est, Si V sit supra C Centrum; $\frac{R-v}{6R}s^2P$; $\frac{R-v}{12R}s^2P$; $\frac{R-v}{6}s^2$; Si infra Centrum; $\frac{v-R}{6R}s^2P$, $\frac{v-R}{12R}s^2P$, $\frac{v-R}{6}s^2$.

Est autem (per 6 hujus) Centri gravitatis à DC distantia, $\frac{1}{4}v$: Hoc est $\frac{1}{4}R - \frac{1}{4}v$, si supra Centrum; & $\frac{1}{4}v - \frac{1}{4}R$, si infra Centrum. Et, utroque casu, ejusdem à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{1}{4}R - \frac{1}{4}v = R - \frac{1}{4}v$: Atque, à TA , $\frac{1}{4}R + \frac{1}{4}v = R + \frac{1}{4}v$.

Et propterea (ductis magnitudinibus in distantias) Momentum, respectu ipsius $\tau\alpha$, Coni integri BCB, $\frac{1}{6}xs^2P + \frac{x^2s^2P}{8R}$; Semi-coni, $\frac{1}{12}xs^2P + \frac{x^2s^2P}{16R}$; Semiquadrantis Ungulae, $\frac{1}{6}xs^2R + \frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{7R-3v}{24R}xs^2P$, $\frac{7R-3v}{48R}xs^2P$, $\frac{7}{24}xs^2R - \frac{1}{8}xs^2v$. Hoc est, si supra Centrum, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{7}{24}R^2 - \frac{1}{8}vR - \frac{3}{24}s^2$; Si infra Centrum, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{7}{24}R^2 + \frac{1}{8}vR + \frac{3}{24}s^2$.

Et, respectu ipsius TA ; momentum Coni integri, Semi-coni, & Semiquadrantis Ungulae, $\frac{1}{6}xs^2P + \frac{x^2s^2P}{8R}$, $\frac{1}{12}xs^2P + \frac{x^2s^2P}{16R}$, $\frac{1}{6}xs^2R + \frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{R+3v}{24R}xs^2P$, $\frac{R+3v}{48R}xs^2P$, $\frac{1}{24}xs^2R + \frac{1}{8}xs^2v$. Hoc est.

Fig. 159, est, Supra Centrum, $\frac{R^2 - 4vR + 3s^2}{24R} s^2 P$, $\frac{R^2 - 4vR + 3s^2}{48R} s^2 P$,
160.

$$\frac{\frac{1}{24} s^2 R^2 - \frac{1}{6} s^2 v R + \frac{1}{8} s^4}{48R} s^2 P, \text{ vel, Infra centrum } \frac{-R^2 + 4vR - 3s^2}{24R} s^2 P,$$

$$\frac{-R^2 + 4vR - 3s^2}{48R} s^2 P, \frac{-\frac{1}{24} s^2 R^2 + \frac{1}{6} s^2 v R - \frac{1}{8} s^4}{48R} s^2 P.$$

E. Hæc itaque momenta Coni, Semiconi, Ungulæve, BBC, BVC; momentis Sectoris, Semisectoris, Ungulæve, B C B A, B C A, respectivis; Subducta, Additave, prout vel supra vel infra centrum fuerint; exhibent Segmenti, Semisegmenti, Ungulæve, BBA, BVA, momenta respectu ipsius τa , $\frac{1}{3} v R^2 P - \frac{1}{6} s^2 R P + \frac{1}{6} s^2 v P + \frac{s^4 P}{8R}$,

$$\frac{1}{6} v R^2 P - \frac{1}{12} s^2 R P + \frac{1}{12} s^2 v P - \frac{s^4 P}{16R}, \frac{1}{3} v R^3 - \frac{1}{6} s^2 R^2 + \frac{1}{6} s^2 v R - \frac{1}{8} s^4$$

$$= \frac{1}{6} v^2 R^2 + \frac{1}{6} s^2 v R + \frac{1}{8} s^4.$$

$$\text{Et, respectu ipsius T A, } \frac{1}{3} v R^2 P - \frac{1}{6} s^2 R P + \frac{1}{6} s^2 v P - \frac{s^4 P}{8R};$$

$$\frac{1}{6} v R^2 P - \frac{1}{12} s^2 R P + \frac{1}{12} s^2 v P - \frac{s^4 P}{16R}, \frac{1}{3} v R^3 - \frac{1}{6} s^2 R^2 + \frac{1}{6} s^2 v R - \frac{1}{8} s^4$$

$$= \frac{1}{6} v^2 R^2 + \frac{1}{6} s^2 v R - \frac{1}{8} s^4.$$

Adeoque, momenta per magnitudines dividendo (puta, Ungulæ momenta, per magnitudinem Ungulæ, $\frac{1}{6} v^2 R + \frac{1}{6} s^2 v = \frac{1}{3} v R^2 - \frac{1}{6} s^2 R + \frac{1}{6} s^2 v$, prop. præced. § R. inventam,) habetur distantia Centri gravitatis Ungulæ BVA aciem habentis Aa, (adeoque & Sectoris, vel Semisectoris correspondentis,) à τa , $R + \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}$: à

$$\text{T A, } R - \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} : \text{à D C, } \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} : \text{à B V,}$$

$$\frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} + R - h = \frac{3s^4}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} - R + v.$$

Vel (quod eodem recidit) à τa , $R + \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2} s^2$; à T A,

$$R - \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2} s^2 = \frac{2vR + 3s^2}{4vR + 4s^2} v; \text{ à D C, } \frac{6R - 3v}{4vR + 4s^2} s^2 = \frac{3hs^2}{4vR + 4s^2}$$

$$= \frac{3h^2v}{4vR + 4v h} = \frac{3h^2}{4R + 4h}; \text{ à B V, } \frac{3h^2}{4R + 4h} + R - h = \frac{3h^2}{4R + 4h} - R + v.$$

Et (restituendo magnitudines) momentum (respectu ipsius B V) Segmenti

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 255

Segmenti Sphærici BBA, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{s^4P}{24R}$; Semisegmenti BVA, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP - \frac{s^4P}{48R}$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4$.

Sed & possunt hæc eadem, sic alias haberi.

Cum enim (ut ostensum est prop. præced. §. V.) Semi-Quadrata Fig. 164 rectarum BV & huic parallelarum Semisegmentum AVB complementum; sint rectis Vβ, &c. (fig. 164.) parabolæ portionem AVβ complementibus, proportionalia; & quidem ipsis Vβ, &c. in $\frac{1}{2}R$ ductis sigillatim æqualia; atque in eisdem τ α, TA, DC, distantis: Eadem erunt respectu ipsarum τ α, TA, DC, momenta Semiquadrantis Ungulæ (quam illa complement Semiquadrata) Semisegmento AVB insistentis; atque Prismatis portioni Parabolæ AVβ insistentis, quam illa complement parallelogramma βV x $\frac{1}{2}R$; Eademque utriusque Solidi distantia Centri gravitatis, (puta G, & γ,) ab ipsis τ α, TA, DC. (planis) respective. Hoc est (per 5 hujus) quantum inde distat ipsius portionis Parabolæ AVβ centrum gravitatis γ.

Est autem Semiparabolæ AΔC magnitudo (per 6 hujus) $\frac{2}{3}ΔC \times CA = \frac{2}{3}R^2$; ejusque Centri gravitatis ab Axe CΔ distantia (per 8 hujus) $\frac{2}{3}AC = \frac{2}{3}R$; adeoque à τ α, $R + \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}R$; à TA, $R - \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}R$. Adeoque ipsius momentum respectu DCA, est $\frac{4}{3}R^3$; respectu τ α, $\frac{2}{3}R^3$; respectu TA, $\frac{2}{3}R^3$.

Item Semiparabolæ βΔb, magnitudo $\frac{2}{3}Δb \times bβ = \frac{2x^3}{3R} = \frac{2x^3}{3R}$; Centrique gravitatis à CΔ distantia $\frac{1}{3}bβ = \frac{1}{3}x$; (adeoque à τ α, $R + \frac{1}{3}x$; à TA, $R - \frac{1}{3}x$; prout fuerit supra infrave rectam CΔ.) Adeoque momentum ejus, respectu ipsius CΔ, $\frac{x^4}{4R}$; Cui additum momentum parallelogrammi VCbβ, hoc est (propter βb=x, & Cb=R-x) $\frac{x^3}{R} = \frac{R^3 - x^3}{R}$; Centrique gravitatis à CΔ distantiam, $\frac{1}{2}βb = \frac{1}{2}x$; $\frac{x^3R^2 - x^4}{2R} = \frac{x^2}{2R}x^2$, exhibet portionis VβΔC momentum respectu ipsius CΔ, $\frac{2x^3R^2 - x^4}{4R} = \frac{2s^3 + x^3}{4R}x^2$. Hujusq; propterea portionis VβΔC (propter magnitudinem $xR - \frac{x^3}{3R}$) distantia Centri gravitatis à CΔ, est $6x$

Fig. 164. $\frac{6x^3R^2 - 2x^4R}{12xR^2 - 4x^3} = \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$: Adeoque à $\tau\alpha$, $R + \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; à TA, $R + \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; (prout supra infrave Centrum fuerit.) Et (restituendo Magnitudinem) Momentum ejusdem $V\beta\Delta C$, respectu $\tau\alpha$, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$, & respectu TA, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$.

Atque hæc portionis $V\beta\Delta C$ momenta respectiva, dempta additive (prout supra infrave Centrum C contigerit V punctum,) respectivis Semiparabolæ $A\Delta C$ (respectu rectarum $\tau\alpha$, TA,) momentis, $\frac{1}{12}R^3$, $\frac{1}{12}R^3$: exhibent Portionis $AV\beta$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3 + xR^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$; & respectu TA, $\frac{1}{12}R^3 + xR^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$.

Reductione autem factâ, valorem ipsius x restituendo, reperientur hæc momentis superius designatis convenire.

Est enim $x = \pm R \pm v$, prout supra infrave Centrum contigerit; (Hoc est, $x = R - v$, supra Centrum; vel $x = -R + v$ si infra Centrum.) Adeoque $\pm xR^2 = -R^3 + vR^2$.

Similiter $x^3 = \pm R^3 \mp 3vR^2 \mp 3v^2R \mp v^3$. Adeoque $\frac{\pm x^3}{3} = \pm \frac{R^3}{3} - vR^2 + v^2R - \frac{1}{3}v^3$. Hoc est (propter $v^2 = 2vR - s^2$, & $v^3 = 4vR^2 - 2s^2R - s^2v$), $\frac{\pm x^3}{3} = \pm \frac{R^3}{3} - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$.

Et utroque casu (hoc est, si $x = +R - v$, si $x = -R + v$), est $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$. Adeoque $\frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{R^2 + s^2}{4R}x^2 = \frac{R^4 - s^4}{4R} = \frac{1}{4}R^3 - \frac{s^4}{4R}$.

Adeoque momentum Portionis $AV\beta$, respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3 + xR^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v + \frac{s^4}{4R}$; & respectu TA, $\frac{1}{12}R^3 + xR^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v - \frac{s^4}{4R}$.

Atque hæc momenta (propter prismatis ipsi $AV\beta$ insistentis altitudinem $\frac{1}{2}R$) ducta in $\frac{1}{2}R$; exhibent istius Prismatis momentum, hoc est, momentum Semiquadrantalæ Ungulæ Semisegmenti Circulari ABV insistentis.

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 257

sistentis (aciem habentis $A\alpha$) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{6}s^4$; & respectu TA , $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{6}s^4$. Ut prius.

Indeque Centri gravitatis distantia, sive à $\tau\alpha$, sive TA , sive à BV , elicietur, ut prius.

Porro; Coni integri $BB\alpha$ (Trianguli $BV\alpha$, circa $A\alpha$ conversione F. descripti,) magnitudo (per prop. præced. § S.) $\frac{s^2h}{6R}P = \frac{2R-v}{6R}s^2P$; Fig. 159, 160.

semiconi, $\frac{2R-v}{12R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$.

Centrique gravitatis distantia (per 6 hujus) à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}h = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}v$; à TA , $\frac{1}{2}R - \frac{1}{4}h = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}v$.

Quæ quidem distantia, in magnitudines ductæ, exhibent momenta, respectu ipsius $\tau\alpha$, Coni $\frac{s^2h^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 4vR + v^2}{8R}s^2P = \frac{4R^2 - 2vR - s^2}{8R}s^2P$; Semiconi $\frac{4R^2 - 2vR - s^2}{16R}s^2P$; Semiquadrantal, Ungulæ, $\frac{1}{6}s^2h^2 = \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{6}s^4$.

Et, respectu ipsius TA , Momentum Coni $\frac{s^2h^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{24R}s^2P$; Semiconi, $\frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{48R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR + \frac{1}{6}s^4 = \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{6}s^2h^2$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Segmenti, Semisegmenti, & correspondentis Ungulæ, BBA , BVA , respective addita, exhibent momenta, respectu ipsius $\tau\alpha$, Sphærici sectoris $B\alpha BA$, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; Semisectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$. Et respectu TA , momentum Sectoris Sphærici $B\alpha BA$, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2vP$; Semisectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$; Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$.

Vel etiam; Intelligatur, super $BC\alpha$ Triangulo, Ungula Semiquadrantal, aciem habens $A\alpha$: Quæ Pyramis erit verticem habens α ; & basin Triangularem super BC rectam. Hujusque Basis Triangularis (in rectam CB projectæ) Centrum gravitatis puta β , distabit à C (vertice Trianguli) $\frac{2}{3}CB$, (per 6 hujus;) ejusque ab $A\alpha$ (plano) distantia, $\beta\gamma = \frac{1}{3}BV = \frac{1}{3}s$; & in rectâ inde ad α ductâ, Trianguli centrum gravitatis ut g , abscindet $ag = \frac{1}{4}s\beta$; Cujus itaque

L 1

ab

258 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 159, ab A a distantia $gG = \frac{1}{4} \delta \gamma = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{6} s$: Ejusque à τa distantia, 160. $Ga = \frac{1}{4} \gamma a$; hoc est (propter $\gamma a = R + \frac{2}{3} x = \frac{1}{3} R - \frac{2}{3} v$), $\frac{1}{4} R - \frac{1}{2} v$; adeoque ejusdem à TA distantia $\frac{1}{4} R + \frac{1}{2} v$.

Quæ quidem distantia, in $\frac{1}{6} s^2 R$ (pyramidis magnitudinem, per prop. præced. § S) ductæ; exhibent momentum Pyramidis; (seu Ungulæ BCa, aciem habentis Aa,) respectu ipsius τa , $\frac{1}{24} s^2 R^2 - \frac{1}{12} s^2 v R$; & respectu ipsius TA, $\frac{1}{6} s^2 R^2 + \frac{1}{12} s^2 v R$. Adeoque Solidi (scil. Coni, conicè excavati,) conversione Trianguli BCa circa Aa facti, momentum respectu τa , $\frac{1}{24} s^2 R P - \frac{1}{12} s^2 v P$; & respectu TA, $\frac{1}{6} s^2 R P + \frac{1}{12} s^2 v P$: Semisolidique momentum respectu τa , $\frac{1}{48} s^2 R P - \frac{1}{24} s^2 v P$; & respectu TA, $\frac{1}{12} s^2 R P + \frac{1}{24} s^2 v P$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Sectoris, Semisectoris, & correspondentis Ungulæ, BCBA, BCA, respective addita; exhibent momenta Sectoris, Semisectoris, Ungulæque, BaBA, BaA, respectu ipsius τa , $\frac{1}{3} v R^2 P + \frac{1}{3} s^2 R P - \frac{1}{12} s^2 v P$, $\frac{1}{6} v R^2 P + \frac{1}{6} s^2 R P - \frac{1}{12} s^2 v P$, $\frac{1}{3} v R^2 + \frac{1}{3} s^2 R^2 - \frac{1}{12} s^2 v R$;

Et, respectu ipsius TA, $\frac{1}{3} v R^2 P + \frac{1}{3} s^2 R P + \frac{1}{12} s^2 v P$, $\frac{1}{6} v R^2 P + \frac{1}{6} s^2 R P + \frac{1}{12} s^2 v P$. Ut prius.

Quæ quidem momenta, per magnitudines divisa, (prop. præced. § S. traditas) exhibent distantiam Centri gravitatis, à τa , $\frac{\frac{1}{3} v R^2 + \frac{1}{3} s^2 R^2 - \frac{1}{12} s^2 v R}{\frac{1}{3} v R + \frac{1}{3} s^2 R} = R + \frac{2 s^2 R - s^2 v}{4 v R + 2 s^2}$; & à TA, $R - \frac{2 s^2 R - s^2 v}{4 v R + 2 s^2}$; à DC, $\frac{2 s^2 R - s^2 v}{4 v R + 2 s^2} = \frac{h s^2}{4 v R + 2 s^2}$.

G. Similiter; Coni integri BAB, (Trianguli BAV conversione circa Aa descripti) magnitudo (per § R, prop. præced.) $\frac{s^2 v P}{6 R}$; Semiconi $\frac{s^2 v P}{12 R}$; & Semiquadrantis Ungulæ $\frac{1}{6} s^2 v$. Centrique gravitatis distantia à TA, $\frac{1}{4} v$ (per § hujus;) atque τa $2 R - \frac{1}{4} v$. Quæ quidem distantia in magnitudines ductæ, exhibent, respectu TA, momentum Coni $\frac{s^2 v P}{8 R}$; Semiconi $\frac{s^2 v P}{16 R}$; Ungulæque $\frac{1}{8} s^2 v^2 = \frac{1}{4} s^2 v R - \frac{1}{8} s^4$: Respectu τa , momentum Coni $\frac{1}{3} s^2 v P - \frac{s^2 v^2 P}{8 R}$, Semiconi $\frac{1}{6} s^2 v P - \frac{s^2 v^2 P}{16 R}$; Ungulæque $\frac{1}{3} s^2 v R - \frac{1}{8} s^4 = \frac{1}{12} s^2 v R + \frac{1}{8} s^4$.

Quæ quidem momenta, ex respectivis momentis Segmenti, Semisegmenti

PROP. XVI: De Calculo Centri Gravitatis. 299

segmenti, Ungulæque, BBA, BVA, (§ E. traditis,) subducta, Fig. 159, Relinquant Annuli, (conversione segmenti ABA circa Aa,) mo. 160. momentum respectu τa , $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP + \frac{1}{24}s^2vP$; Et correspondentis Ungulæ $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$. Atque, respectu TA, momentum Annuli $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$; Ungulæque $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$. Adcoque (propter Ungulæ magnitudinem § Q, R. prop. præced. $\frac{1}{6}v^2R^2 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R^2$), distantia Centri gravitatis à τa , $R + \frac{s^2}{2v} = R + \frac{1}{2}h$; à TA, $R - \frac{1}{2}h$; atque à DC, $\frac{1}{2}h = \frac{s^2}{2v}$.

Porro, Cum jam exhibuerim, Momenta respectu rectæ τa (aut huic parallelæ) ut Axis Motus seu Libræ; Solidorum ex conversione vel semiconversione Semisectorum vel Semisegmentorum BCA, BBA, BVA, circa Aa ut axem Conversionis; & Ungularum Semiquadrantalium illis correspondentium, aciem habentium Aa: Eadem operâ etiam exhibuimus, Momenta respectu Aa ut Axis Motus seu Libræ, Solidorum ex conversione vel Semiconversione eorundem Semisectorum vel Semisegmentorum BCA, BBA, BVA, circa τa (vel huic parallelam) ut axem Conversionis. Et Ungularum Semiquadrantalium illis correspondentium, aciem habentium τa , vel huic parallelam. (Quod & Solidis ex quavis alia conversione imperfectâ, non minus quam ex Semiconversione ortis; Ungulisque aliis quam Semiquadrantalibus; mutatis mutandis, accommodabitur.)

Quippe idem omnino momentum erit; five sit Aa Axis Conversionis, & τa axis Libræ; five τa axis conversionis, & Aa axis Libræ. (Et similiter in ungulis; idem momentum erit, five Acies Ungulæ sit Aa, & Axis Libræ τa ; five Acies Ungulæ τa , & Axis Libræ Aa, & similiter alibi.)

Cum enim, (verbi gratia,) rectæ BV momentum respectu Aa, sit $BV \times \frac{1}{2}BV$, (propter ipsius centrum gravitatis in sui medio,) hoc est, $\frac{1}{2}BV^2$; Atque tantundem etiam sit Triangulum, in Ungula Semiquadrantali (cujus Acies Aa,) eidem BV insistens, (ut dudum ostensum est.) Erit hujus Trianguli momentum respectu τa rectæ (propter Va distantiam) $\frac{1}{2}BV \times Va$. Sed & in Ungula Semiquadrantali cujus acies τa , eidem BV insister parallelogrammum cujus altitudo (propter angulum Semiquadrantalem) æqualis erit ipsi Va distantiæ;

Ll 2

Fig. 159,
160.

stantia; cujus itaque magnitudo erit $BV \times Va$: Cúmque hujus Centrum gravitatis sit in mediâ sui longitudine (per 2 hujus,) adeoque illius distantia ab $A\alpha$, seu perpendiculari plano huic insistente, sit $\frac{1}{2}BV$; erit ejusdem Parallelogrammi, respectu axis Libræ $A\alpha$, momentum, $\frac{1}{2}BV \times BV \times Va = \frac{1}{2}BVq \times Va$, ut prius. Cúmque idem obtineat, de singulis rectis ipsi BV parallelis, Semisectores vel Semisegmenta BCA , $B\alpha A$, BVA , complementibus: Idem de totius Ungulæ Momento obtinebit: Nempe idem omnino esse Momentum Ungulæ (super eodem plano,) live sit $A\alpha$ acies, & $\tau\alpha$ axis libræ, live $\tau\alpha$ acies, & axis libræ $A\alpha$.

Atque idem plane obtinet de Solidis conversione, vel Semiconversione descriptis: Quippe hæc tum magnitudine, tum & momento, nihil aliud ab Ungulis Semiquadrantalibus correspondentibus differunt quam quod sint ad illas in ratione P ad R , vel $\frac{1}{2}P$ ad R : ut supra ostensum est. Adeoque tum facti ex conversione BV circa $A\alpha$ momentum respectu $\tau\alpha$, tum ejusdem conversione circa $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est $\frac{\frac{1}{2}BVq \times Va}{R}P$ seu $\frac{BVq \times Va}{2R}P$; factique ex semiconversione, utrobique, $\frac{BVq \times Va}{4R}P$. Et sic ubique.

- I. Est itaque Semiquadrantis Ungulæ super BCA sectore, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu rectæ (planive perpendicularis) $A\alpha$ (ut § C.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique ejusdem integræ conversione circa $\tau\alpha$ facti momentum (respectu ipsius $A\alpha$) $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{8}s^2RP$; & Semisolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{16}s^2RP$.

Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Sectoris BCA respectu $\tau\alpha$) $\frac{1}{2}vR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2$ (per prop. præced. § I.) erit istius Ungulæ Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia $\frac{8vR + 3s^2}{12v + 8s} =$

$\frac{14R - 3v}{12v + 8s}v = \frac{8R + 3b}{12v + 8s}v$. Eademque est distantia ab $A\alpha$ (rectâ, planive perpendiculari) Solidi conversione (perfectâ vel imperfectâ) BCA circa $\tau\alpha$ descripti.

Ungulæque Semiquadrantis super eodem BCA sectore aciem habentis TA , Momentum respectu ipsius $A\alpha$, est (ut § C.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique Correspondentis, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{8}s^2RP$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{16}s^2RP$. Adeoque, (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$, per § I prop. præced.) distantia Centri gravitatis

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 261

tatis istius Ungulæ (adeoque & Solidi seu Semisolidi correspondentis) Fig. 59, 160.

$$\text{ab } A\alpha, \text{ est } \frac{8vR-3s^2}{12a-8s} = \frac{8R-3b}{12a-8s}v.$$

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo insistit femiquadrantis Ungulæ aciem habentis sive τa , sive TA , Momentum respectu $A\alpha$, est $\frac{1}{3}R^3$; Solidique correspondentis $\frac{2}{3}R^3P$; & Semisolidi, $\frac{1}{3}R^3P$: Centri- que gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{8R^2}{3P}$.

Item, Semiquadrantis Ungulæ super BVA Semisegmento, aciem habentis τa , momentum respectu $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{6}s^4$; (Solidique correspondentis, & Semisolidi, momenta, ad hoc, ut P , vel $\frac{1}{2}P$, ad R .) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Semisectoris BVA respectu τa), $\frac{1}{2}R^3 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}vR - \frac{1}{2}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis istius Ungulæ (adeoque solidi Semisolidive correspondentis)

$$\text{ab } A\alpha, \frac{8vR^3-4s^2R^2+4s^2vR-3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR-8s^3} = \frac{4vR^2+4s^2R-3s^2b}{12eR^2+12svR-8s^3}v.$$

Ungulæque Semiquadrantis super eodem BVA Semisegmento, aciem habentis TA , momentum respectu ejusdem $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{6}s^4$; (Solidique aut Semisolidi correspondentis momenta, ad hoc, ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R .) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (seu plani BVA momentum respectu TA), $\frac{1}{2}R^3 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}vR - \frac{1}{2}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ (Solidive aut Semisolidi conversione facti) ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3-4s^2R^2+4s^2vR-3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR-8s^3} = \frac{4vR^2+4s^2R-3s^2b}{12eR^2+12svR-8s^3}v.$

Similiter, Semiquadrantis Ungulæ super eodem BVA , aciem habentis BV , momentum respectu $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{2}s^2v^2b^2$; (Solidique & Semisolidi conversione facti momenta, ad hoc, ut P & $\frac{1}{2}P$ ad R .) Adeoque propter Ungulæ magnitudinem (vel plani respectu BV momentum) $-\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}vR - \frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{4}evR + \frac{1}{6}svz$; (per § L. prop. præced.) Di-

$$\text{stantia Centri gravitatis ab } A\alpha, \frac{8vR^3-4s^2R^2-3s^4}{12aR^2-12sR^2+12svR-8s^3}.$$

$$\text{Vel (quod eodem recidit)} \frac{c^2+s^2}{4svz+12evR}v^2, \text{ seu } \frac{4R-v-2R+h}{4svz+12evR}v^3, \text{ seu } \frac{4vR^2-s^2b}{12eR^2+12svR-4s^3}v.$$

Item, Semiquadrantis Ungulæ super $B\alpha A$, aciem habentis τa , momentum

K.

L.

Fig. 159,
160.

momentum respectu $A\alpha$, (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$
 $= \frac{1}{24}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; (Solidique conversione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP$
 $= \frac{1}{12}s^2vP$; & Semisolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP = \frac{1}{24}s^2vP$;) Adeoque,
 propter Ungulæ magnitudinem (seu plani momentum respectu $\tau\alpha$,)
 $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) Distantia Centri gra-
 vitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6aR + 10sR - 2sv} = \frac{4R^2 + 4hR - s^2v}{6fR + 2sh}v$.

Ungulæque Semiquadrantis super eodem $B\alpha A$, aciem habentis
 TA , momentum respectu ejusdem $A\alpha$ (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$;
 (Solidique & Semisolidi, conversione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$,
 $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$;) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem, (seu
 plani momentum respectu TA), $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$, (per § M.
 prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6aR + 2sR + 2sv}$
 $= \frac{4R^2 + s^2}{6fR - 2sh}v$.

M.

Eodem modo, Semiquadrantis Ungulæ Triangulo $BC\alpha$ infi-
 stentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § F.)
 $\frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; (& Solidorum, conversione vel semiconversio-
 ne descriptorum, his proportionalia; nempe in ratione P seu $\frac{1}{2}P$
 ad R : quod & in sequentibus intellige.) Adeoque (propter mag-
 nitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. præced.) distantia Centri
 gravitatis ab $A\alpha$, est $\frac{5sR - 2sv}{12R - 4v} = \frac{5R - 2v}{12R - 4v}$. Ungulæque Semiqua-
 drantis super eodem $BC\alpha$ insistentis, aciem habentis TA , mo-
 mentum respectu $A\alpha$, est (ut § F.) $\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; adeoque
 (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) Di-
 stantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3R + 2v}{12R + 4v}$.

Ungulæque Semiquadrantis super Triangulo BVC , aciem haben-
 tis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § D.) $\frac{7R - 3v}{24}s^2x$: Et
 magnitudo (per § K. prop. præced.) $\frac{5R - 2v}{6}sx$: Distantiaque Cen-
 tri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{7R - 3v}{20R - 8v}$. Aciemque habentis TA , momen-
 tum (respectu $A\alpha$), $\frac{R + 3v}{24}s^2x$; Magnitudo, $\frac{R + 2v}{6}sx$; Distantia-
 que $\frac{R + 3v}{4R + 8v}$.

Et

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 263

Et Semiquadrantis Ungulæ super Triangulo $BV\alpha = BC\alpha + BVC$, Fig. 159,

aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$ $\frac{5R-2v}{24} s^2 R + \frac{7R-v}{24} v$ 160.

$s^2 x$; hoc est (propter $x=R-v$, supra centrum, addendum; vel

$x=-R+v$, infra Centrum, auferendum;) $\frac{5R-v}{24} s^2 R +$

$\frac{7R^2-10vR+3v^2}{24} s^2 = \frac{11R^2-12vR+3v^2}{24} s^2$; vel, propter $v^2=2vR$.

$-\frac{1}{2} s^2$, $\frac{1}{2} s^2 R^2 - \frac{1}{4} s^2 vR - \frac{1}{8} s^2 v^2 = \frac{1}{8} s^2 h^2$; (ut § F. Adeoq; (propter mag.

$\frac{3R-v}{6} s R + \frac{5R-2v}{6} s x = \frac{3R-v}{6} s R + \frac{5R^2-7vR+2v^2}{6} s =$

$\frac{4}{3} vR^2 - \frac{4}{3} vR + \frac{1}{3} v^2 = \frac{4}{3} vR^2 - \frac{4}{3} vR - \frac{1}{3} s^2 = \frac{1}{3} s^2 h^2$; ut § M. prop.

præced.) Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{6} s$. Aciemque ha-

bentis TA ; momentum (ut § F.) $\frac{1}{3} s^2 hR - \frac{1}{6} s^2 h^2$; Magnitudo (ut § M.

prop. præced.) $shR - \frac{1}{3} sh^2$; Distantiaque $\frac{8R-3h}{24R-8h} = \frac{2R+3v}{8R+8v}$.

Ungulæque Semiquadrantis super Triangulo BAV , aciem ha-

bentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § G.) $\frac{1}{12} s^2 vR + \frac{1}{6} s^2 v^2$; N.

& magnitudo (propter magnitudinem Trianguli $\frac{1}{2} v$; distantiamque

Centri gravitatis à TA $\frac{2}{3} v$, & à $\tau\alpha$ $2R - \frac{2}{3} v$,) $vR - \frac{1}{3} v^2$

$= \frac{1}{3} vR + \frac{1}{3} s^2$; & distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$ $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}$. A-

ciemque habentis TA , momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4} s^2 vR - \frac{1}{8} s^2 v^2$;

magnitudo, $\frac{1}{3} v^2 = \frac{2}{3} vR - \frac{1}{3} s^2$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distan-

tia, $\frac{6vR-3s^2}{16vR-8s^2} = \frac{1}{8} s$.

Et Semiquadrantis Ungulæ super ABA segmento, aciem habentis

$\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § G.) $\frac{1}{3} vR^3 - \frac{1}{6} s^2 R^2$

$+ \frac{1}{12} s^2 vR = \frac{1}{6} v^2 R^2 + \frac{1}{12} s^2 vR$; magnitudo (per § N. pr. præ.) $\frac{1}{2} vR - \frac{1}{3} s^2 R^2$

$+ \frac{1}{6} vR$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{4vR^2-2s^2R+s^2v}{6vR-6sR+2sv}$

$= \frac{4R^2-2hR+s^2}{6vR+2sv} v$. Aciemque habentis TA , momentum $\frac{1}{3} vR^3$

$- \frac{1}{6} s^2 R^2 - \frac{1}{12} s^2 vR = \frac{1}{6} v^2 R^2 - \frac{1}{12} s^2 vR$; magnitudo, $\frac{1}{2} vR^2 - \frac{1}{3} s^2 R^3$

$- \frac{1}{6} vR$; distantiaque $\frac{4vR^2-2s^2R-s^2v}{6vR-6sR-2sv} = \frac{4R^2-2hR-s^2}{6vR-2sv} v$.

Atque jam (inter alia) Solidorum Semisectoris BCA , $B\alpha A$, O.

ant

Fig. 159, aut semifegmenti BVA, Segmentive ABA (necum Triangulorum
160. B C A, B C V, B A V, B V A, &c.) circa A a, integra conversione descriptorum, Centra gravitatis determinavimus: Ostendimus utique, distantiam Centri gravitatis à τa , T A, B V, &c. Atque in ipso Axe A a situm esse, constat, ex prop. 5 hujus. Ipsum itaque punctum determinavimus.

Et similiter, Centra gravitatis Solidorum integrorum, quæ (non modo Sectoris B C B, vel B a B, vel Segmenti B B A, ut quæ in medio Axis conversionis esse manifestum est; sed &) Semisectoris B C A, vel B a A, aut Semisegmenti B V A, Segmentive A B A, circa τa vel T A, aut etiam Semisegmenti B V A circa B V, conversione integra describuntur, determinavimus. Cum enim eorum distantias ab A a plano designavimus, eaque in ipso conversionis Axe τa , T A, vel B V, esse constet (per 5 hujus:) ipsa Axis puncta, quæ Centra gravitatis sunt, determinantur.

Verum in horum Semisolidis, solidisve imperfectâ quavis conversione descriptis; Ungulisque correspondentibus: nondum determinantur ipsa Centra; ut quæ non in ipso Axe posita sunt, sed alibi, extra axem, in plano per axem transeunte.

Cum tamen in quo per axem conversionis, seu aciem Ungulæ, transeunte plano constituta sint, jam constet ex § G prop. 12. hujus; (nempe, in eo per conversionis axem plano quod solidorum, conversione factorum, arcum conversionis bifecat; eoque per Ungularum aciem plano, quod bifecat ungulæ altitudinem:) Atque in quâ quidem hujus plani rectâ, jam sit determinatum; nempe in eis quorum Axis seu Acies est A a, per Centri gravitatis distantiam, à τa , T A, B V, &c. & in eis quorum Axis est τa , T A, vel B V, per ejus ab A a distantiam: Id solum superest, ut in quo istius rectæ puncto situm sit, determinemus per ipsius à conversionis Axe distantiam in eis quæ conversione describuntur Solidis; & in Ungulis, per distantiam à perpendiculari per Aciem Plano. (Unde ipsum gravitatis Centrum determinatum iri constat, per prop. 26. Cap. præced.) Id autem sic aggredimur.

P. Ut Sectorem Sphæricum integrum, B C B A, § A, (plani B C A circa rectam A a integra conversione descripti,) sic ejusdem semissem seu Semisectorem Sphæricum, aliūve imperfectum, (conversione dimidiâ, aliâve imperfectâ descriptum,) intelligamus ex Pyramidulis (similibus & æqualibus) componi, (juxta def. 1. Cap. 4.) Quorum communis vertex sit Sphære centrum, Basisque compleant Superfici

PROP. XVI: De Calculo Centri Gravitatis. 265

ficii Sphaericae portionem Semisectori huic, Sectorive imperfecto, con-Fig. 159, venientem: nempe Trilineum Sphaericum, quod *Sectoris Basin* ap- 160. pellabimus.

Cumque (per 6 hujus) Centri gravitatis in Pyramide, distantia à vertice pyramidis sit $\frac{1}{4}$ totius altitudinis; Pyramidularum illarum omnia Centra gravitatis (aequalibus ab invicem distantis remota) intelligantur complere Simile Trilineum Sphaericum, ut *b a*, fig. 165. cujus radius sit $Cb = \frac{1}{4}CB = \frac{1}{4}R$. Cujus cum singula puncta, (utpote aequalium Pyramidum Centra gravitatis,) aequaliter onerata reputentur; Idem erit Trilinei hujus, ipsiusque expositi Semisectoris, Sectorive imperfecti, Centrum gravitatis; (per 16 Cap. 4.) adeoque tantundem ab *A a* conversionis axe distabit.

Quod & similiter accommodabitur Ungulae eidem *B C A* sectori circulari insistenti; Cujus utique (pari ratione) Centrum gravitatis idem erit atque Superficii Ungulae Cylindraceae arcui *b a* insistentis aciem habentis *A a*; adeoque tantundem ab *A a* perpendiculari plano distans.

Est autem (per § V, W. prop. 13.) Semiquadrantis Ungulae superficialis, arcui *BA* insistentis, momentum respectu ipsius *A a*; idem atque summa quadratorum sinuum rectorum ipsi *AB* arcui convenientium; adeoque aequatur facto ex *BVA* semisegmento, in *R* ducto, hoc est, (propter $BVA = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}v$, per § F. prop. praeced.) $\frac{1}{2}eR' + \frac{1}{2}vR$: Atque hoc, per Ungulae superficialis magnitudinem divisum; hoc est, (per § N. Q. prop. 13) per vR divisum; exhibet istius Ungulae Superficialis *BA*, distantiam Centri gravitatis ab *A a* = $\frac{e}{2v}R + \frac{1}{4}v$. Adeoque (propter $Cb = \frac{1}{4}CB = \frac{1}{4}R$), arcui *b a* insistentis Ungulae superficialis, & propterea (per jam demonstrata) Ungulae Solidae ipsi *B C A* insistentis, aciem habentis *A a*, distantiam Centri gravitatis ab *A a* plano, $\frac{3e}{8v}R + \frac{1}{8}v$. (Et, speciatim, istius quae toti *AD a* semicirculo insistit, Ungulae, Distantia Centri gravitatis ab *A a*, propter $s=0$ adeoque $e=a=\frac{1}{2}P$, & $v=2R$, erit $\frac{1}{4}P$.)

Eademque esset, distantia Centri gravitatis Solidi, imperfectae ejusdem *B C A* circa *A a* conversione descripti, ab *A a* conversionis axe, dempta curvatura. Sed, propter curvaturam, minuenda est pro ratione quam habet ad conversionis arcum chorda sua, (per prop. 14. hujus) hoc est, in Semiconversione, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu ut $4R$ ad P ; (& in aliis conversionibus similiter, mutatis mutandis,

M m

in

Fig. 159, in ratione Chordæ ad Arcum;) Adeoque Semisolidi, ipsius B C A semiconversione circa A α descripti, distantia Centri gravitatis à conversionis suæ Axe A α , est $\frac{3eR + 3sv}{2vP}R$. (Et, speciatim, quod Semiconversione Semicirculi A D α describitur, Hemisphærii, Distantia Centri gravitatis ab A α , est $\frac{1}{2}R$.)

Atque hæc distantia in magnitudines ducta, (nempe Ungulæ, $\frac{1}{6}vR^2$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vRP$, per § Q. prop. præced.) exhibent Semiquadrantis Ungulæ super B C A sectori, aciem habentis A α , momentum respectu ipsius A α , $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2$; Semisolidique correspondentis, $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2$. Et speciatim, pro Ungula Semicirculi, & Hemisphærio; $\frac{1}{6}eR^3$, & $\frac{1}{6}svR^2$.

(Atque hic obiter notare non erit importunum, momentum Semisolidi respectu sui axis conversionis, duplum esse momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantis respectu aciei suæ seu Plani per illam perpendicularis, quod in huiusmodi casibus semper obtinet, quod semel moneo: Cum enim magnitudo ad magnitudinem sit ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique distantia, propter conversionem dimidiam, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$; erit quæ ex utrisque componitur, momentorum ratio $\frac{\frac{1}{6}P}{R} \times \frac{2R}{\frac{1}{2}P} = \frac{2}{1}$.)

Q. Deinde, quæ Triangulo B V C insitit Semiquadrantis Ungula, aciem habens A α , Pyramis est; verticem habens C Centrum; Basemque Triangularem rectæ BV insistentem; cuius quidem Trianguli Centrum gravitatis ab A α plano, distat $\frac{1}{3}BV = \frac{1}{3}x$; Centrumque gravitatis Pyramidis (utpote in rectâ, à basis Centro ad C pyramidis verticem ductâ, quæ est Pyramidis axis, tres quadrantes versus C abscindens; per. 6 hujus;) distabit ab A α plano, $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}x = \frac{1}{6}x$. Quæ quidem distantia, ducta in Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{6}eR^2$, (per § R. prop. præced.) exhibet ejusdem momentum respectu A α , $\frac{1}{6}eR^2 \times \frac{1}{6}x$: Et Semisolidi correspondentis (cujus magnitudo ad magnitudinem Ungulæ est ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique gravitatis distantia, ad distantiam hujus, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$;) momentum $\frac{1}{6}eR^2 \times \frac{1}{6}x$.

Atque hæc Ungulæ, Semisolidique momenta, momentis Ungulæ Semisolidique Sectoris B C A (§ P. repertis;) Ablata, si supra Centrum, vel Addita, si infra Centrum, exhibent Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis A α , momentum respectu A α , $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 \mp \frac{1}{6}eR^2 \times \frac{1}{6}x$: Hoc est, (propter $x = R - v$, supra

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 267

supra Centrum, auferendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, Fig. 159, addendum; $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: Et Semisolidi, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{6}s^3v$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$, per § R. propositionis præcedentis) distantia Centri gravitatis Ungulæ ab A a, $\frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3R + 2s^3v}{8vR^2 - 4s^3R + 4s^3v} = \frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3R + 2s^3v}{4v^2R + 4s^3v}$: Centrique Semisolidi inde distantia, ad hanc ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P .

Potest autem hoc momentum Ungulæ & Semisolidi, Semisegmento BVA convenientium, sic aliter concipi. Nempe, si omnes ordinatim applicatæ BV &c. æqualibus intervallis sumptæ, (complementes BVA spacium,) ducantur primum in sui semiffes, ut habeantur Triangula eidem insistentia (Ungulæ complementia,) quæ sunt (ut supra ostensum est) ordinatim-applicatarum Semiquadrata: Atque hæc demum Triangula (semiquadratis æqualia) in rectarum duos Trientes, (pro distantia Centri gravitatis à vertice in Triangulo:) Quod prodit, $BV \times \frac{1}{2}BV \times \frac{1}{3}BV = \frac{1}{6}BV^3$, exhibebit momentum Trianguli rectæ BV insistentis. Quod cum ubique fiat: Erit Ungulæ Semiquadrantis, super BVA insistentis, aciem habentis Aa, momentum respectu ipsius Aa; summæ Cuborum ordinatim-applicatarum Triens; Puta, $\frac{1}{3}Omn. o^3$. Quod perinde verum est, si pro Semisegmento BVA in vertice terminato, sumeretur BVCD, vel quævis alia Semicirculi portio, duabus ordinatim-applicatis interjecta. Quippe, & hic, $\frac{1}{3}Omn. o^3$ momentum Ungulæ similiter exhibebit.)

Sed & idem momentum jam modo repertum est, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. Hujus itaque Triplum, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, æquatur *Omnibus* o^3 ; hoc est, summæ cuborum ordinatim-applicatarum, quæ Semisegmentum circulare BVA, in vertice terminatum, complent.

(Si vero hæc ad summam Cuborum ordinatim-applicatarum in alia portione, puta BVCD, non ad verticem A terminatâ, accommodare liber; id fiet, ut aliis modis, sic hac saltem facili ratione; nempe, si, modo jam tradito, habeatur primum summa *omnium* o^3 quæ totum ADC Semisegmentum spectant; atque deinde summa *omnium* o^3 quæ spectant Semisegmentum ABV; atque demum hæc summa, ab illa subducatur; quod restat, erit *omnium* o^3 portionem BVCD spectantium summa.)

M m 2

Verum

Fig. 159,
160,

Verum potest & hoc idem Ungulæ semifegmento BVA insistentis aciem habentis A α , momentum respectu ipsius A α , sic adhuc aliter concipi. Nempe, si rectæ omnes ipsi AV parallelae, Semifegmentum BVA complentes, ducantur in quadrata distantiarum suarum respectu, à recta AV: (hoc est; propter æqualia quæ supponimus parallelarum illarum interstitia; in seriem secundariorum, ut 0, 1, 4, 9, &c. quorum maximum sit remotissimæ parallelarum distantia quadrata:) Nam rectarum quælibet in distantiam suam ducta, exhibet parallelogrammum eidem insistens in Semiquadrantali Ungula exposita; idemque iterum in eandem distantiam ductum, exhibet istius parallelogrammi momentum respectu Axis AV, seu A α . Adeoque simul omnia, istius parallelogrammi momentum.

Quæque de Ungula dicta sunt; solido ejusdem plani BVA conversione imperfecta descripto facile (ex præmonstratis) accommodari poterunt. Sed de his hæc tenus.

R. Progredimur ad imperfectum Sectorem, Sectoris plani BAA circa A α imperfecta conversione descriptum; Ungulamque huic correspondentem. Quantum scilicet, in his, Centrum gravitatis distat ab A α , conversionis Axe, seu plano per aciem Ungulæ perpendiculari.

Quæ Triangulo BVA insistit Semiquadrantalis Ungula aciem habens A α , Pyramis est; Cujus vertex α ; Basisque triangularis ipsi BV insistentis. Centrique gravitatis distantia ab A α , $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{2} s$. (Quod eodem modo ostendetur, atque in § Q. de Pyramide triangulo BVC incumbente.) Ejusque magnitudo (per § S. prop. præced.) $\frac{1}{6} s^3 h$. Adeoque momentum respectu A α , $\frac{1}{12} s^3 h = \frac{1}{6} s^3 R - \frac{1}{12} s^3 v$. Quod quidem additum momento Ungulæ Semifegmenti BVA (§ Q. invento) $\frac{1}{6} s R^3 + \frac{1}{6} s v R^2 - \frac{1}{12} s^3 R + \frac{1}{12} s^3 v$, exhibet Semiquadrantalis Ungulæ Sectori BAA insistentis, aciem habentis A α , momentum respectu ipsius A α , $\frac{1}{6} s R^3 + \frac{1}{6} s v R^2 + \frac{1}{12} s^3 R$.

Idemque sic habetur. Semiquadrantalis Ungula Trianguli BCA, aciem habens A α , est item Pyramis cujus vertex, α ; Basisque Triangularis (ipsi CB insistentis) Centrum gravitatis ab A α plano distat, $\frac{3}{4} BV = \frac{1}{2} s$; adeoque Centrum pyramidis inde distat, $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} s = \frac{1}{2} s$. Adeoque, propter magnitudinem $\frac{1}{6} s R$ (per § S. prop. præced.) Momentum $\frac{1}{12} s R$. Atque hoc Additum momento Ungulæ BCA, (§ P. invento,) $\frac{1}{6} s R^3 + \frac{1}{6} s v R^2$, exhibet momentum Ungulæ Semiquadrantalis Sectori BAA insistentis, aciem habentis A α , respectu ipsius.

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 269

ipſius $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Ut prius. (Hujusque duplum, Fig. 159, est Semisolidi correspondentis momentum.) 160.

Atque hoc Ungulæ momentum, per ipſius magnitudinem diviſum; hoc eſt, per $\frac{1}{2}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. præced.) exhibet hujus Ungulæ Sectori $B\alpha A$ inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, diſtantiã Centri gravitatis ab $A\alpha$ plano, $\frac{3eR^3 + 3svR^2 + 2s^3}{8vR + 4s^2}$. Adeoque Semisolidi correspondentis, diſtantiã Centri gravitatis ab $A\alpha$ converſionis axe, $\frac{3eR^3 + 3svR^2 + 2s^3}{2vRP + s^2P} R$: nempe ad illam Ungulæ, ut 4 R ad P .

Similiter oftenderur, Ungulæ Semiquadrantalſ Triangulo BAV inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, (quæ etiam Pyramis eſt,) Centrum gravitatis ab $A\alpha$ plano diſtare $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{6}s$; magnitudinem eſſe $\frac{1}{6}s^2v$, momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3v$. Atque hoc ex momento Ungulæ Semisegmenti BVA (§ Q. invento) ſublato; exhibet Semiquadrantalſ Ungulæ, Segmento ABA inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. S.

Vel etiam, Ungulæ Semiquadrantalſ Triangulo BAC inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, (quæ vel Pyramis, vel ſaltem duarum Pyramidum aggregatum vel differentia, quarum communis baſis triangula- ris ipſi BV inſiſtit,) Centrum gravitatis ſimiliter ab $A\alpha$ diſtare, $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{6}s$; magnitudinem, $\frac{1}{6}s^2R$; momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc ex momento Ungulæ Sectoris BAC (§ P. invento) $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2$, ſubductum; relinquit $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum, reſpectu $A\alpha$, Ungulæ aciem habentis $A\alpha$, ipſi ABA , ſegmento inſiſtentis. Ut prius. (Hujusque duplum $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$, momentum Semisolidi correspondentis.)

Illudque Ungulæ momentum, per ipſius magnitudinem diviſum, hoc eſt per $\frac{1}{6}v^2R = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$ (per § Q. prop. præced.) exhibet iſtius Ungulæ Segmento ABA inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, diſtantiã Centri gravitatis ab $A\alpha$ plano, $\frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3}{8vR - 4s^2} = \frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3}{4v^2}$. Semisolidi- que cõrrespondentis, Centri inde diſtantiã $\frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3}{2vRP - s^2P} R$.

Reſtat, ut ſimiliter expendamus Solida, imperfecti converſione circa $\tau\alpha$, TA , BV , deſcripta: Ungulæque cõrrespondentes: Eo- rum Momenta reſpectu $\tau\alpha$, TA , BV , reſpective, determinando; Centrique gravitatis inde diſtantiã. T. Intelligatur

Fig. 159, 160. Intelligatur itaque super AD a Semicirculo, Ungula Semicuadrantal, aciem habens τa . Cujus itaque singulis ordinatim-applicatis,

ut BV , totidem insistent Parallelogramma Rectangula, Ungulam complementia, quorum altitudines sint ipsis Va respectivis æquales; eorumque a TA distantia VA . Eritque propterea Rectangulorum horum cujusque momentum respectu TA , (oppositæ tangentis,) æquale factò ex Base BV , in altitudinem Va , & distantiam à vertice VA , continuè ductâ: Hoc est, $BV \times Va \times VA$. Est autem $aV \times VA = BVq$, (propter BV mediam proportionalem inter Diametri segmenta AV , aV .) Adeoque $BV \times aV \times VA = BVc$. Et sic ubique.

Idemque erit (eâdem de causâ) momentum, respectu τa , Ungulæ, aciem habentis TA . Quæ enim est, in alterâ, altitudo; est, in reliqua, Distantia: & vice versa.

Sunt itaq; Parallelogrammorum horum omnium (sive quæ Ungulam totam ipsi AaD insistentem; sive quæ ipsius portionem ipsi BVA , vel $BVCD$, insistentem complent; quippe utrobique eadem est ratio;) momenta respectu, TA , si acies sit τa , vel respectu τa , si acies sit TA , Summa cuborum ordinatim-applicatarum basin complementium. Puta, *omnium* o^3 , respectivè.

Et quidem in eâ quæ Semisegmento BVA insistit, (ad verticem A terminato,) *Omn.* o^3 , $= \frac{1}{4}eK^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{2}s^3v$, ut § Q. ostensum est. (Idemque, si opus fuerit ad aliam portionem, ut $BVCD$, facile accommodabitur; ut ibidem etiam ostensum est.)

Illud itaque momentum; si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi BVA Semisegmento insistentis, aciem habentis τa , $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$ (per § L. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis ab (oppositâ) TA , $\frac{9eR^3 + 9svR^2 - 6s^3R + 6s^3v}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}$

$= \frac{3}{4}R - \frac{6s^3R - 3s^3v}{6eR^2 + 6svR + 4s^3} = \frac{3}{4}R - \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$: Adeoque

ab ipsa τa , $\frac{1}{4}R + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; & à BV , $\frac{1}{4}R - h + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$.

Ungulæque propterea respectu ipsius BV , momentum $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{2}s^3v$: Ejusdemque respectu ipsius τa , aciei suæ, momentum, $\frac{1}{8}eK^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{2}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. Hujusque duplum $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{2}s^3v$ momentum semisolidi, semiconversione semisegmenti BVA circa τa , respectu ipsius τa axis conversionis: Atque hoc, per Semisolidi magnitudinem

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 271

nem divisum, exhibet $\frac{15eR^3 + 15svR^2 + 22s^3R - 6s^3v}{3eR^2P + 3svRP + 2s^3P} R = \frac{5R}{P} R$ Fig. 159, 160.

+ $\frac{12s^3R - 6s^3v}{3eR^2P + 3svRP + 2s^3P} R = \frac{5R}{P} R + \frac{6s^3h}{3eRP + 3svR^2P + 2s^3P} R$;
Semisolidi istius, distantiam Centri gravitatis à τa , (nempe ad
illam Ungulæ, ut $4R$, ad P .) Adeoque, à TA , $\frac{2P - 5R}{P} R$

$\frac{6s^3h}{3eR^2P + 3svRP + 2s^3P} R$, Semisolidique istius, respectu ipsius
 TA (axi oppositæ) momentum $\frac{1}{2}eR^2P + \frac{1}{2}svRP + \frac{1}{3}s^3P - \frac{1}{4}eR^3$
 $-\frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{2}s^3v$.

Idemque (quod prius) momentum $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$;
si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi BVA insistentis, aciem
habentis TA , $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.)
exhibet, hujus, Centri gravitatis distantiam ab (opposita) τa ,
 $\frac{9eR^3 + 9svR^2 - 6s^3R + 6s^3v}{12eR^2 + 12svR - 8s^3} = \frac{1}{4}R + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$: Atque à

RV , $\frac{1}{4}R - h + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3} = -\frac{1}{4}R + v + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$;

à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$: Ungulæque propterea, respectu
 BV , momentum $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$, & re-
spectu ipsius TA (aciei suæ) momentum $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$
 $-\frac{1}{12}s^3v$: Hujusque duplum, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{6}s^3v$, momentum
Semisolidi correspondentis. Hujusq; propterea Semisolidi distantia Centri

gravitatis à TA (axe suo) est $\frac{5R}{P} R - \frac{6s^3v}{3eR^2P + 3svRP + 2s^3P} R$; adeo-

que à τa , (axi oppositâ) $\frac{2P - 5R}{P} R + \frac{6s^3v}{3eR^2P + 3svRP + 2s^3P} R$; E-
jusque momentum respectu hujus τa , $\frac{1}{2}eR^2P + \frac{1}{2}svRP - \frac{1}{3}s^3P - \frac{1}{4}eR^3$
 $-\frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{2}s^3v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo ADa insistit Ungula, aciem
habens, sive τa , sive TA , momentum habet (propter $s=0$, &
 $e=a=\frac{1}{2}P$), respectu earum alterius, nempe aciei suæ, $\frac{1}{12}R^3P$; alte-
rius vero, quæ aciei opponitur, $\frac{1}{12}R^3P$; Adeoque Centri gravita-
tis distantiam inde, $\frac{1}{4}R$; hinc, $\frac{1}{4}R$. Et correspondentis Semisoli-
di conversione facti, momentum respectu axis, conversionis suæ,
 $\frac{1}{6}R^3P$; Centrique gravitatis inde distantia, erit $\frac{5R^2}{P}$. Unde habetur

eiusdem

Fig. 159, ejusdem ab altero extremo distantia, & momentum respectu istius.

V.

Deinde; ut hæc ad Axem BV, transferantur; (per § F. prop. 11. hujus:) Ex Ungulæ Semisegmenti BVA, aciem habente TA, momento respectu $\tau\alpha$, modo invento, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, si auferatur factum ex Ungulæ magnitudine $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{4}s^3$, in $\alpha V = h$ ductâ, hoc est, $\frac{1}{2}ehR^2 + \frac{1}{2}svhR - \frac{1}{4}s^3h = \frac{1}{2}ehR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3h$, (propter $hv = s^2$.) hoc est, $eR^3 - \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v = eR^3 - \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{4}s^3v$: Quod restat $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3vR^2$, est ejusdem Ungulæ BVA aciem habentis TA, momentum respectu BV; (quod § T. aliter ostensum est:) Ejusque

Centri gravitat. distan. à BV, $\frac{-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3vR^2 - \frac{1}{4}s^3v}{12eR^2 + 12svR - 8s^3}$

$= v - \frac{s^3R^2}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$. Idemque habetur, si ejusdem Centri

distantia à TA, auferatur ex $AV = v$, (aut ab ejus à $\tau\alpha$ distantia auferatur $h = 2R - v$;) ut habeatur illius à BV distantia; atque hæc à BV distantia ducatur in magnitudinem Ungulæ, ut habeatur momentum: (ut § T. factum est.) Et, utrovis modo, habebitur Semisolidi correspondentis momentum respectu ejusdem BV; Centri

que gravitatis inde distantia: Nempe, distantia, $\frac{3eR^2P + 3svRP - 2s^3P}{6s^3v}R - \frac{5R^2}{P} + v$; & momentum, $\frac{1}{4}fvRP - \frac{1}{4}s^3P - \frac{s^3vP}{6R} - \frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{8}s^3R + \frac{1}{8}s^3v$.

Ex Ungulæ vero Semisegmenti BVA, aciem habentis $\tau\alpha$; puta VvFA (fig. 141.) auferendum primò factum ex plano BVA in αV , puta Prisma VvaA, ut habeatur vaf, seu VAF, Ungulæ ejusdem basis aciem habens BV: Atque ex momento istius Ungulæ respectu ejusdem $\tau\alpha$ hoc est, ex $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$ (per § T.) auferendum illius Prismatis respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum; hoc est, plani BVA momentum, in Vv, seu $\alpha V = h$ ductum; hoc est (per § L. prop. præced.) $\frac{1}{2}ehR^2 + \frac{1}{2}svhR + \frac{1}{4}s^3h = eR^3 - \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; ut habeatur momentum Ungulæ BVAF (Semisegmenti BVA insistentis, aciem habentis BV,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. (Idem atque momentum respectu BV, aciem habentis $\tau\alpha$.) Atque ex hoc demum momento respectu $\tau\alpha$, auferendum quod fit ex ipsa Ungulæ BVAF

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 273

BVAE magnitudine, in $VA = h$; hoc est, (per § L. prop. præced. Fig. 159, 160.)

$$-\frac{1}{2}ehR^2 + \frac{1}{2}avhR - \frac{1}{6}s^3h = -eR^3 + \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{6}s^3R$$

$$+\frac{1}{6}s^3v: \text{ Et habebitur } \frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$$

$$\text{momentum Ungulæ BVAE (semisegmento BVA insistentis, aciem habentis BV,) respectu aciei suæ BV: Adeoque (per magnitudinem dividendo) distantia Centri gravitatis à BV,}$$

$$\frac{15eR^3 + 15svR^2 - 12as^2R + 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}; \text{ atque à } \tau\alpha,$$

$$\frac{-9eR^3 + 12avR^2 + 3svR^2 - 6s^3R + 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}. \text{ (Semisolidique cor-}$$

respondentis momentum, sive respectu $\tau\alpha$, sive BV, est duplum momentum Ungulæ: Ejusque Centri gravitatis, distantia sive à $\tau\alpha$, sive à BV, est ad distantiam Centri Ungulæ, ut 4R ad P.) Centriq; Ungulæ distantia à TA, $\frac{-15eR^3 + 12avR^2 - 3svR^2 - 2s^3R - 2s^3v}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}$; ejusque momentum respectu TA, $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque, respectu BV, momentum aciem habentis TA.) Similiter, si Semisolidi distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, auferatur ex AA=2R; habebitur ejusdem à TA distantia. Atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet ejusdem respectu TA momentum.

Porro, Triangulo BVA insistentis Ungula Semiquadrantalisi aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis; Cujus magnitudo $BV \times VA \times \frac{1}{3}VA = \frac{1}{3}sh^2 = \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{6}s^3v = \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR - \frac{1}{6}s^3$: Ejusque Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, distantia $\frac{1}{4}VA = \frac{1}{4}h$: Adeoque Ungulæ momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sh^3 = 2sR^3 - 3svR^2 + \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}sv^3 = 2sR^3 - svR^2 - s^3R + \frac{1}{4}s^3v$.

Atque hoc additum momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ejusdem $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) seu $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{6}sR^3 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; exhibet $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}sR^3 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, seu $\frac{1}{6}fR^3 + \frac{1}{6}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori BAA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$. (Hujusque duplum est momentum correspondentis Semisolidi, respectu ejusdem $\tau\alpha$.) Idemque per magnitudinem divisum; hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; (ut § M. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$

$$\frac{15eR^2 + 33sR^2 - 9svR - 2s^3}{12eR + 20sR - 4sv} = \frac{15fR^2 + 9shR - 2s^3}{12fR + 4sh}. \text{ Adeoque ejusdem}$$

Nn

dem

Fig. 159, dem Centri distantia à TA, $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + svR + 2s^3}{12aR + 20sR - 4sv} = \frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR + 4sh}$;

100.

& propterea ejusdem Ungulæ momentum respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. (Et correspondentis Semisolidi, distantia Centri gravitatis à τa , est ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad P ; ejusque residuum ad $2R$, est ejusdem distantia à TA; atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet semisolidi momentum respectu ipsius TA.)

Ejusdemque Triangulo BV α insistentis Ungulæ, Pyramidisve, Centrum gravitatis à TA, distat $2R - \frac{1}{4}h = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}v$: Adeoque ipsius respectu TA momentum (distantiâ in magnitudinem ductâ) $\frac{2}{3}sR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{2}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sR^3 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sh^2 - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}sh^2 + \frac{1}{3}s^3h$, propter $s^2 = hv$.

Atque hoc additum, momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem item habentis τa , $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 (= \frac{1}{8}eR^3) + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, (ut § V.) exhibet $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ seu $\frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis τa , respectu ipsius TA. ut prius.

Eidem verò Triangulo BV α insistens Ungula, aciem habens TA, constat ex Prismate eidem insistente cujus altitudo AV = v ; eique superjacente pyramide cujus basis Triangulum BV α (aut huic æquale,) altitudo, perpendicularis supra α punctum æqualis ipsi V α = h ; Adeoque (propter BV α = $\frac{1}{2}sh$) Pyramidis magnitudo $\frac{1}{6}sh^2 = \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{6}sv^2 = \frac{1}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR - \frac{1}{6}s^3$: Et, (propter Centri gravitatis basis BV α , à τa distantiam, $\frac{2}{3}h$; pyramidisque Centrum gravitatis in rectâ inde ad verticem ipsi α puncto supereminentem ductâ, abscissâ inde versus verticem, $\frac{1}{4}$ ipsius;) distantia Centri gravitatis pyramidis à τa plano, erit $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}h = \frac{1}{6}h$; & propterea pyramidis momentum respectu τa , $\frac{1}{12}sh^3 = \frac{1}{3}sR^3 - svR^2 + \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{12}s^3v^3 = \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. Prismatis verò, eidem BV α incumbentis magnitudo (propter basem BV α = $\frac{1}{2}sh$; & altitudinem VA = v) est $\frac{1}{2}shv = \frac{1}{2}s^3$: Ejusque Centri gravitatis à τa distantia (quippe eadem quæ basis Triangularis) $\frac{2}{3}h$; adeoque Prismatis respectu τa momentum $\frac{1}{3}sh^2 = \frac{1}{3}s^3h = \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{3}s^3v$. Atque hoc additum Pyramidis momento $\frac{1}{12}sh^3$; exhibet Ungulæ (ipsi BV α insistentis, aciem habentis TA,) momentam respectu τa , $\frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}sh^2 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h = \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{3}s^3v$. (Idem atque aciem habentis τa , momentum respectu TA.) Atque hoc additum, momento Ungulæ Semisegmento BV α insistentis, aciem item habentis TA, respectu τa , $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 (= \frac{1}{8}eR^3) + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; exhibet, Ungulæ Sectori B α A insistentis aciem

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 275

aciem habentis TA, momentum respectu τa , $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}vR^3 + \frac{1}{24}vR^3$ Fig. 159, $+\frac{1}{24}vR^3 = \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{24}vR^3$. (Idem planè atque Ungulæ 16c. aciem habentis τa momentum respectu TA: Quippe quæ illic est Altitudo, hic est Distantia; & vice versa.) Atque hoc momentum per Ungulæ mag. divisum, hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}vR^2 + \frac{1}{6}vR$ (ut § M. prop. præced.) exhibet $\frac{9aR^2 + 7sR^2 + svR + 2s^3}{12aR + 4sR + 4sv}$

$= \frac{9fR^2 - shR + 2s^3}{12fR - 4sh}$; distantiam Centri gravitatis (Ungulæ sectori B a A insistentis, aciem habentis TA,) à τa . Adeoque ejusdem Centri à TA distantia est $\frac{15aR^2 + sR^2 + 7svR - 2s^3}{12aR + 4sR + 4sv} = \frac{15fR^2 - 7shR - 2s^3}{12fR - 4sh}$; & Ungulæ respectu ipsius TA (aciei suæ) mo-

mentum $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}vR^3 + \frac{1}{24}vR^3 - \frac{1}{24}vR^3 = \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{24}vR^3$. (Quæ omnia correspondenti semisolido, facile accommodantur: eodem modo quæ in iis quæ aciem habent τa factum est.)

Vel etiam; propter Ungulæ Triangulo BVA insistentis (aciem habentis TA, ex Pyramide & Prismate constantis) magnitudinem (modo exhibitam) $\frac{1}{6}sh^2 + \frac{1}{2}shv = \frac{1}{3}R^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$; $= shR - \frac{1}{3}sh^2$; Momentum ejus respectu τa (modo ostensum) $\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, per magnitudinem illam dividendo; habebitur istius Centri gravitatis à τa distantia $\frac{8sR^3 - 4svR^2 + 4s^3R - 3s^3v}{8sR^2 - 4svR + 4s^3}$

$= R - \frac{3s^2v}{8R^2 - 4svR + 4s^3}$; & à TA, $R + \frac{3s^2v}{8R^2 - 4svR + 4s^3}$; (adeoque à DC, $\frac{3s^2v}{8R^2 - 4svR + 4s^3} = \frac{3v^2}{12R - 4h} = \frac{3v^2}{4R + 4v}$; & prop-

terea ejusdem respectu TA momentum, $\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$. Atque hoc additum Momento Ungulæ Semisegmento BVA insistentis (aciem item habentis TA) respectu ipsius TA, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}R^3 (= \frac{1}{8}R^3) + \frac{1}{24}vR^2 - \frac{1}{24}vR^2 - \frac{1}{24}vR^2$, (u. § T;) exhibet momentum Ungulæ sectori B a A insistentis, aciem habentis TA, respectu ipsius TA, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{24}vR^3 + \frac{1}{24}vR^3 - \frac{1}{24}vR^3$. ut prius.

Deinde; ex his momentis Ungularum sectori B a A insistentium, subducitis Ungularum Triangulo BCA insistentium momentis respectivis, habentur momenta Ungularum sectori BCA insistentium respectiva. Quæ autem Triangulo BCA insistit Ungula semiquadrantalís, aciem

X.

N n 2

Fig. 159,
160.

aciem habens τa , est Pyramis: Cujus vertex a ; Basis, Trapezium rectæ BC insistentis, duabus rectis plano circuli perpendicularibus & invicem parallelis interjectum; quarum altera, puncto C insistens, æqualis est rectæ $Cz = R$; altera, insistens puncto B , æqualis rectæ $Va = h$; quas itaque, in planum replicatas, repræsentent rectæ $C\alpha$, $B\alpha$. Quod quidem Trapezium, (quod Centrum gravitatis habeatur,) divisi intelligatur in duo Triangula αBC , αBa . Quæ (propter communem altitudinem αa seu $BV = s$;) sunt ut bases $C\alpha$, $B\alpha$; hoc est $C\alpha$, Va ; seu, R , h : Puta $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{2}h$. Distâtque illius Centrum gravitatis ab $A\alpha$ (rectâ planove) $\frac{1}{3}VB = \frac{1}{3}s$; hujus vero, $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$. Eruntque, propterea, eorum momenta respectu $A\alpha$, ut $\frac{1}{6}s^2R$, $\frac{1}{6}s^2h$. Adeoque momentum totum $\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2h$, per totam magnitudinem $\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}h$ divisum, exhibet totius Trapezii distantiam Centri gravitatis, quod puncto β designatum intelligatur (toto scilicet Trapezio, in rectam cui insistit, BC projecto,) ab $A\alpha$ $\frac{s^2R + 2s^2h}{3R + 3h} = \frac{R + 2h}{3} s = \beta\gamma$. Adeoque (propter similia Triangula BVC , $\beta\gamma C$;) ut $BV = s$, ad $VC = x$; sic $\beta\gamma$, ad $\gamma C = \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Et $\gamma\alpha = R + \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Sumptâque $ag = \frac{2}{3}\alpha\beta$, (ductâque, ut $\beta\gamma$, sic gC , ipsi τa , parallelâ,) erit $\alpha G = \frac{1}{3}\alpha\gamma = \frac{1}{3}R + \frac{R + 2h}{4R + 4h}x = \frac{1}{3}R + \frac{5R - 2v}{12R - 4v}x$, distantia Centri gravitatis pyramidis à (plano Tangente) τa . Hoc est (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; vel $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum; adeoque $\pm v = R - v$;) $\frac{1}{3}R + \frac{5R^2 - 7vR + 2v^2}{12R - 4v} = \frac{7R^2 - 5vR + v^2}{6R - 2v} = \frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$. Atque hæc distantia, in Pyramidis magnitudinem ducta, hoc est, (per § M. prop. præced.) in $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ exhibet Pyramidis illius respectu τa , momentum $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{12} sR = \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}s^3R$. Atque hoc demum momentum, subductum ex momento Ungulæ Sectori $B\alpha A$ insistentis, (aciem item habentis τa) respectu ipsius τa ; hoc est (ut § W.) ex $\frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}s^3R$; relinquit momentum Ungulæ Sectori $B\alpha A$ insistentis, aciem habentis τa , respectu ipsius τa , $\frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{8}svR^2$. (Semifolidique correspondentis momentum, hujus duplum.) Quod quidem Ungulæ (ipsi $B\alpha A$ insistentis momentum, per

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 277

per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}vR^2$ (ut § I. prop. præced.) divi- Fig. 159,
sum, exhibet ejusdem Centri gravitatis distantiam à τa , 160.

$$\frac{15aR - 19vR - 2sv}{12a + 8s}. \text{ (Adeoque Semifolidi correspondentis, Cen-}$$

tri gravitatis inde distantiam, $\frac{15aR - 19vR - 2sv}{3aP + sP}R$; utpote ad il-
lam Ungulæ, ut 4 R ad P. Et propterea distantia Centri gravita-
tis Ungulæ, à T A, $\frac{9aR - 2sR + sv}{12a + 8s}$; Ungulæque istius (Secto-
ri B C A insistentis, aciem habentis τa ,) momentum respectu T A,
 $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{8}vR^3 - \frac{1}{6}svR^2$. (Quod Semifolido facile accommodabi-
tur.)

Aut etiam, propter Pyramidis illius, Triangulo B C a incum-
bentis, magnitudinem $\frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis à τa
distantiam $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$, (ut dictum est,) adeoque à T A,

$$\frac{5R^2 - vR - s^2}{6R - 2v}; \text{ erit ejusdem, respectu T A, momentum } \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{24}s^3R.$$

Quod quidem momento Ungulæ sectori B a A
incumbentis (aciem habentis τa) respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3$
 $+ \frac{1}{24}vR^2 - \frac{1}{12}sR$, (ut § W.) sublatum; relinquit Ungulæ Secto-
ri B C A insistentis, aciem habentis τa , momentum respectu T A,
 $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}vR^3 - \frac{1}{6}svR^2$. Ut prius.

Quæ vero Triangulo illi B C a insitit Semiquadrantalisi Ungula
aciem habens T A, idem planè habet respectu τa momentum, quod
habet respectu T A ea quæ aciem habet τa , (propter altitudines &
Distantias ubique reciprocatas, ut pridem Aliquoties :) Hoc est,
(ut modo ostensum est) $\frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{6}svR - \frac{1}{24}s^3R$; quod per Ungu-
læ magnitudinem $\frac{1}{2}vR^2 + \frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) divisum;
exhibet sui Centri gravitatis distantiam à τa $\frac{5R^2 - vR - s^2}{6R - 2v}$; Adeo-

que, à T A, $\frac{7R^2 - 15vR - s^2}{6R - 2v}$; & propterea ejusdem respectu T A
(aciei suæ) momentum $\frac{1}{2}vR^3 + \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{24}s^3R$ (Solidique corre-
spondentis momentum est hujus duplum.) Quæ quidem Ungulæ
momenta, momentis respectivis Ungulæ sectori B a A insistentis,
aciem habentis T A, (hoc est, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}vR^2 - \frac{1}{12}sR$,
resp. τa , & resp. T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{12}sR$, ut § W.) sub-
lata; relinquunt Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis
T A,

Fig. 159, T A, momentum respectu τa , $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{5}aR^2 - \frac{1}{10}svR^2$ (idem nempe
160. quod Ungulae eidem B C A insistentis, aciem habentis τa , respectu
T A; propter altitudines & distantias ubique reciprocatas;) & re-
spectu (aciei suae) T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{10}svR^2$; (hujusque du-
plum, est momentum correspondentis Semifolidi, respectu sui axis
conversionis:) Ungulaeque hanc momenta, per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2$
 $-\frac{1}{2}svR^2$ (ut § I. prop. praeced.) divisa; exhibent ejusdem Centri
grav distant. à τa , $\frac{9aR - 3sv}{12a - 8s}$; & à T A, $\frac{15aR - 13sv}{12a - 8s}$;
(quae observatis observandis, Semifolidis accommodari facile poterunt.)

Eadem haberi poterunt, ope Trianguli BVC, & Ungularum
huic insistentium.

Quae autem huic insitit Ungula semiquadrantal, aciem habens
D C; est Pyramis: Cujus vertex C, altitudo CV = x , Basis (rectae
BV insitens) BV × CV = xx ; adeoque pyramidis magnitudo $\frac{1}{3}xx^2$;
Distantia Centri gravitatis à D C, $\frac{1}{4}x$; adeoque momentum Pyrami-
dis respectu D C, $\frac{1}{4}xx^3$.

Si verò ponatur Ungulae axis τa , sitque V supra Centrum; vel
acies T A, sitque V infra Centrum; Pyramidi huic subjungendum,
est Prisma, super eadem base, altitudinem habens C a, vel C A,
hoc est, R; cujus itaque (propter Trianguli magnitudinem $\frac{1}{2}xx$)
magnitudo erit $\frac{1}{2}xxR$; Centrique gravitatis à D C distantia (eadem
quippe quae Trianguli,) $\frac{1}{3}x$; adeoque momentum respectu D C,
 $\frac{1}{3}xx^2R$.

Totius itaque Ungulae ipsi BVC triangulo insistentis; aciem
habentis τa vel T A, tangentem remotiorem, ex Prismate & Py-
ramide conflata: momentum respectu D C, est, $\frac{1}{3}xx^2R + \frac{1}{4}xx^3$.

Atque hoc per Ungulae magnitudinem $\frac{1}{2}xxR + \frac{1}{3}xx^2$ divisum, ex-
hibet Centri gravitatis à D C distantiam $\frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; adeoque ab
Ungulae acie, seu tangente remotiore, (intellige, ut alibi, à per-
pendiculari plano huic insistente,) $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; à propiore,

$R - \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; Adeoque momentum respectu remotioris tangen-
tis (aciei suae) $\frac{1}{2}xxR^2 + \frac{1}{3}xx^2R + \frac{1}{4}xx^3$; & respectu tangentis pro-
pioris (quae aciei opposita est) $\frac{1}{2}xxR^2 - \frac{1}{4}xx^3$.

Si vero ponatur Ungulae acies τa , & V infra Centrum, vel acies
T A, & V supra Centrum, Prismati auferenda est illa Pyramis,
(ejusque

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 279

(eiusque momento momentum huius:) Adeoque Ungulæ magnitudo, Fig. 159, erit, $\frac{1}{2}xR - \frac{1}{3}x^2$; momentum respectu DC, $\frac{1}{3}x^2R - \frac{1}{4}x^3$; Cen-

trique gravitatis à DC distantia, $\frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; & ab Acie, seu

tangente propiore, $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; à remotiore (quæ aciei oppo-

sita est) $R + \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$: Et momentum respectu aciei (seu tan-
gentis propioris) $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{2}{3}x^2R + \frac{1}{4}x^3$; & respectu tangentis op-
positæ (remotioris) $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{1}{4}x^3$.

Hoc est: Ungulæ Triangulo BVC insistentis, aciem habentis
 τa , momentum respectu ipsius τa , est $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{2}{3}x^2R - \frac{1}{4}x^3$, (pro-
ut supra infrave Centrum fuerit V:) Et respectu TA, $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{1}{4}x^3$,
(sive supra sive infra Centrum fuerit V, propter altitudinum & di-
stantiarum reciprocactionem.) Centrique gravitatis à τa , distantia,
 $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; & à TA, $R + \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$.

Ungulæque eidem Triangulo BVC insistentis, aciem habentis
TA, momentum respectu τa (oppositæ) $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{1}{4}x^3$ (sive supra
Centrum, sive infra, fuerit V punctum,) & respectu Aciei suæ
TA, $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{2}{3}x^2R + \frac{1}{4}x^3$, (prout supra Centrum infrave fuerit
V punctum) Centrique gravitatis à τa (opposita) distantia,
 $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; à TA (acie) $R + \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$.

Atque hæc momenta, momentis Ungularum (respective sum-
ptarum) semisegmento BVA insistentium, Addita, vel Ablata,
prout supra infrave Centrum fuerit V punctum; exhibent momenta
respective Ungularum Sectori BCA insistentium.

Putæ; Ungulæ Semisegmenti BVA, aciem habentis τa , mo-
mento respectu τa , $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{2}{3}x^2R$ ($= \frac{1}{2}xR^2$) $- \frac{1}{3}xvR^2 + \frac{1}{4}x^3R$
 $- \frac{1}{4}x^3v$; (ut § T.) si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave
fuerit,) respectivum Ungulæ Trianguli BVC momentum, $\frac{1}{2}xR^2$
 $+ \frac{2}{3}x^2R - \frac{1}{4}x^3$; Hoc est, (propter $x = R - v$, supra Centrum,
addendum; & $x = -R - v$, infra Centrum, auferendum: adeo-
que $x^3 = R^3 - 3vR^2 + 3v^2R - v^3 = R^3 - vR^2 - 2v^2R + v^3$, adden-
dum; & $x^3 = -R^3 - 3vR^2 - 3v^2R - v^3 = -R^3 - vR^2 - 3v^2R - v^3$, auferendum;
quæ tantundem valent: Sed, $x^2 = R^2 - 2vR - v^2 = R^2$
 $- v^2$; sique vel $-v^2$ addendum, vel $-x^2$ auferendum, quod
tantundem valet:) Si addatur $\frac{1}{2}xR^2 - \frac{2}{3}x^2R - \frac{1}{4}x^3$ $- \frac{1}{4}x^3v$: Ha-

betur

Fig. 159, betur momentum Ungulæ sectori B C A insistentis, aciem habentis
160. τa , respectu τa , $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Aque ejusdem Ungulæ B V A (ciem habentis τa) momento respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}vR^3 (= \frac{1}{8}eR^3) + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}vR + \frac{1}{4}sv$ (ut § T.) si addatur vel auferatur (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{4}sv^3$; Hoc est, (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{8}vR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}sv^3R - \frac{1}{4}sv^3$: Habetur, Ungulæ sectori B C A insistentis aciem habentis τa , momentum respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}vR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Ungulæque aciem habentis T A, momentum respectu τa , idem est atque illud aciem habentis τa , respectu T A, propter altitudines & distantias ubique reciprocatas.

Ungulæ vero insistentis semisegmento illi B V A, aciem habentis T A, momentum respectu aciei suæ T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}vR^3 (= \frac{1}{8}eR^3) + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}sv^3R - \frac{1}{4}sv^3$; si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{4}sv^3$; Hoc est (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{8}vR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}sv^3R + \frac{1}{4}sv^3$: Habetur momentum Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}vR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Y. Denique: Ex momentis eisdem Ungularum Semisegmento B V A insistentium, si auferantur respectiva momenta insistentium Triangulo B A V, habentur momenta insistentium Segmento A B A.

Quæ autem Triangulo B A V insistit Semiquadrantalisi Ungula, aciem habens T A; est Pyramis. Cujus vertex A, basis B V x V A = sv; altitudo AV = v; adeoque magnitudo $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}sv^3$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{4}v$; adeoque à τa , $2R - \frac{1}{4}v$: Et propterea momentum respectu T A, $\frac{1}{4}sv^3 = svR^2 - \frac{1}{2}svR - \frac{1}{4}sv^3$; & respectu τa , $\frac{1}{3}sv^2R - \frac{1}{4}sv^3 = \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}sv^3R + \frac{1}{4}sv^3$.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, ($\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}sv^3R - \frac{1}{4}sv^3$, & $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}sv^3R + \frac{1}{4}sv^3$, per § T.) subducta; relinquunt, Ungulæ segmento A B A insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{4}sv^3R$; & respectu τa , $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}sv^3R$: Et (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{8}svR$, ut § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{15eR^2 - 9svR + 2sv^3}{12eR - 4sv}$;

$$\& \text{ à } \tau a, \frac{9eR^2 + svR - 2sv^3}{12eR - 4sv}.$$

Quæque

PROP. XVI. De Calculo Centri Gravitatis. 281

Quæque Triangulo B A V insistit semiquadrantal Ungula, aciem Fig. 159, habens τa , idem habet respectu T A momentum, quod habet ea 160. cujus acies T A respectu τa ; (propter altitudines & distantias reciprocatas:) hoc est, (ut modo) $\frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Adeoque (propter magnitudinem $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$, per § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 3s^2v}{4vR + 4s^2}$;

& à τa , $\frac{4vR^2 + 10s^2R - 3s^2v}{4vR + 4s^2}$; ideoque momentum respectu τa , $\frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = 2svR^2 - \frac{1}{3}sv^2R + \frac{1}{4}s^3v$.
Eaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis τa , ($\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$, ut § T.) subducta; relinquant Ungulæ Segmento A B A insistentis, aciem habentis τa , momentum respectu T A, $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{2}s^3vR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; & respectu τa , $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{2}s^3vR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; & (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; per § N. propositionis præced.) Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{9eR^2 + svR - 2s^3}{12eR + 4sv}$; & à τa , $\frac{15eR^2 + 7svR + 2s^3}{12eR + 4sv}$.

Eademque Segmento $a B a$ respectu rectæ τa , accommodantur; quæ Segmento A B A respectu T A; & vice versa. (Nempe, pro a , substituendo $a = \frac{1}{2}P - a$; & pro v , substituendo $h = 2R - v$.)

Putæ Segmento $a B a$ insistentis Semiquadrantal Ungula aciem habens τa , magnitudinem habet $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$: Momentum respectu τa , $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{8}shR^2 - \frac{1}{24}s^3R = \frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{24}s^3R$ respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{24}s^3R$.

Et Segmento $a B a$ insistentis Semiquadrantal Ungula aciem habens T A, magnitudinem habet $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$: Momentum respectu τa , $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{24}s^3R$; & respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{24}s^3R$.

Exhibuimus itaque, expositorum Sectorum Sphæricorum, & Segmentorum, Ungularumque eo spectantium, & correspondentium Solidorum seu Semisolidorum conversione factorum, tum magnitudines, tum momenta respectu Planorum aliquot expositorum; Z.
O o eorumque

Fig. 159, eorumque Centrorum gravitatis distantiam à duobus saltem planis
160. sibi invicem non parallelis; atque in quo tertio per Ungulæ aciem seu conversionis axem ducto, neu ri priorum parallelo, idem reperiatur: Adeoque (per prop. 26. Cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinavimus.

Quæque ad calcem Propositionis præcedentis monuimus; etiam hic moranda erunt: Næpe, hæc omnia aliis Sphæræ portionibus, simili methodo accommodari posse. Puta, quæ de Sectore $B\alpha A$ (ad verticem terminato) ejusque Ungulis, &c. dicta sunt; facile accommodari posse sectori $D\alpha B$ (duorum ad verticem terminatorum $D\alpha A$, $B\alpha A$, differentiæ,) ejusque Ungulis &c.

Et, prout hic quæ de Ungularum aut Solidorum magnitudinibus & momentis docentur, à recta $\tau\alpha$, ad TA vel BV , transferuntur; simili methodo, hæc aut his similia, à recta $A\alpha$, ad $T\tau$ vel $B\alpha$, transferri poterunt. Aliaque quæ hic traduntur, mille modis ampliari.

Quæque de Ungulis Semicirculi, ejusve portionibus; Sphæraque, & portionibus hujus; dicta sunt; ad Ungulas Semiellipseos, & portionum hujus; Sphæroides hujusque portiones; facile accommodantur. Næpe si intelligatur axium ellipseos alter $A\alpha$, alter $D\Delta$: manente $A\alpha=2R$, (adeoque $AV=v$, $V\alpha=h$;) erit $D\Delta$ in ea ratione ad $2R$, quâ est ad $A\alpha$; majore quidem si sit $D\Delta$ axium major, (adeoque Sphæroides conversione descriptum, Sphæroides latum;) minore, si sit $D\Delta$ axium minör, (adeoque Sphæroides longum, conversione descriptum;) & BV , in eadem ratione ad s . Adeoque, quoties BV in calculum venit, pro s , substituenda erit alia quantitas, quæ sit ad hanc, ut est $D\Delta$ ad $A\alpha$: &, pro s^2 , alia quæ sit ad hanc, ut in duplicatâ ratione rectæ $D\Delta$ ad $A\alpha$: & in reliquis potestatibus similiter, mutatis mutandis.

PROP.

PROP. XVII.

PARS PRIMA.

Figura Sinuum Versorum, ut $A\tau\alpha$; (quæ eadem est & A. Figura Arcuum:) Est Semicirculi correspondentis Fig. 169, Dupla; & partes, partium (respective sumptarum,) 170. Dupla; Puta, $b\beta a A = 2 B\alpha A$. Et sic ubique. Momenta verò illorum, ad momenta horum, respectu C. ejusdem $\tau\alpha$ tangentis, sunt ut 3 ad 2 seu *sesquialtera*.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in hac Sinuum Versorum Figura; quæ supra in Semicirculo (prop. 15.) determinantur. Nempe; (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus.)

Trilinei $A\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}RP$: Momentum respectu B. C. $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^2P$; respectu TA , $\frac{1}{8}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R$; à TA , $\frac{1}{4}R$: Momentum respectu G. $A\alpha$, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Portionis $b\beta a A$; Magnitudo, fR : Momentum respectu B. D. $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR$; respectu TA , $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}bR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{sb}{4f}$; à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{sb}{4f}$: Momentum respectu H. $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R + 4sR - vR^2$;

O o 2

re-

Fig. 169, respectu $b\beta$; $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{a^2 + 2as - 2vR}{2a + 2s}$; à $b\beta$, $\frac{a^2 + 2vR}{2a + 2s}$.

B. E. Portionis $A b K$; Magnitudo, eR ; Momentum respectu TA , $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Distantia Centri gravitatis, à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{s}{4e}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R$

H. $-\frac{sv}{4e}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; respectu $\beta b K$, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{a^2 - 2as + 2vR}{2a - 2s}$; à $\beta b K$, $\frac{a^2 - 2vR}{2a - 2s}$.

B. E. Portionis $b\beta\tau$; Magnitudo, $\alpha R - sR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; respectu TA , $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

H. $\frac{1}{4}R - \frac{sh}{4\alpha - 4s}$; à TA , $\frac{1}{4}R + \frac{sh}{4\alpha - 4s}$; Momentum respectu τT , $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$ respectu βb , $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$; Distantia Centri gravitatis à τT , $\frac{a^2 - 2\alpha s + 2hR}{2\alpha - 2s}$; à βb , $\frac{a^2 - 2hR}{2\alpha - 2s}$.

B. F. Parallelogrammi $bB\alpha\beta$; magnitudo, $ab = 2aR - av$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à TA , $2R - \frac{1}{2}b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$; respectu TA , $2abR - \frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$. Distantia Centri gravitatis ab

I. $A\alpha$, seu $b\beta$, $\frac{1}{2}a$; momentum respectu $A\alpha$, vel $b\beta$, $\frac{1}{2}a^2h$.

B. F. Portionis bBA , Magnitudo $fR - ab = -eR + av$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$; respectu TA , $-\frac{1}{4}eR^2 + vR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR - 4av}$; à TA ,

$\frac{1}{4}R + \frac{fvR - 2as^2}{-4eR - 4av}$; à bB , $v - \frac{1}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR - 4av}$; Momentum

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 285

mentum respectu b B, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; Momen- I.
tum respectu A α , $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; re- Fig. 169,
spectu b β , $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; Distantia Centri gra- 170.
vitatatis ab A α , $\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{-2eR + 2av} R$; à b β , $\frac{1}{2}a +$
 $\frac{2vR - as}{-2eR + 2av} R$.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Ver-
forum, arcuumve, ejusque partium expositarum mag-
nitudines, & momenta respectu rectarum aliquot ex-
positarum, eorumque Centrorum gravitatis ab illis rectis
distantias; adeoque & ipsa Centra gravitatis, per
eorundem à duabus saltem in eodem plano non paralle-
lis rectis, determinavimus.

Atque hinc Ungularum, & Solidorum conversione facto K.L.R.
rum, horumve Semisolidorum, momentis jam traditis
correspondentium, magnitudines habentur. Horum-
que omnium rationes, ad his correspondentia Semi-
circulum ejusve portiones spectantia. Quæ & ad alia
facile poterunt ampliari.

PARS SECUNDA.

Atque his Analoga, in Figura Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$, M.
similiter determinantur. Nempe, Fig. 170.
Bilinei $\alpha\tau\kappa$, magnitudo, $2R^2$; momentum respectu $\tau\alpha$,
 $\frac{1}{3}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}P$; à T τ vel
A α , $\frac{1}{4}P$; momentum respectu T τ , vel A α , $\frac{1}{2}R^2P$.
Trilinei $\alpha\delta\kappa$; magnitudo, R^2 ; Momentum respectu $\tau\alpha$, N.Q.
 $\frac{1}{6}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}P$; Mo-
mentum respectu A α , R^3 ; respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$; P.Q.
Distantia Centri gravitatis ab A α , R , à $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}P - R$.
Portionis $\alpha\beta\upsilon$, magnitudo vR ; Momentum respectu O.Q.
 $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$; Distantia Centri gravitatis ab $\tau\alpha$,
 eR .

P, Q, $\frac{eR + \beta v}{4v}$: Momentum respectu $A\alpha$, $-eR^2 + \beta v R$; re-
 Fig. 169, spectu βv , eR^2 ; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
 170. $\frac{-eR + \beta v}{v}$; à βv , $\frac{eR}{v}$.

R. Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Recto-
 rum, ejusque partium expositarum, magnitudines,
 & momenta respectu rectarum aliquot expositarum;
 eorumque Centrorum gravitatis distantias ab illis rectis:
 Adeoque & ipsa gravitatis Centra, per suas à duabus
 saltem in eodem plano rectis non sibi mutuo parallelis
 distantias, determinavimus.

Atque huic de Ungulis; Solidisve conversione factis,
 eorumve Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent,
 calculo debite adhibito, judicium fiet.

Quæque de portionibus hic expositis dicta sunt, possunt
 & aliis portionibus facile accommodari; aliâve multis
 modis ampliari.

Eademque (horum ope) ad alterâ figuræ Sinuum recto-
 rum unius quadrantis Complementum facile transfe-
 retur.

S. Quæ autem de his Sinuum Versorum, Rectorumve, Fi-
 guris dicta sunt: ad easdem Protractas, vel Contractas,
 facile accommodantur.

T. Quæque de Figura Sinuum Rectorum unius quadrantis
 traduntur, eadem ad figuram Subtensarum sive Chor-
 darum Semicirculi, similiter transferentur. Quod &
 de Solidis inde oriundis etiam intelligendum erit.

A. **I**ntelligatur Circuli $A\alpha$, (Fig. 169.) Semiperipheria $AD\alpha$,
 Fig. 169, in partes quolibet æquales dividi, in punctis X, Z, D, E, &c. unde
 170. ducantur XO , ZV , DC , $E\Sigma$, &c. Sinus Recti arcuum arith-
 metice proportionalium, AX , AZ , AD , AE &c, quorum Si-
 nus Versi AO , AV , AC , &c. adeoque arcuum residuorum ad Semi-
 circulum

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 287

circulum Sinus versi (seu punctorum X, Z, D, &c. altitudines supra τa , tangentem,) $O a$, $V a$, $C a$, &c. Fig. 169, 170.

Eique Semiperipheriæ in rectam expansæ, æqualis ponatur (Fig. 170.) $A T$, seu τa , similiter divisa, in punctis ξ , ζ , δ , ϵ , &c. quibus insistant ex una parte,) ξo , ζv , δx , &c. ipsis $X O$, $Z V$, $D C$, &c. (Fig. 160.) æquales; figuram Sinuum Rectorum $\pi n \tau$ (si numero infinitæ intelligantur) complentes, (juxta def. 1. Cap. 4.) & (ex parte contraria) ipsis $O a$, $V a$, $C a$, &c. æquales rectæ $x \xi$, $z \zeta$, $d \delta$, &c. similiter complentes $A \tau a$ figuram Sinuum versorum; ipsi $A a$ circulo æquealtam.

Quæ quidem $A \tau a$ *Figura Sinuum versorum*, sumptis arcibus arithmetice proportionalibus; est etiam, alia consideratione, *Figura Arcuum*, sumptis nempe Sinibus Versis arithmetice proportionalibus. Sumptis utique $A V$, $A C$, $A \Sigma$, &c. Sinibus versis arithmetice proportionalibus; (divisa sc. recta $A a$ in partes quotlibet æquales) quæ ipsis occurrant rectæ $Z V$, $d C$, $e \Sigma$, &c. æqualibus intervallis diffitæ figuram $A \tau a$ complentes; hoc est, $a \xi$, $a \delta$, $a \epsilon$, &c. æquantur arcibus correspondentibus, $A Z$, $A D$, $A F$, &c. & sic ubique.

Ductis jam in Semicirculo rectis $X a$, $Z a$, $D a$, &c. dirimi intelligatur Semicirculus in totidem Sectores $A a X$, $X a Z$, $Z a D$, &c. quorum arcus $A X$, $X Z$, $Z D$, &c. sint æquales; adeoque sectorum $X a A$, $Z a A$, $D a A$, &c. arcus $X A$, $Z A$, $D A$, &c. arithmetice proportionales.

Quibus quidem arcuum æqualium Sectoribus $A a X$, $X a Z$, $Z a D$, &c. respondeant, in figurâ Sinuum versorum, quadrilatera $A a \xi x$, $X \xi \zeta z$, $z \zeta \delta d$, &c. basium $a \xi$, $\xi \zeta$, $\zeta \delta$, &c. æqualium, tum inter se, tum ipsis $A X$, $X Z$, $Z D$, &c. arcibus; (propter rectam τa , Semiperipheriæ $A D a$, æqualem, & similiter divisam.) Adeoque arcuum arithmetice proportionalium Sectoribus, $X a A$, $Z a A$, $D a A$, &c. similiter respondebunt quadrilinea $x \xi a A$, $z \zeta a A$, $d \delta a A$, basium arithmetice proportionalium $a \xi$, $a \zeta$, $a \delta$, &c.

Suntque hæc Quadrilinea, Sectorum illorum, (Singula singulorum respectivè sumptorum,) dupla. Quod sic ostenditur.

Intelligatur vel tota $A D a$ Semiperipheria, vel ipsius arcus $A B$, in partes æquales numero infinitas dirimi; adeoque (ductis à divisionum punctis ad a rectis $X a$, $Z a$, &c.) vel totus $A D a$ Semicirculus, vel ipsius Sector $B a A$, in totidem Sectores dirimi. Ductisque, à divisionum punctis, rectis $X D$, $Z P$, &c. tangenti τa parallelis, intelligatur Sectori Inscripti figura ex totidem Triangulis, $O X a$, $P Z a$, &c. Ductisque porro eidem tangenti parallelis, $A Q$, $X I$, &c. (productisque $a X$, $a Z$, &c.) similiter intelligatur Sectori Circumscribi figura ex Triangulis $A Q a$, $X I a$, &c.

Et

Fig. 169, Et similiter Figuræ Sinuum versorum $A\tau a$, vel tota, vel ipsius
170. portio $b\beta a A$, (Sectori $B a A$ correspondens) in totidem Quadrili-
nea, basium æqualium, (Sectoribus correspondentia) distribui;
(rectâ scilicet $a\tau$, vel $a\beta$ similiter divisâ, prout dividitur $AD a$,
vel AB , arcus; ductisque rectis correspondentibus, ξx , ζz , &c.)
Ductisque $x O$, $z p$, &c. ipsi τa parallelis; inscribi intelligatur Fi-
gura ex Parallelogrammis $O x \xi a$, $p z \zeta a$, &c. (Triangulis $O X a$,
 $P Z a$, &c. correspondentibus.) Ductisque eidem τa parallelis $A q$,
 $x i$, &c. (productisque ξx , ζz , &c.) Circumscribi intelligatur Fi-
gura ex Parallelogrammis $A q \xi a$, $x i \zeta a$, &c. (Triangulis $A Q a$,
 $X I a$, &c. correspondentibus.)

Suntque hæc Parallelogramma Triangulis illis, (propter rectas
 $A a$, $x \xi$, $z \zeta$, &c. ipsis $A a$, $O a$, $V a$, &c. ex constructione æquales,)
singula singulis respectu sumptis, æqualia: Tum quæ Circumscrip-
tas, tum quæ Inscriptas figuras complent.

Sunt autem Inscriptorum Parallelogrammorum Bases, basibus
Triangulorum inscriptorum correspondentium, ubique majores; &
propter Parallelogramma Triangulorum, (singula singulorum respec-
tive, adeoque & omnia omnium,) plusquam dupla. Est utique
Parallelogrammi $O x \xi a$, basis $x o$, seu ξa recta, hoc est (utpote ipsi æ-
qualis ex constructione) arcus $X A$, major sinu suo $X o$ (base Trianguli
correspondentis;) ut patet. In reliquis autem; ut $p z \zeta a$; Paralle-
logrammi basis $z p$, seu ζa , recta; (æquali, arcui $Z X$, ex constructi-
one,) est major quam $Z X$ chorda: sed & hæc major est, quam $Z P$,
basis triangulis correspondentis $P Z a$; propter angulum $Z P X$
(Trianguli $P Z X$) illi oppositum majorem angulo huic opposito
 $Z X P$. Est enim angulus $Z P X$, vel huic æqualis $P X O$, hoc est,
 $a X O$, angulus in Peripheriâ arcum subtendens (in opposito Semi-
circulo) æqualem arcui $X a$; & angulus $Z X P$, hoc est, $Z X a$,
angulus item in Peripheriâ, subtendens arcum $z a$, (arcu $X a$ mino-
rem;) est igitur angulus $P X O$, hoc est angulus $Z P X$, major angulo
 $Z X P$; adeoque $Z X$ recta, major rectâ $Z P$; & multo magis $Z X$
Curva, seu huic æqualis ζa seu $z p$ basis parallelogrammi, major
erit quam eadem $Z P$ basis Trianguli: adeoque parallelogrammum
Trianguli plusquam Duplum. Et sic ubique. Itaque Figura ex Pa-
rallelogrammis, sive toti Figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni
 $A z \zeta a$ inscripta plusquam dupla Figuræ ex Triangulis inscriptæ sive
toti Semicirculo, sive Sectori $B a A$.

Sed Circumscriptorum Parallelogrammorum bases, Basibus Tri-
angulorum circumscriptorum correspondentibus, minores sunt. Est
enim

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 289

enim Parallelogrammi $Aq\xi a$, basis Aq seu ξa , hoc est arcus XA , Fig. 169, minor Tangente QA ; (cujus semissis, est tangens semicircus, 170. secanti ex Centro ductæ occurrens: adeoque semiarco illo major.) In reliquis verò, ut $xiz\xi$; Basis Parallelogrammi xi , seu $\xi\xi$; hoc est arcus ZX , minor est quam recta XI , basis Trianguli correspondentis. Ductâ enim tangente $Z\chi$, (quæ rectæ XI occurrat in χ .) æquales erunt anguli (propter eundem arcum ZA interceptum) χZA , & ZaA (angulus in peripheria) seu IaO : adeoque & horum ad rectum residui χZI & χIZ seu $O Ia$; (est utique, propter AZa angulum in semicirculo, etiam AZI , hoc est $\chi ZA + \chi ZI$, rectus; & propter IOa triangulum rectangulum, ad O , duo reliqui anguli $O Ia - IaO$ rectum æquant.) Et propterea æquales sunt $Z\chi$ & $I\chi$ rectæ; & (sumpta communi χX), recta IX , hoc est $I\chi + \chi X$, æqualis duabus simul $Z\chi + \chi X$; adeoque major arcu ZX . Est itaque ZX arcus, hoc est recta $\zeta\xi$, seu ix , basis Parallelogrammi, minor quam IX basis Trianguli correspondentis: Et propterea Parallelogrammum Trianguli minus quam Duplum. Et sic ubique. Est itaque, Figura ex parallelogrammis, sive toti $A\tau a$ figuræ Sinuum verforum, sive ipsius portioni $b\beta aA$, circumscripta, minor quam Dupla Figuræ ex Triangulis correspondentis, sive toti Semicirculo, sive ejusdem Sectori BaA circumscriptæ.

Cum itaque Figura ex Parallelogrammis inscripta, sit inscriptæ ex Triangulis major quam dupla; & circumscripta circumscriptæ minor quam dupla: Cumque, multiplicatis sectionibus, inscriptæ & circumscriptæ differentia continuè decreascet utrobique, donec tandem datâ quâvis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta inscriptæ minor quam dupla, nec Circumscripcta circumscriptæ major quam dupla esse possit: Continuatâ in infinitum sectione, evanescet differentia; inscriptis simul & circumscriptis coincidentibus; illic, cum Figura $A\tau a$, ejusve Quadrilineo $b\beta aA$; hic, cum Semicirculo ADa , ejusve Sectori BaA : Eritque illa Sinuum verforum Figura $A\tau a$, ejusve Portio $b\beta aA$, Dupla semicirculi ADa , ejusve Sectoris BaA . Quod erat probandum.

Hoc est; Trilineum $A\tau a$, duplum semicirculi ADa ; ejusque portio $b\beta aA$, dupla Sectoris BaA ; Et, propterea, portio reliqua $b\beta r$, segmenti $aB a$, dupla erit. Item, $d\delta x$, dupla Sectoris correspondentis $D aX$; & sic ubique.

Est autem, (retentis symbolis, ut in propositionibus duabus proximè præcedentibus,) Semicirculus $ADa = \frac{1}{4} P R$; ergo, Figura Sinuum

B.

Pp

Fig. 169
170.

Sinum versorum seu Trilineum $A\tau\alpha = \frac{1}{2}PR$. Item Sector $B\alpha A = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, (per § H. prop. 15.) Ergo, (posita $a\beta = BA = a$; adeoque $\beta B = \alpha V = b$; & $bK = VA = v$;) portio $b\beta\alpha A$ (utpote Sectoris dupla) $aR + sR = fR$. Item, Segmentum $ABA = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$ (per § G. prop. 15.) Ergo $AbK = aR - sR = eR$. (Est utique AzK : simile, & similiter positum ad TA , ut re ad $\tau\alpha$: sicut &, in Semicirculo, Segmentum AZA ad TA , ut αE ad $\tau\alpha$: & sic alibi.) Et similiter Segmentum $\alpha B\alpha = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}fK$: Ergo portio $b\beta\tau = aR - sR = \frac{1}{2}PR - aR - sR = \frac{1}{2}PR - fR$. Et sic alibi.

Et consequenter, si ex $b\beta\alpha A$ portione, auferatur Parallelogrammum $\beta b B\alpha = ab = 2aR - av$; erit Segmentum residuum $AbB = fR - ab = aR - sR - av = eR - av$. Et speciatim in segmento AdC , (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$;) R^2 .

Item Quadrilineum $zkCA = z\zeta\alpha A - k\zeta\alpha C$ (propter $z\zeta\alpha A = aR - sR$, & $k\zeta\alpha C = aR$) est sR . Et $zkd = R^2 - sR$; Nempe, (propter $R - s$, differentiam Radii & Sinus recti arcus ZA , æqualem sinui verso arcus ZD ;) factum ex sinu verso arcus DZ in Radium ducto. (Dico autem $zkCA$; potius quam $bkcA$, ut distinguam punctum b supra Centrum, ab illo infra Centrum. Quamquam & alteri etiam b , re rite intellectâ, idem accommodabitur: Nempe, si $d k b$ infra Centrum hoc est $d k e$, exponatur negative, utpote ad contrarias partes rectæ Cdc & extra figuram $A\tau\alpha$: Quippe sic, utrovis situ, erit $b\beta\alpha A - k\beta\alpha C = bkcA$; id quod rectis $b k$, $k C$, CA , & curvâ Ab , comprehenditur; nempe, utrobique, $AdC - d k b$, sensu positivo.)

Et similiter de aliis portionibus utcumque rectâ abscissis, mutatis mutandis, fiet iudicium.

Potestque Trilinei AbB seu AbV fig. 170. (quod utique complent rectæ bV æquales arcibus $BA = a$, quorum Sinus versi $AV = v$ sint arithmetice proportionales) magnitudo, sic aliâs (ex arcuum ad sinus versos ratione) explicari.

Ductis enim (ut fig. 186.) BgT Semicirculum tangentibus; Fig. 186. (Tangenti verticis TA in T occurrentibus;) divisaque Aa diametro in partes æquales infinite exiguas, quarum una intelligatur $Vo = B$; (adeoque sumptis $AV = v$, arithmetice proportionalibus;) ductaque recta oXg (rectæ BV parallelâ) quæ semicirculo in X occurrat, & tangenti proximâ BT in g : Erit ubique (per § A. propositionis 13.) ut $BV = s$, ad R ; sic $Vo = B$, ad $Bg = \frac{BR}{B}$

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 291

$\frac{BR}{s}$. (Nempe, ut *Secantes complementi*, Sinibus rectis reciproce proportionales.) Et, consequenter; si intelligantur αO , vel VO , rectangulum $A\alpha OO$ complentes, singulis Vo (rectam $A\alpha$ complentibus) æquales; & sumantur ubique, ut $BV = s$, ad R ; sic VO , ad $V\omega$: erunt singulæ $V\omega$, (hoc est totidem $\frac{BR}{s}$, sumptis v arithmetice proportionalibus,) singulis Bg tangentibus (respective sumptis,) hoc est, (in partibus infinite exiguis,) ipsis BX arcibus (totum BA complentibus) æquales. Adeoque, ut *Omnes* $\frac{BR}{s}$, seu rectæ $V\omega$, complentes $AV\omega\omega$ figuram interminabilem, ad totidem B , complentes $AVOO$ rectangulum; (seu ut Figura illa, ad hoc rectangulum;) sic *omnes* BX arcum BA complentes, ad totidem V o complentes rectam VA ; seu Arcus AB , ad ejusdem sinuum versum AV .

Cumque hoc ubique obtineat; erunt, *Omnes* AB arcus (superficalem Ungulam Semiquadrantalem BA , cujus acies BV , complentes,) vel (his æquales) rectæ bV trilineum AbV complentes; ad *omnes* AV respectivos sinus versos arithmetice proportionales vel AV Semiquadrantalem Ungulam aciem habentem V , hoc est, ad Semiquadratum AV ; ut sunt *omnes* $AV\omega\omega$ figuræ interminabiles correspondentes, hoc est, Ungula $AV\omega\omega$ aciem habens $V\omega$; ad *omnes* $AVOO$, hoc est, Ungulam $AVOO$ aciem habentem VO .

(Et, eadem ratione; Momentum superficialis istius Ungulæ, arcui BA insistentis, ad momentum istius superficialis Ungulæ seu Semiquadrati AV , respectu ejusdem bVB ; ut ejusdem Ungulæ solidæ $AV\omega\omega$ momentum, ad momentum correspondentis Ungulæ Solidæ $AVOO$, respectu aciei $V\omega$. Et similiter ejusmodi aliarum solidorum portiones huc spectantium, facile exhibentur.)

Verum, cum præcedens illa figuræ $A\tau\alpha$ consideratio; sit calculo magis accommodata, quam hæc figuræ interminabilis, (*Secantium complementi*, sinibus versis arithmetice proportionalibus convenientium:) priorem potius prosequemur. Atque inde, si opus fuerit, interminabilis hujus figuræ dimensio, reliquæque quæ eo spectant, deduci poterunt. Quod hic sufficiat innuisse.

Porro; Si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. Cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus constitutis ut $A\alpha X$, $X\alpha Z$, &c. vel etiam

C.

Fig. 169, etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet,) ex infinitis numero Triangulis, figuram inscriptam complementibus, ut OaX , PaZ , &c. live, ex totidem Triangulis figuram circumscriptam complementibus, ut QaA , IaX , &c. aut etiam figuram inscriptam & circumscriptam intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) complementibus, ut YaP , &c. (quæ rectis aX , aZ , &c. ut illorum axibus represententur:) Intelligenda erit similiter Figura Sinuum versorum $A\tau a$, ex totidem constitui correspondentibus Quadrilineis ut $Aa\xi x$, $x\xi z$, &c. Sectorum illorum duplis; vel etiam (quod eodem recidit, sectione in infinitum continuatâ,) ex totidem Parallelogrammis, figuram inscriptam complementibus, ut $Xx\xi a$, $pz\xi\xi$, &c. aut circumscriptam complementibus, ut $Aq\xi a$, $xi\xi\xi$, &c. aut quæ figuram partim inscriptam partim circumscriptam complent, qualia $py\xi\xi$, &c. (quæ rectis $x\xi$, $z\xi$, &c. ut eorum axibus represententur; quæ triangulorum æquealorum aX , aZ , &c. dupla intelligantur.)

Est autem Distantia Centri gravitatis in Parallelogrammis ξx , ξz , &c. ad Distantiam Centri gravitatis in Triangulis æquealtis, aX , aZ , &c. (à recta τa ;) ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$; seu, ut 3 ad 4, (per prop. 6. hujus.) Adeoque (propter magnitudines ut 2 ad 1;) Erunt momenta Parallelogrammorum (tum singulorum, tum simul omnium,) ad Triangulorum respectivorum momenta, (tum singulorum, tum simul omnium;) ut 3 ad 2, (propter $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;) Adeoque Momentum Trilinei $A\tau a$, ad momentum Semicirculi ADa ; ejusque portionis, (ut $Ab\beta a$, seu $x\xi\delta d$, seu $b\beta\tau$;) momentum, ad momentum sectoris correspondentis, (ut BaA , seu XaD , seu segmenti aBa ;) respectu rectæ τa ; ut 3 ad 2.

Est autem Semicirculi ADa respectu τa momentum (propter magnitudinem $\frac{1}{4}PR$, & Centri gravitatis distantiam, R ;) $\frac{1}{4}R^2P$; ergo Trilinei $A\tau a$, respectu τa , momentum, (utpote ad illud Semicirculi, ut 3 ad 2,) $\frac{1}{2}R^2P$. (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}b^2$, seu $\frac{1}{2}v^2$ totius semicirculi, seu semisumma quadratorum sinuum versorum totius semicirculi, sumptis arcibus arithmetice proportionalibus.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}PR$;) distantia Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{4}R$; ideoque à TA , $\frac{1}{4}R$; ejusque momentum respectu TA , $\frac{1}{8}R^2P$.

Ergo & Semicircularis Ungula eidem insistenti, aciem habens τa , $\frac{1}{8}R^2P$; & aciem habens TA , $\frac{1}{8}R^2P$: Solidumque ejusdem conversione circa τa factum, $\frac{1}{8}RP^2$; & Semisolidum $\frac{1}{16}RP^2$; & circa TA , Solidum $\frac{1}{8}RP^2$; & Semisolidum $\frac{1}{16}RP^2$.

Item;

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 293

Item, Sectoris B α A momentum respectu $\tau\alpha$ (per § M. prop. D. 15.) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sK^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fK^2 + \frac{1}{6}hR$: Ergo, Portionis b β α A, Fig. 169, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aK^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}fK^2 + \frac{1}{4}hR$; 170. (idemque est Ungula Semiquadrantis, portioni b β α A inscripta, aciem habens $\tau\alpha$.) Adeoque (propter magnitudinem, $aR + sR = fR$), distantia Centri gravitatis portionis b β α A, à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{sR}{4f}$; & à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{sR}{4f}$; & propterea ejusdem respectu TA, momentum (seu Semiquadrantis Ungula,) $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sK^2 + \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}fK^2 - \frac{1}{4}hR$. Et consequenter, Solidum, portionis b β α A conversione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{1}{4}fRP + \frac{1}{4}hP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}fRP + \frac{1}{8}hP$; & circa TA, Solidum $\frac{1}{4}fRP - \frac{1}{4}hP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}fRP - \frac{1}{8}hP$.

Item; Segmenti ABA, momentum respectu TA, (per § N. prop. 15.) est $\frac{1}{2}aK^2 - \frac{1}{2}sK^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}eK^2 - \frac{1}{6}svR$; ergo, Trilinei AbK momentum respectu TA (vel semiquadrantis Ungula aciem habens TA,) est $\frac{1}{4}eK^2 - \frac{1}{4}svR$: (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}v^2$; seu semisumma quadratorum sinuum versorum arcuum arithmetice proportionalium, ab A, usque ad AB.) Adeoque (propter magnitudinem eK) distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{sv}{4e}$; ideoque à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{sv}{4e}$; ejusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{1}{4}eK^2 + \frac{1}{4}svR$: Et consequenter, Solidum ejusdem conversione factum circa TA, $\frac{1}{4}eRP - \frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}eRP - \frac{1}{8}svP$; & circa $\tau\alpha$, Solidum, $\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{8}svP$.

Similiter; Segmenti $\alpha B\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aK^2 - \frac{1}{2}sK^2 - \frac{1}{6}hR = \frac{1}{4}K^2 - \frac{1}{2}aK^2 - \frac{1}{6}hR + \frac{1}{6}svR$: Ergo, Trilinei b β τ , momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}hR = \frac{1}{8}R^2 - \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem $aR - sR$) distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{sb}{4a - 4s}$; ideoque à TA, $\frac{1}{4}R + \frac{sb}{4a - 4s}$; ejusque respectu TA momentum (vel correspondens Ungula) $\frac{1}{4}aK^2 - \frac{1}{4}sK^2 + \frac{1}{4}hR$. Et, consequenter, Solidum ejusdem circa $\tau\alpha$ conversione factum, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP - \frac{1}{4}hP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}aRP - \frac{1}{8}sRP - \frac{1}{8}hP$: Et, circa TA, Solidum $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP + \frac{1}{4}hP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}aRP - \frac{1}{8}sRP + \frac{1}{8}hP$.

Si vero ex momento Quadrilinei b β α A, respectu $\tau\alpha$, vel TA, auferatur

E.

F.

Fig. 169, auferatur momentum Parallelogrammi $\beta b B \alpha$; habebitur (respectu earundem $\tau \alpha$, T A,) momentum Segmenti A b B.

Est autem Parallelogrammi $\beta b B \alpha$ (propter $\beta \alpha = a$, & $b\beta = h$) magnitudo ah ; & (propter Centri gravitatis à $\tau \alpha$ distantiam $\frac{1}{2}h$ adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$,) momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - 2avR + \frac{1}{2}av^2 = 2aR^2 - avR - \frac{1}{2}as^2$; & respectu T A, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2 = 2aR^2 - avR + \frac{1}{2}as^2$.

Adeoquæ (subductione factâ) Segmenti b B A, momentum respectu $\tau \alpha$ (vel correspondens Ungula Semiquadrantalîs,) $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 = \frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ah^2$; respectu T A, $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{1}{4}fR^2 - 2ahR - \frac{1}{4}shR + \frac{1}{2}ah^2$. Et (propter magnitudinem, $-aR + sR + av$,) distantia Centri gravitatis Segmenti

A b E, à $\tau \alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à b V, $\frac{1}{4}R - h - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av} = -\frac{1}{4}R + v - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$: Adeoque momentum respectu b V, $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$. Et speciatim, Segmenti A d C momentum respectu D C (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{16}R^2P$: Ejusque Centri gravitatis à D C distantia, $\frac{1}{16}P$. (Vel etiam, ex Trilinei A b B momento respectu $\tau \alpha$, subducto quod fit ex magnitudine in $av = h$, nempe $-ahR + shR + ahv = -2aR^2 + 2sR^2 + avR - svR + as^2$; habetur Trilinei A b B momentum respectu b V vel Semiquadrantalîs Ungula, $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; ut prius.)

Adeoquæ Solidum ejusdem A b B conversione circa $\tau \alpha$ factum, est, $-\frac{1}{4}eRP + avP - \frac{1}{4}svP + \frac{as^2P}{2R}$; circa T A, $-\frac{1}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{2R}$; & circa b V, $\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{R}$: Et semisolidâ, semisses horum.

G. Habentur autem eorundem Planorum, Momenta respectu A a, vel Semiquadrantalîs Ungulæ aciem habentes Aa, per prop. 18. Cap. 3. vel prop. 22. Cap. 4. vel prop. 10. hujus.

Si enim rectæ omnes x ξ , z ζ , &c. complentes A $\tau \alpha$ Trilineum, (vel minuta quæ his representantur parallelogramma, Trilineum illud completia,) ducantur in suas ab A a distantias a ξ , a ζ , &c. vel in his

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 295

his æquales $\xi\Xi$, $\zeta\zeta$, &c. (triangulum $\alpha\tau\tau$ complentes;) Habe- Fig. 169,
tur Semiquadrantis Ungula trilineo $A\tau\alpha$ insistent, aciem habens 170.

$A\alpha$. Quam utique complent, ipsa $x\xi\alpha$, $z\zeta\alpha$, &c. seu $x\xi\Xi$, $z\zeta\zeta$, &c. Parallelogramma (seu minuta Prismata) ipsis $x\xi$, $z\zeta$, &c. (rectis, seu minutis parallelogrammis) insistentia. Hoc est, omnia αb , facta ex arcubus arithmetice proportionalibus in residuorum ad semiperipheriam sinus versos ductis.

Aut etiam; si intelligatur $A\alpha$ in partes invicem æquales, in punctis Z , D , &c. dividi, (adeoque rectas Zz , Dd , &c. hoc est $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$, &c. repræsentare non quidem arcus arithmetice proportionales, sed qui respondent sinibus versis $A V$, $A C$, &c. arithmetice proportionalibus, puta $A Z$, $A D$, &c. fig. 169. adeoque Trilineum $A\tau\alpha$ consideretur non tam ut *Figura Sinuum Versorum* arcubus arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi $A\alpha$ parallelorum, quam ut *Figura Arcuum*, in rectas expansorum, sinibus versis arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi $\alpha\tau$ parallelarum;) eandem Ungulam complebunt Arcuum illorum Semiquadrata, seu Triangula eisdem Zz , Dd , &c. insistentia; ipsis scilicet $\alpha\zeta\zeta$, $\alpha\delta\delta$, &c. similia & æquivalia: Hoc est, Omnia $\frac{1}{2}\alpha^2$, sumptis v arithmetice proportionalibus.

Si verò eadem Ungula, tertiis adhuc planis (seu exiguis Prismatibus) componi intelligatur, Basi seu Trilineo $A\tau\alpha$ parallelis, Ungulam complentibus; erunt ea (propter Ungulæ Obliquam Sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab $A\alpha$ deficientia,) Trilineis $A\tau\alpha$, $x\xi\tau$, $z\zeta\tau$, &c. (usque ad ultimum $f\tau\phi$, ipsumve τ punctum;) æqualia: Hoc est, totidem $A\tau\alpha$ planis, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. Hoc est; Prismati altitudinem habenti $\alpha\tau$, demptâ contrariâ Ungulâ, super eadem $A\tau\alpha$ base, aciem habente $T\tau$. Et similiter, quæ Ungulam portioni $b\beta\alpha A$ insistentem complent plana; sunt ipsis $b\beta\alpha A$, $b\beta\xi x$, $b\beta\zeta z$, &c. (usque ad ipsam $b\beta$) æqualia: Hoc est, totidem $b\beta\alpha A$, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. seu Prismati ipsi $b\beta\alpha A$ insistenti altitudinem habenti æqualem ipsi $\beta\zeta = \beta\alpha$, seu arcui $BA = \alpha$; demptâ contrariâ Ungulâ, aciem habente $b\beta$.

Atque hanc tertiam Ungulæ compositionem, ut calculo magis opportunam, (cum perinde sit, Ungulæ magnitudinem quod spectat, planive momentum, sive hæc, sive illa, sive ista demum sumatur,) spectatim hic considerabimus.

Est autem (ut § A.) Trilineum $A\tau\alpha$, $\frac{1}{2}RP$; ergo, omnia $A\tau\alpha$; hoc est, $A\tau\alpha$, in $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, ducta; $\frac{1}{4}RP^2$.

Item;

Fig. 169, Item; portio $b\beta a A$, (per § A.) $aR + sR$; Adeoque omnia
 170. $x\xi a A$, $z\zeta a A$, &c. (usque ad $\tau a A$), sunt *omnia* $aR + sR$. Sunt
 que, omnia a , (hoc est, summa arcuum arithmetice proportionalium,
 quorum maximus $ADa = \frac{1}{2}P$.) Semissis quadrati $\tau a = \frac{1}{2}P$; seu $\frac{1}{8}P^2$:
 (per prop. 1. hujus.) Adeoque, *Omn.* $aR = \frac{1}{8}R/P^2$. Et, *omnia* s ,
 (hoc est, summa Sinuum rectorum totius Semicirculi,) $= 2R^2$ (per
 § M. prop. 13. hujus.) Adeoque *Omn.* $sR = 2R^3$. Ergo omnia
 $x\xi a A$, $z\zeta a A$, &c. quadrilinea; hoc est, *Omn.* $aR + sR$; (hoc
 est, Ungula Trilinei $A\tau a$, aciem habens, τT ; seu correspondens
 Momentum;) $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$.

Ergo; Momentum ejusdem $A\tau a$, respectu Aa ; (seu corre-
 spondens Ungula aciem habens Aa ;) hoc est, *Omn.* $A\tau a$, $x\tau\xi$,
 $z\tau\zeta$, &c. seu, Totidem $A\tau a$, demptis omnibus $x\xi a A$, $z\zeta a A$,
 &c. Hoc est, Prisma Trilinei $A\tau a$, (altitudinem habens τa ,)
 dempta contraria Ungula aciem habente τT ; Hoc est, Totidem
 $\frac{1}{2}RP$ demptis omnibus $aR + sR$: Est $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{8}R/P^2 - 2R^3 = \frac{1}{8}RP^2$
 $- 2R^3$. Atque hoc momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}RP$ divisum;
 exhibet distantiam Centri gravitatis Trilinei $A\tau a$, ab Aa , $\frac{1}{4}P -$
 $\frac{4R^2}{P}$; adeoque à τT , $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Vel etiam; momentum ejusdem respectu τT , ($\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$)
 modo inventum; per magnitudinem ($\frac{1}{2}RP$) divisum; exhibet
 Centri gravitatis à τT distantiam $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$; adeoque ab Aa ,

$\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; estque (restituendo magnitudinem) ejusdem momen-
 tum (seu quadrantalibus Ungula) respectu Aa , $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Ut
 prius.

H. Similiter; Portionis $b\beta a A$, momentum respectu Aa (eâdem
 ratione,) erit Aggregatum omnium $b\beta a A$, $b\beta\xi x$, $b\beta\zeta z$, &c.
 usque ad ipsam $b\beta$: Hoc est, Totidem $b\beta a A$ demptis omnibus
 $x\xi a A$, $z\zeta a A$, &c. Hoc est, Prisma ejusdem $b\beta a A$ altitudinem
 habens βa , demptâ contraria Ungula (ejusdem $b\beta a A$ Sectionis)
 aciem habente $b\beta$.

Est autem ejusmodi portio quævis ut $b\beta a A$, (per § B.) aR
 $+ sR$. Adeoque Omnes $x\xi a A$, $z\zeta a A$, &c. usque ad maximum
 $b\beta a A$; sunt *Omn.* $aR + sR$; sumptis a arcubus arithmetice pro-
 portionalibus usque ad maximum $a\beta$, qui dicatur A ; ipsisque s si-
 nubus rectis eorundem arcuum quorum maximus βv dicatur s .

Sunt

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 297

Sunt autem Omnes a , usque ad A , (per prop. 1. hujus, utpote Fig. 169, arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}A^2$ (seu $a\beta c$ triangulum;) adeoque 170.

Omnes aR , $=\frac{1}{2}A^2R$. Et Omnes s , usque ad maximum $\beta v = S$, cui respondet Sinus versus $AV = v$; (hoc est, $a\beta v$ trilineum;) sunt vR (per § M, V. prop. 13 hujus) adeoque omnes sR , $=vR^2$.

Ergo; Omnes $aR + sR$, $=\frac{1}{2}A^2R + vR^2$, est aggregatum omnium $x\frac{1}{2}aA$, $z\frac{1}{2}aA$, &c. usque ad $b\beta A$: Hoc est, momentum portionis $b\beta A$ respectu ipsius $b\beta$; vel huic correspondens Ungula.

Ejusdem itaque momentum respectu $A\alpha$, (aut correspondens Ungula;) hoc est, totidem $b\beta A$ minus omnibus $x\frac{1}{2}aA$, $z\frac{1}{2}aA$, &c. seu Prisma balis $b\beta A$ altitudinem habens $\beta\alpha = A$, demptâ contrariâ Ungulâ $b\beta A$ aciem habente $b\beta$: Est, $A^2R + ASR$ minus, $\frac{1}{2}A^2R + vR^2$: Hoc est, $\frac{1}{2}A^2R + ASR - vR^2$; vel (restituto valore minuscularum a, s), $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$.

Adeoque (momentis per magnitudinem divis) Portionis $b\beta A$, distantia centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{a^2 - 2vR}{2a - 2s}$; & ab $A\alpha$, $\frac{a^2 + 2as - 2vR}{2a - 2s}$.

Vel à $b\beta$, $\frac{\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{2a + 2s}}$; & ab $A\alpha$, $\frac{\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{2a + 2s}}$.

Eodem modo ostendetur (propter $b\tau\beta = aR - sR$), momentum portionis $b\tau$, respectu $b\beta$, (ungulamve correspondentem cuius acies $b\beta$), esse $\frac{1}{2}a^2R - hR^2$; & respectu τT , $\frac{1}{2}a^2R - asR + hR^2$:

Et Centri gravitatis distantiam à $b\beta$, $\frac{a^2 - 2hR}{2a - 2s}$; & à τT , $\frac{a^2 - 2as + 2hR}{2a - 2s}$.

Aut etiam, (propter $AbK = aR - sR$), momentum portionis AbK respectu bK (ungulamve correspondentem,) esse $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; & respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$: Centrique gravitatis distantiam à bK , $\frac{a^2 - 2vR}{2a - 2s}$; & ab $A\alpha$, $\frac{a^2 - 2as + 2vR}{2a - 2s}$.

Si vero, ex Portionis $b\beta A$, momentis respectu $b\beta$, & $A\alpha$; auferatur Parallelogrammi $B\beta A$ momentum respectu utriusvis (propter centrum gravitatis æqualiter ab utraque distans:) Hoc est, (propter $b\beta = v\alpha = h$, & $bB = a$, hujusque semissem $\frac{1}{2}bB = \frac{1}{2}a$,) $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}a^2v$: Habetur Segmenti AbB , momentum respectu $b\beta$, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; & respectu $A\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$: Hoc est, Semisumma quadratorum arcuum sinibus versis arithmetice

Qq

I.

Fig. 169, proportionalibus convenientium, portionum $b\beta A$ complementum:
170. Adeoque hujus duplum, eorundem quadratorum Summa. Et (mo-
menta per magnitudinem dividendo, hoc est, per $-aR + sR - av$,
ut § B.) Distantia centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{-2eR + 2av}R$; & ab

$$A\alpha, \frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{-2eR + 2av}R.$$

Et, speciatim, Segmenti AdC momentum respectu $d\delta$, (propter
 $v = K$) est R^3 . Centrique gravitatis à $d\delta$ distantia est R .

K. Solidaque & Semisolidi conversione facta; sunt ad respectivas
Ungulas, (ut sæpius dictum est,) ut P , & $\frac{1}{2}P$, ad R . Puta,
Solidum Trilinei $A\tau\alpha$ conversione circa τT factum, est $\frac{1}{8}P^3$
 $+ 2R^2P$; & circa $A\alpha$, $\frac{1}{8}P^3 - 2R^2P$.

Solidum Portionis $b\beta\alpha A$ conversione circa $b\beta$ factum, est $\frac{1}{2}a^2P$
 $- vRP$; & circa $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2P + asP - vRP$.

Solidum Portionis $b\beta\tau$ conversione circa $b\beta$ factum, est $\frac{1}{2}a^2P$
 $- hRP$; & circa τT , $\frac{1}{2}a^2P - asP + hRP$.

Solidum Portionis $A b K$ conversione circa $b K$ factum, est $\frac{1}{2}a^2P$
 $- vRP$; & circa $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2P - asP + vRP$.

Solidumq; Segmenti AbB conversione circa bB factum, est $-\frac{1}{2}a^2P$
 $+ vRP + \frac{a^2vP}{2R}$; & circa $A\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2P + asP - vRP + \frac{a^2vP}{2R}$.

Et Semisolidi, horum semisses.

L. Si verò libeat hæc Quadrilineorum, & Sectorum correspon-
dentiæ, momenta respectu $A\alpha$, inter se comparare; (præterquam quod
illud jam factum est, dum utrorumque momenta dantur;) Dicendum
est, Momentum Quadrilinei $b\beta\alpha A$ respectu sibi adjacentis $A\alpha$, ad
momentum Sectoris $B\alpha A$ respectu $A\alpha$ adjacentis sibi; esse ut, om-
nes $b\beta$ (illud complentes) in respectivas $\beta\epsilon$ (complentes $\alpha\beta\epsilon$ Tri-
angulum;) ad easdem $b\beta$ in respectivæ βv (complementum $\alpha\beta v$
Trilineum;) Trientem. Hoc est, ut Omnia rectangula $b\beta\epsilon$ (eo
spectantia) ad Trientem omnium $b\beta v$. Hoc est, ut Omnia $a h$, ad
Omnia $\frac{1}{3}h$.

Quippe Triangula singula ut αB (sectorem complementia) sunt (quo-
ad magnitudinem) ad correspondentia Parallelogramma $b\beta$ (Qua-
drilineum complementia) ut 1 ad 2, (Intellige, in partibus infinite ex-
iguis, dum Triangula Sectoribus, & Parallelogramma respectivis Quadri-

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 299

Quadrilineis coincidere reputantur.) Eorumque Triangulorum cen- Fig. 169, tra gravitatis in αB posita, ab α distant $\frac{2}{3}\alpha B$, ideoque, ab $A\alpha$, 170. $\frac{1}{3}BV$; hoc est $\frac{2}{3}b\beta$. Ergo (propter $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.) Momenta singulorum αB Triangulorum respectu adjacentis $A\alpha$, hoc est, Triangulum $\alpha B = \frac{1}{2}b\beta$, in $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}b\beta$; est ad $b\beta$ in $\beta\beta$; ut 1 ad 3. Et, consequenter, omnium Triangulorum hoc est Sectoris $B\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$, ad momentum omnium $b\beta$ Parallelogrammorum quadrilineum $b\beta\alpha A$ complementum in respectivis distantis $\beta\beta$ suspensorum; ut 1 ad 3. Est autem (per § S. prop. 15.) Sectoris $B\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$, seu correspondens Ungula, $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{6}v^2R$: Ergo, omnia $b\beta\beta$ Rectangula; seu Omnia $h\beta$, aut omnia $2sR - vs$; eo spectantia; (hoc est, Solidum Quadrilineo $b\beta\alpha A$ incumbens, altitudinem habens super singulas rectas $x\xi$, $z\zeta$, &c. æqualem respectivis $\xi\theta$, $\zeta\upsilon$, &c.) $vR^2 + \frac{1}{6}v^2R$. Et de aliis istiusmodi Solidi portionibus, mutatis mutandis, simile fiet iudicium. Puta, (propter Segmentum $A B A = \frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}sR$, ejusque respectu $A\alpha$, momentum $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{6}v^2R$, per § Q. prop. 15.) quæ portioni $A b K$ incumbit ejusdem Solidi continuati portio (hoc est, omnia vs eo spectantia,) erit $vR^2 - \frac{1}{6}v^2R$. Et, similiter, quæ trilineo $\tau b\beta$ incumbit ejusdem Solidi portio (hoc est, omnia $h\beta$ huc spectantia,) $hR^2 - \frac{1}{6}v^2R$. Et sic alibi.

Atque his ita in Figura Sinuum Versorum $A\tau\alpha$ absolutis; idem etiam in Figura Sinuum Rectorum (totius Semicirculi) $\alpha\tau\kappa$ absolvetur. Est utique hujus uterque Semissis $\alpha\delta\kappa$, $\tau\delta\kappa$, eadem planè figura atque dCA , (figuræ $A\tau\alpha$ segmentum,) vel $d\epsilon\tau$; alio situ posita. Cum enim $b\beta$ hoc est $V\alpha$ (& de reliquis similiter) sit arcus $B\alpha = \tau\beta$, sinus versus; erit propterea (ejusdem à Radio differentia) $b\kappa$, hoc est VC , arcus BD sinus rectus. Et sic ubique. Est igitur, tum dCA , tum $d\epsilon\tau$, figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, (puta quadrantis DA , vel DA , fig. 169. utrinque à D inchoando;) adeoque eadem planè figurâ cum $\alpha\delta\kappa$, vel $\tau\delta\kappa$, quæ iidem (per constructionem) sunt figuræ Sinuum Rectorum unius quadrantis integri, atque ad eundem Radium. Cum igitur tum ipsius dCA trihinei, tum partium ipsius, magnitudines, momenta & Centra gravitatis determinantur: Etiam figuræ $\alpha\tau\kappa$ utriusque Semissis, adeoque & totius, ejusque partium, magnitudines momenta & Centra gravitatis determinantur.

Exempli gratia; $\alpha\delta\kappa = \tau\delta\kappa = dCA = -AR + sR + av$ (per § B.) id est, hoc casu, (propter $v = AC = R$, & $s = DC = R$, & arcum

M.

N.

Fig. 169,
170.

arcum $a = DA = \frac{1}{4}P$,) $-\frac{1}{4}RP + R^2 + \frac{1}{4}RP = R^2$. Ejusque momentum respectu basis δ , vel d C, (hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum unius quadrantis,) $\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}vR - \frac{1}{2}aR^2$ (per § F.) id est, in hoc casu, $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{4}R^3 - \frac{1}{8}PR^2 = \frac{1}{8}PR^2$; (Adeoque, Summa quadratorum Sinuum rectorum, seu *omnia* s^2 , totius quadrantis, $\frac{1}{8}R^2$; ut supra § V. prop. 13.) Centricque gravitatis à base $a\delta$ seu d C distantia (momentum per magnitudinem dividendo) $\frac{1}{8}P$.

O. Similiter; portio $x\delta\beta v$, hoc est (sumpta $Cl = \delta\beta$) $A Cl x$, est (ut § B) sR , sumpto arcu xQ hoc est $XA = a$, Nempe factum ex Radio R , in s Sinum rectum arcus $XA = xQ$; hoc est, in Sinum arcus $DB = \delta\beta$; hoc est, (posito $a\beta = AB = a$; adeoque BD ejusdem complementi,) in $x = VC$. Hoc est, $x\delta\beta v = xR$.

Et consequenter, $a\beta v = a\delta x + \delta x v$ (prout minor majorve quadrante fuerit arcus $a\beta$ seu AB) erit $R^2 + xR$; hoc est (propter $x = R - v$ si AB sit quadrante minor, & $x = -R + v$ si quadrante major; adeoque, utrunque, $R + x = v$), $a\beta v = R^2 + xR = vR$.

Hinc item deducetur Momentorum ratio in Trilinei $a\delta x$ vel $\tau\delta x$ portionibus; ex momentis portionum Trilinei d C A; sed perplexiori aliquantulum calculo, ob contrarium Figurarum situm. Cum enim, in priori situ, arcus ab A inchoavimus, (ut, verbi gratia, arcum AB diximus a ; cujus sinus rectus s , & versus v ; adeoque BD esset ejusdem arcus complementum, cujus sinus rectus $VC = x$;) jam, mutato situ, arcus inchoantur ab a , hoc est à D; (adeoque arcus $a\beta$, hoc est DB, dicetur a , cujus sinus rectus $s = VC$; & sinus complementi $BV = x$, &c.) Verbi gratia.

Ex Parallelogrammi $q l C A$ momento respectu T A, hoc est, (posito $x X$, hoc est $XA = a$), ex $\frac{1}{2}aR^2$; si auferatur momentum Trilinei $A x q$, hoc est, (per § E.) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}vR$; habetur quadrilinei $x l C A$ momentum respectu T A, $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}vR$. Adeoque (propter magnitudinem sR , per § B.) distantia centri gravitatis à T A, $\frac{-aR + \frac{3}{4}sR + \frac{1}{4}vR}{4s}$; adeoque, à d C, $\frac{aR - \frac{1}{4}sR - \frac{1}{4}vR}{4s}$; ejusque respectu d C momentum, $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}vR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sxR$. Idemque est momentum portionis $\beta\delta x$, respectu τa , posito $\delta\beta (= xX) = a$: Sed, posito $a\beta = a$, adeoque (ejusdem complementum ad quadrantem, aut etiam excessus supra quadrantem,) $\delta\beta = DB = \frac{1}{4}P - a$, (arcus a differentiam à quadrante

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 301

drante $\frac{1}{4}P$,) quem arcum q dicemus; eritque hujus siquis rectus, Fig. 169, non s , sed $x=OC$ (sinus complementi arcus $a=XA$.) Adeoque 170. mutato a in q ; permutatis etiam si opus s & x (sed hic nihil opus, perinde enim est sx & xs ;) pro $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sxR$, habebitur quadrilinei $v\beta\delta\kappa$ momentum respectu τa , (posito $a\beta=a$;) $\frac{1}{4}qR^2 - \frac{1}{4}svR$; (hoc est; omnia $\frac{1}{2}R^2$, seu Semisumma quadratorum Sinuum rectorum complementum portionem $v\beta\delta\kappa$, seu arcus DB particulis respondentium.) Eiusque à τa Distantia Centri gravitatis $\frac{qR+xs}{4x}$.

Adeoque; (propter Trilinei $a\delta\kappa$, respectu ejusdem τa , momentum $\frac{1}{6}R^2P$, ut supra;) portionis $a\beta v = a\delta\kappa + \delta\kappa v\beta$ (prout $a\beta$ minor majorve quadrante fuerit) momentum respectu τa , erit $\frac{1}{6}R^2P + \frac{1}{4}qR^2 - \frac{1}{4}svR$; Hoc est (propter $q = \frac{1}{4}P - a$, & $x = R - v$, si $a\beta$ sit quadrante minor; vel $q = -\frac{1}{4}P + a$, & $x = -R - v$, si $a\beta$ quadrante major;) $\frac{1}{6}aR^2 - \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}svR$: (Quæ itaque est, Semisumma quadratorum Sinuum rectorum, complementum portionem $a\beta v$, seu omnia $\frac{1}{2}R^2$ arcus AB particulis competentia, sumptis a arithmetice proportionalibus.) Factâque, per magnitudinem $a\beta v = vR$, divisione; habetur distantia Centri gravitatis à τa , $\frac{aR-sR+sv}{4v}$.

$$= \frac{aR+sv}{4v}.$$

Similiter; Trilinei $a\delta\kappa$ momentum respectu Aa (productæ,) Hoc est, Trilinei dCA momentum respectu δd (productæ;) est, (per § I.) $-\frac{1}{2}a^2R - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Hoc est, in præsentî casu, (propter $v=R$;) R^3 . (Hoc est, omnia as , totius quadrantis.) Atque hoc, per magnitudinem R^2 divisum, exhibet R , distantiam Centri gravitatis trilinei dCA , à δd ; vel $a\delta\kappa$, ab Aa . Adeoque Centri gravitatis illius ab Aa , hujus à $\delta\kappa$, distantia, est $\frac{1}{4}P - R$. Et propterea, momentum correspondens (seu Semiquadrantalîs Ungula,) nempe Trilinei dCA respectu Aa , vel $a\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$.

Et similiter in Portionibus, (licet perplexiori paulum calculo, ob mutandum, ut prius, symbolorum valorem pro mutato situ figuræ,) idem obtinebitur.

Est utique (per § H.) quadrilinei $x\xi a$ momentum respectu Aa , (posito $xX=a$;) $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$: Adeoque (dempto Parallelogrammi ξlCa momento respectu ejusdem Aa , $\frac{1}{2}a^2R$;) momentum quadrilinei $x lCa$, respectu ejusdem Aa , $asR - vR^2$. Atque

P.

302 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 169, 170. que tantundem erit momentum Quadrilinei $\nu\beta\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$, post-
 170. io $\delta\beta = xX = a$: Centrique gravitatis a $\delta\kappa$ (propter magnitudinem

$s R_1$) distantia, $\frac{as - vR}{s}$. Sed, posito $a\beta = a$; adeoque $\beta\delta = \frac{1}{4}P$

$\sim a = q$: Et propterea mutatis s in x (sinum complementi arcus q);

& v in $R - s$: Erit ejusdem $\nu\beta\delta\kappa$ momentum respectu $\delta\kappa$, qxR
 $- R^3 + sR^2$; & centri gravitatis à $\delta\kappa$ distantia, $\frac{qx - R^2 + sR}{x}$: A-

deoque, ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P + \frac{qx - R^2 + sR}{x}$; ejusque momentum respectu

$A\alpha$, $\frac{1}{4}xR + \frac{1}{4}qxR + R^3 + sR^2 = axR + R^3 + sR^2$.

Et, propterea, Momentum portionis $a\beta\nu = a\delta\kappa + \delta\kappa\nu$, respectu
 $A\alpha$, (propter ipsius $a\delta\kappa$, respectu $A\alpha$, momentum, R^3) erit
 $\frac{1}{4}axR + sR^2 = -aR^2 + sR^2 + avR$. Centrique gravitatis ab $A\alpha$

distantia (propter magnitudinem, νR_1) erit $\frac{-aR + sR + av}{\nu} =$

$\frac{-eR + av}{\nu}$: Adeoque, à $\beta\nu$, $\frac{eR}{\nu}$; ejusque respectu $\beta\nu$ momentum
 $\frac{1}{4}R^2$.

Q Verum hæc omnia quæ Trilineum $a\tau\kappa$, ejusque portiones spectant;
 simplicius, ex ante traditis, per se elicientur, sine ope Figuræ Si-
 nuum versorum.

Est utique (per § T. prop. 13.) posito $a\beta = a$ (ubique in $a\tau$
 sit β punctum) reliquisque symbolis proportionaliter, $a\beta\nu = \nu R$,
 $a\delta\kappa = R^2$, $\nu\beta\delta\kappa = xR$.

Item, Trilinei $a\beta\nu$ momentum respectu $\tau\alpha$; hoc est, omnia Se-
 miquadrata Sinuum rectorum sectionem illam complementum; hoc est,
 omnia $\frac{1}{2}s^2$, seu omnia $\frac{1}{2}vb$, eo spectantia, arcubus arithmetice pro-
 portionalibus ab a usque ad $a\beta$ convenientia; (per § V. prop. 13.)
 $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$. (Nempe, quod sit ex Semi-
 Radio $\frac{1}{2}R$, ducto in correspondens Semisegmentum circulare ABV
 $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$.) Adeoque (propter
 magnitudinem νR_1) distantia Centri gravitatis portionis $a\beta\nu$ à $\tau\alpha$,
 $\frac{eR + sv}{4\nu}$.

Et speciatim, Trilinei $a\delta\kappa$ (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $\nu = R_1$) mo-
 mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P$. Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantia,
 $\frac{1}{16}P$.

Similiter

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 303

Similiter (per prop. 10 hujus) sumptis omnibus $a\zeta v$, $a\zeta v$, &c. Fig. 169, usque ad $a\beta v$; hoc est, omnibus vR eo spectantibus; Hoc est, facto 170. ex R in omnes v , hoc est, in omnes AO &c. sinus versos arcuum arithmetice proportionalium ab A usque ad maximum AV quem jam dicamus V ; hoc est, facto ex R in trilineum $AbK = aR - sR = eR$ (per § B:) Habetur momentum Trilinei $a\beta v$ respectu βv , nempe $aK^2 - sR^2 = eR^2$. Faciâque per magnitudinem vR divisione; distantia Centri gravitatis à βv , $\frac{aR - sR = eR}{v}$; adeoque ab Aa ,

$a - \frac{eR}{v}$. Et, propterea, ejusdem momentum respectu Aa , $-eR^2 + avR$.

(Eademque de portione $\tau\beta v$; substitutis a pro a , & h pro v , item T pro Aa ; & vice versa.)

Et, speciatim, Trilinei $a\delta\kappa$ (propter $s=v=R$) momentum respectu Aa , R^3 ; respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$; Centrique gravitatis distantia ab Aa , R ; atque a $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}P - R$.

Determinavimus itaque totius Figuræ, partiumque ejusdem expositarum, tum magnitudines, tum momenta respectu expositarum aliquot rectorum; earumque Centrorum gravitatis distantias ab illis rectoris. Adeoque, propter exhibitas eorundem à duabus saltem rectoris non parallelis distantias; etiam ipsa Centra gravitatis (per prop. 26. cap. præced.) exhibentur.

Atque hinc de Ungulis, Solidisque conversione factis aut Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent, calculo rite adhibito, judicium fiet. Quæque de his dicta sunt, ad alia facile poterunt multis modis ampliari.

Atque hæc quidem omnia quæ de $a\delta\kappa$ figura Sinuum rectorum unius quadrantis tradita sunt; eadem ejusdem complemento $a\kappa\Gamma$ facile accommodantur. Quippe si ex $a\delta\kappa\Gamma$ parallelogrammo, auferatur trilineum $a\kappa\delta$; restat trilineum $a\kappa\Gamma$; & similiter, si ex parallelogrammi illius Momentis, Ungulis, & Ungularum Momentis; auferantur respectiva Trilinei $a\delta\kappa$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta; restabunt respectiva Trilinei $a\kappa\Gamma$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta: unde & Centrorum gravitatis Distantiæ ab expositis rectoris colliguntur. Quodque de totâ $a\kappa\Gamma$ dictum est; idem de partibus, ut. $a\delta\gamma$, mutatis mutandis; intelligendum est.

S. Si autem, in his Sinuum Verforum, Rectorumque, Figuris: Manente, ut prius, $A^2 = 2R$, & $\delta^2 = R$, reliquisque hisce parallelis in eadem qua nunc ratione; Recta τa , Protracta sit, vel Contracta, (puta, Major, vel Minor, quam $\frac{1}{2}P$;) reliquæque huic parallelæ, similiter vel Protractæ vel Contractæ; (quas Figuras Sinuum Verforum, Rectorumve, *Protractas*, dicamus; vel *Contractas*;) Eadem quæ jam tradita sunt, etiam his conveniunt; cum hoc solo discrimine; Quod quoties recta bB in calculum veniunt; pro a , substituenda erit alia quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est τa , ad $\frac{1}{2}P$: Et similiter, mutatis mutandis, pro earundem bB quadratis, Cubis, reliquisque potestatibus; nempe, pro a^2, a^3 , &c. quantitates quæ sint ad has in Duplicitatâ, Triplicitatâ, &c. ratione, illius quam habet τa ad $\frac{1}{2}P$.

T. Quæque de figura Sinuum rectorum unius quadrantis, (ut $a\delta$ fig. 170.) dicta sunt: eadem figuræ Sinuum Chordarum seu subtenfarum in semicirculo (ut $A\delta$ fig. 183.) facile accommodantur: Sunt enim Chordæ Arcuum in semicirculo, ubique Duplæ Sinuum Rectorum, Semiarcuum in Quadrante correspondentium. Adeoque figura Chordarum in Semicirculo $A\delta$ fig. 183. Ipsi $a\delta$ fig. 170, Figuræ Sinuum Rectorum Quadrantis, omnino similis; & partes partibus respective sumptis. (Quod & de solidis inde oriundis pariter intelligendum est.) Qua de re videantur plura, ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

SCHOLIUM.

Fig. 169, 170, 171. Hæc autem sive Sinuum verforum sive Arcuum figura $A\tau a$, alia non est quam, Dimidia Semicylindri (plano oblique secti) Superficies curva in planum expansa: Seu Semiquadrantis Ungulæ Semicylindricæ Superficies curva in planum expansa. Eaque quâ terminatur sinuosa curva $Ad\tau$, est Semiellipseos linea curva, in planitiem item expansa.

Intelligatur enim super Semicirculo $a\tau\beta$ fig. 171. (qui sit ipsi $A\delta$ fig. 169 æqualis; adeoque illius curva $\tau\beta a$, fig. 171. curvæ hujus ABa , fig. 169.) Semicylindrus rectus, altitudinem A^2 ipsi $A\delta$ fig. 169, 170. æqualem habens. Quem secet planum ellipseos τbA , (quod ipsi per axem Cylindri plano τaA rectum sit,) abscindens Semiquadrantalem Ungulam bAa ; cujus superficiem curvam compleant (juxta def. 1. cap. 4.) parallelæ

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 305

parallela recta βb &c. singulis curvæ $\tau \beta a$ punctis insistentes: (ut & paralleli arcus $b B$, &c. singulis rectæ $A a$ punctis occurrentes.)

Sumpto jam, in Trilinei base $\tau \beta a$, fig. 170. puncto quovis β , cui respondeat punctum β in curva $\tau \beta a$ fig. 171. quæ huic in curva Ungulæ superficie insistit recta, sit βb . Dico rectam hanc βb in curva Ungulæ superficie, æqualem esse correspondenti rectæ βb in Trilinei plano. Est enim (per constructionem) arcus $\tau \beta$, æqualis $\tau \beta$ rectæ, hoc est arcui $a B$: Sed & huic similis (propter æquales circulorum Diametros:) Adeoque hujus sinui verso $a V$, fig. 169, 170. æqualis est illius sinus versus τa ; hoc est, (propter angulum semiquadrantalem,) perpendicularis $a v$; & (propter parallelas) ipsa βb in Ungulæ superficie curva. Sed & eidem $a V$ fig. 170. æqualis est (ipsi parallela) βb in Trilineo. Æquales itaque sunt, quæ in Ungulæ superficie curva, & quæ in Trilineo plano, rectæ βb respective sumptæ. (Similiter ostendetur, arcus $b B$, $d D$, &c. fig. 171. æquales esse rectis $b B$, $d D$, fig. 170. hoc est, arcubus $A B$, $A D$, &c. fig. 169.) Cumque hoc ubique obtineat: Expansâ in planum superficies illa curva, Trilineo super imposita congruet: adeoque tum tota toti, tum partes partibus respective sumptis æquales. (Pata, superficies curvæ $A b \beta a$, $A b B$, ipsis $A b \beta a$, $A b B$, planis: & sic ubique.) Ipsaque quæ, in superficie Cylindrica, erat semiellipteos curva $\tau b A$; eadem, in superficie expansâ, est sinuosa curva $\tau b A$ terminans Trilineum $A \tau a$, quam *Figuram Sinuum Versorum*, *Archimæve*, diximus.

Eodem modo, si intelligatur idem τA semicylindrus, plano Fig. 170; $A \tau$ secari, Semiquadrantalem Ungulam $A T \kappa$ abscindente, (cu. 172. jus itaque altitudo $d \kappa$ sit basis semidiametro æqualis:) Ostendetur, superficiem Ungulæ curvam $T d A \kappa$, in planum expansam, congruere Bilineo $\tau d a \kappa$ fig. 170. quam *Figuram Sinuum Rectorum* diximus. Quippe utrobique ostendetur βv , ipsi $B V$ sinui recto correspondentis arcus $A B$, hoc est $\tau \beta$, æqualis: & sic ubique. Adeoque & $\tau \kappa a$ semielliptis curvam in superficie Cylindri; expansâ in planitiem superficie curvâ, curvæ $\tau \kappa a$ figuram Sinuum rectorum terminanti congruere; & partes partibus respective sumptis. Quæ pridem monuimus ad prop. 13.

PROP. XVIII.

PARS PRIMA.

A. Si super $\Lambda\tau\alpha$ Figura Sintum versorum, Arcuumve, Solidum insistat altitudinem habens in singulis $b\beta$ Sinibus versis, æqualem respectivis βv sinibus rectis eorundem arcuum: Solidum sic constructum, Triplum erit Semicirculantis Ungulæ Semicirculi, aciem habentis Semicirculi Diametrum. Et partes partium respective. Unde; Solidi sic constructi, partiumque ejusdem, tum Magnitudines, tum Momenta, & Centra gravitatis, innotescunt.

Nempe, (retentis Symbolis, ut in propositionibus aliquot præcedentibus;)

A, C. Solidi $\Lambda\tau\alpha$, sic constructi; Magnitudo, $2R^3$: Distantia Centri gravitatis à plano $\Lambda\tau\alpha$, $\frac{1}{6}P$; Momentum correspondens respectu $\tau\alpha$ in plano $\Lambda\tau\alpha$ erecto, $\frac{1}{3}R^3P$:
 E. Distantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R$; Momentum respectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\kappa$ erecto, $\frac{2}{3}R^4$:
 H. Distantia Centri gravitatis à plano super $A\alpha$ erecto, $\frac{1}{6}P$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$.

A, C. Portionis, ejusdem Solidi, $Ab\beta\alpha$; Magnitudo, $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\Lambda\tau\alpha$, $\frac{1}{2}vR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab

illo plano, $\frac{3vR^2 + 3svR + 2s^3}{12vR + 6s^2}$: Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6vR + 3s^2}$; Momentum

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 307

Momentum respectu $A\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2$ H.
 $+\frac{1}{2}as^2R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,

$$\frac{-5eR^2 + 4avR - svR + 2as^2}{4vR + 2s^2}$$

Portionis, ejusdem Solidi, $b\beta\tau$; Magnitudo, $2R^3 - vR^2$ A. I.
 $-\frac{1}{2}s^2R = bR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}b^2R$; Momentum respectu
 plani $A\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^2R$; re-
 spectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$;
 respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}R^3P + \frac{1}{4}eR^3 - avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 -$
 $\frac{1}{2}as^2R$; Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$,

$$\frac{3R^2P - 6eR^2 - 6svR - 4s^3}{48R^2 - 24vR - 12s^2}$$
; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 - 4s^2R + s^2v}{12R^2 - 6vR - 3s^2}$;
 ab $A\alpha$, $\frac{3R^2P + 10eR^2 - 8avR + 2svR - 4as^2}{16R^2 - 8vR - 4s^2}$.

Portionis AbK ; Magnitudo, $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; Mo- A. I.
 mentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2$
 $-\frac{1}{6}s^3R$; respectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2$
 $+\frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; respectu TA , $\frac{1}{3}vR^3 -$
 $\frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$; respectu $A\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2$
 $+\frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; Distantia Centri gravitatis à plano
 $A\tau\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR^2 - 2s^3R}{12vR^2 - 6s^2R - 6v^2R}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{1}{3}R + \frac{1}{3}b$; à TA ,
 $\frac{1}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$; ab $A\alpha$, $\frac{-3eR^2 + 4avR + svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$.

Portionis $AK\beta\alpha$; magnitudo, $2vR^2$; Distantia Centri I.
 gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$; Momentum respectu
 ejusdem $A\tau\alpha$ plani (erecti) $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2$; Distantia
 Centri gravitatis à TA , vel $\tau\alpha$, (hoc est, à planis super
 rectas illas erectis,) R ; momentum respectu TA , vel
 $\tau\alpha$, $2vR^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a -$
 $\frac{eR}{v}$; momentum respectu $A\alpha$, $2avR^2 - 2eR^3$.

Portionis $AKbB$; magnitudo, v^2R ; Distantia Centri I.
 gravitatis à TA vel bB , $\frac{1}{2}v$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{1}{2}v$; ab $A\alpha$,

$$\frac{R + 2}{a -}$$

- $a - \frac{eR}{v}$; à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; Momentum respectu
 TA, vel bB, $\frac{1}{2}v^3R$; respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{2}v^3R$; re-
 spectu plani (erecti) $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}sv^2R$.
 B. Portionis b β α B; Magnitudo, $v h R = s^2 R$; Di-
 D. stantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momen-
 tum respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}sv^3R$; Distan-
 F. tia Centri grav. ab erecto plano $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; momentum
 respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha$, $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR = \frac{1}{2}s^2hR$.
 H. Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-eR+av}{v}$; Momen-
 tum respectu $A\alpha$, $-2eR^3 + evR - \frac{1}{2}s^2R$.
 B. Segmenti Solidi Ab B; Magnitudo, $\frac{1}{2}v^2R$; Momentum
 D. respectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2$
 $-\frac{1}{2}s^2R^3$; Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$,
 F. $\frac{-3eR^3 + 3avR - s^2}{6v^2}$; Momentum respectu $\tau\alpha$ in erecto
 plano $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$; Distantia Centri
 gravitatis à plano $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$; & à bB, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h$
 $= \frac{1}{3}v$; à TA, $\frac{1}{3}v$; Momentum respectu bB, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2$
 G. $R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$; respectu TA, $\frac{1}{3}v^3R$; Momen-
 tum respectu $A\alpha$, $\frac{3}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; Distantia
 Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^3 + 3svR - 2as^2}{4vR - 2s^2} = 2v^2$.

PARS SECUNDA.

- K. Porro; Si super $A\tau\alpha$, (Figura Sinuum versorum, Ar-
 Fig. 169, cumve,) Solidum insistat; altitudinem habens, in sin-
 170. gulis bB rectis (seu arcubus in rectas expansis,) æqua-
 lem respectivis BV in Semicirculo, (eorum respective
 arcuum sinibus rectis:.) Solidi sic constructi, partium-
 que ejusdem, tum magnitudines, tum momenta, & Cen-
 tra gravitatis innotescunt.

Nempe

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 309

Nempe ; (retentis Symbolis, ut in propositionibus præcedentibus ;) Fig. 169, 170.

Solidi totius A τ α sic constructi ; Magnitudo, $\frac{1}{6}RP^2$: Mo- K.
mentum respectu T A, $\frac{1}{6}R^2P^2 + \frac{1}{3}R^4$; respectu τ α , M.
 $\frac{1}{6}R^2P - \frac{1}{3}R^4$; Distantia Centri gravitatis à T A,
 $R + \frac{64R^3}{9P^2}$; à τ α , $R - \frac{64R^3}{9P^2}$: Momentum respectu A α , N.
 $\frac{1}{6}RP^3 - \frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab A α ,
 $\frac{1}{2}P - \frac{R^2}{P}$: Momentum respectu plani A τ α (erecti)
 $\frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano,
 $\frac{8R^2}{3P}$.

Portionis, ejusdem Solidi, A b β α ; Magnitudo, $\frac{1}{4}aRP$ K.
 $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}a^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$: Momentum respectu M.
T A, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{3}a^2s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}a^2vR$; respectu
 τ α , $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{3}a^2s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}a^2vR$; Di-
stantia Centri gravitatis à T A, $R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$; à τ α ,
 $R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$: Momentum respectu A α , $\frac{1}{8}a^2RP$ N.
 $-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}s^2vR^2 - \frac{1}{8}a^3R + \frac{1}{4}as^2R$; Distantia Centri gra-
vitatis ab A α , $\frac{3a^2P - 3eR^2 - 3svR - 4a^3 + 6as^2}{6aP - 6ef}$: Mo- O.
mentum respectu plani A τ α , $\frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{18}s^3R$; Di-
stantia Centri gravitatis ab A τ α plano, $\frac{12fR^2 + 2s^3}{9aP - 9ef}$.

Portionis AK β α ; Mag. $\frac{1}{4}aRP$; Distantia Centri gravitatis M.
à T A, vel τ α , R ; Momentum resp. T A, vel τ α , $\frac{1}{4}aR^2P$: Dist. N.
Cen. grav. ab A α , $\frac{1}{2}a$; Momentum respectu A α , $\frac{1}{8}a^2RP$:
Distantia Centri gravitatis à plano A τ α , $\frac{8R^2}{3P}$: Momen- O.
tum respectu istius plani A τ α (erecti) $\frac{1}{3}aR^3$.

Portionis, b β α B ; magnitudo, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR -$ L.
 $\frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}eaR - \frac{1}{2}asv$: Momentum respectu T A, P.
 $\frac{1}{4}aR^2P$

- $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}eaR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; Respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}eaR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}a^2sv$; respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis, à TA , $R + \frac{4s^3}{3RP - 6eR - 6sv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4s^3}{3RP - 6eR - 6sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$; à plano $A\tau\alpha$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 + 2s^2R - 2s^2v}{3RP - 6eR - 6sv}$.
- L. M. Portionis, $AKbB$; Magnitudo $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$; Momentum respectu TA , $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; Distantia Centri gravitatis à TA , $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}a^2sv$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$; Momentum respectu plani (erecti) $A\tau\alpha$, $\frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{v^2R - s^2v}{3eR + 3sv}$.
- L. Portionis, AbB ; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$; Momentum respectu TA , $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{2}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$; Distantia Centri gravitatis à TA , $R + \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$.
- N. Momentum respectu $A\alpha$, $-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}a^2sv$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $-\frac{3eR^3 - 3svR^2 + 2a^3R - 6a^2sR + 6as^2R + 6a^2sv}{6e^2R + 12asv}$; momentum respectu plani $A\tau\alpha$, $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ Plano, $-\frac{12eR^3 + 12avR^2 - 6as^2R + 2s^3R + 6as^2v}{9e^2R + 18asv}$.
- K. M. Portionis AbK ; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}e^2R$; Momentum respectu TA , $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2vR$; Re-

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 311

Respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{5}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; Distan- N.
tia Centri gravitatis à TA, $R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; à $\tau\alpha$,

$R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; Momentum respectu A α , $\frac{1}{8}eR^3$ O.

+ $\frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$; Distantia Centri gravitatis
ab A α , $\frac{3eK^2 + 3svR + 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 - 6ef}$; Momentum respectu

plani A $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{8}s^3R$; Distantia Centri gravitatis
ab A $\tau\alpha$ plano, $\frac{12eK^2 - 2s^3}{9ef}$.

Portionis b $\beta\tau$; Magnitudo $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$; Momentum K.
respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{9}bR^3 - \frac{1}{9}s^2bR$; Re- Q.

spectu TA, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{2}{9}bR^3 + \frac{1}{9}s^2bR$; Respectu
T τ , $\frac{1}{8}\alpha R^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}bR^2 + \frac{1}{8}\alpha sR - \frac{1}{4}\alpha s^2R$; respectu
plani A $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{8}s^3R$; Distantia Centri gra-
vitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{4b^2R + 4s^2b}{9a^2 - 9s^2}$; à TA, $R + \frac{4b^2R + 4s^2b}{9a^2 - 9s^2}$;

ab A α , $\frac{3\alpha R^2 - 3sR^2 + 3sbR + 4\alpha^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2}$; à plano A $\tau\alpha$,
 $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 2s^3}{9a^2 - 9s^2}$.

Adeoquæ exhibentur, in utroque solido; tum eo quod R.
fit ex A $\tau\alpha$ figuræ Sinuum versorum rectis b β , in βv
figuræ Sinuum rectorum respectivis rectis; tum eo
quod fit ex A $\tau\alpha$ Figuræ Arcuum rectis b B, in B V,
respectivas Semicirculi rectas; eorumque partibus ex-
positis; Tum Magnitudines; tum Momenta respectu
planorum aliquot expositorum; & Centrorum gravita-
tis ab illis planis distantia. Et propterea, propter
exhibitas Centrorum gravitatis distantias à tribus sal-
tem planis non parallelis; exhibentur (per prop. 26.
cap. præced.) ipsa Centra gravitatis.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia facile poterunt
accommodari. Et

Et quidem quæ de his solidis traduntur; ad Protracta, & Contracta, facile transferentur.

Quæque de solidis Figuram Sinuum Rectorum unius Quadrantis respicientibus, traduntur; eadem ad Solida Figuram Chordarum Semicirculi similiter respicientia, transferentur.

A. **S**uper $\alpha \tau$ Figura sinuum rectorum, erigi intelligatur Cylindri Fig. 169, (Prismaticæ) recti portio; ea ratione, ut super singulis βv figuram complementibus (arcuum arithmetice proportionalium sinibus rectis,) altitudinem habeat respectivis βb (eorundem arcuum, eorumve complementorum ad semicirculum sinibus versis) æqualem. Aut etiam (quod eodem recidit) super $A \tau$ figura Sinuum versorum (Arcuumve) insistent ad angulos rectos, in τa rectâ, Figura Sinuum rectorum $\alpha \tau$, promoveri intelligatur ad $T A$, solidum describens columnare (Cylindraceum dicas, Prismaticumve, perinde est,) Parallelogrammo $T A \alpha \tau$ incumbens; quod sinuosâ superficie sinuosæ curvæ $A d \tau$ ad angulos rectos insistente, secari porro intelligatur, Solidum $A d \tau \alpha$ abscindente.

Manifestum est, ex constructione, Plana Solidum hoc complementia, rectis $b \beta$ insistentia, Parallelogramma esse rectangula; ipsis $b \beta v$ rectangulis ubique æqualia; hoc est rectangulis $h s$; factis nempe ex arcuum $\tau \beta$ (hoc est αB fig. 169.) seu complementorum arcuum $\alpha \beta$ (seu $A B$) sinibus versis; in βv (hoc est $B V$ fig. 169.) eorundem arcuum sinibus rectis. Adeoque Solidum hoc sive totum, sive ipsius portio ut $A b \beta \alpha$, est aggregatum omnium $h s$, seu $s h$, figuram sive totam, sive ipsius assumptam portionem, spectantium; divisâ $\alpha \tau$ in partes æquales; hoc est, sumptis α arcubus arithmetice proportionalibus.

Manifestum item est, Plana rectis $b B$ insistentia, solidum hoc complementia, æqualia esse respectivis $\alpha \beta v$ Figuræ sinuum rectorum portionibus; divisâ $A \alpha$ in partes æquales, hoc est, sumptis v arithmetice proportionalibus. Adeoque (propter $\alpha \beta v = v R$, per § Q. prop. 17.) Solidum hoc, sive totum, sive ipsius portio ut $A b B$, est aggregatum omnium $v R$, eo spectantium, sumptis v arithmetice proportionalibus.

Estque solidum hoc, Semiquadrantis Ungulæ à Semicirculi $A D \alpha$ aciem habentis $A \alpha$, (seu Momenti semicirculi $A D \alpha$ respectu $A \alpha$ rectæ,) Tiplum: Et partes partium respective sumptarum: Puta Solidi

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 313

Solidi portio $Ab\beta\alpha$, tripla correspondentis Ungulæ $B\alpha A$ (aciem habentis $A\alpha$;) & Portio $b\beta\tau$, tripla Ungulæ correspondentis $\alpha B\alpha$, (aciem habentis $A\alpha$;) & sic ubique. Sunt enim (per prop. 17.) singula αB triangula Semicirculorum complementia, ad $b\beta$ Parallelogramma, complementia figurarum Sinuum versorum, ut 1 ad 2: Item Trianguli αB cuiusque Centrum gravitatis ab α distat $\frac{2}{3}\alpha B$, (per prop. 6. hujus;) adeoque ab $A\alpha$, $\frac{2}{3}BV$; cujus itaque ad $BV = \beta v$ ratio, est ut 2 ad 3. Est ergo (propter $\frac{2}{3}\alpha B \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\alpha B$;) Trianguli cuiusque momentum respectu $A\alpha$, seu semiquadrantalibus Ungula Pyramidis (æqualis utique factu ex magnitudine, in illam distantiam;) ad respectivum Parallelepipedum (factum ex $b\beta$ in βv ;) ut 1 ad 3: Et sic ubique. Hoc est, $B\alpha A$ Ungula, quam illæ complent Pyramides; ad solidum $b\beta\alpha A$, ex Parallelepipedis conflatum; ut 1 ad 3. Totumque $A d \tau \alpha$ Solidum, Triplum istius Ungulæ Semicirculi (aciem habentis $A\alpha$;) Et partes partium respective; Nempe $A b \beta \alpha$ Solidum, triplum Ungulæ $B \alpha A$ aciem habentis $A \alpha$.

Est autem illa Semicirculi Ungula (seu momentum respectu $A\alpha$;) $\frac{2}{3}R^3$; & Sectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$; & Segmenti $\alpha B\alpha$, $\frac{1}{6}h^2R$; (per § Q, S, prop. 15.) Ergo totius $A \tau \alpha$ solidi, magnitudo $2R^3$; & portiois $A b \beta \alpha$, $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$; & portiois $b\beta\tau$, $\frac{1}{2}h^2R = 2R^3 - vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = hR^2 - \frac{1}{2}s^2R$.

Et similiter ostendetur portiois $A b K$ (extra trilineum) magnitudo, seu *Omn. sv*; (sumptis α arithm. propor.) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$.

Si vero ex hac portione Solidi $A b \beta \alpha$; auferatur pars $b\beta\alpha B$ (quæ nempe huic parallelogrammo incumbit;) hoc est, factum ex plano $A\beta v$ ($=vR$, per § Q, prop. 17,) in $\beta b = h$; hoc est $h v R = \frac{1}{2}R$; (propter s mediam proportionalem inter v & h ; hoc est, BV inter AV & $V\alpha$;) Relinquitur Solidi segmentum $A b B$, $=vR^2 + \frac{1}{2}s^2R - h v R = vR^2 + \frac{1}{2}s^2R - \frac{1}{2}R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$. Quod est aggregatum Omnium vR eò spectantium, sumptis v sinibus versis arithmetice proportionalibus: (Singulis enim bV rectis respective insitit planum $\alpha\beta v = vR$.) Seu, quod tantundem valet, Omnium sv , sumptis α arithmetice proportionalibus: (Ut ad § I. videbitur.) Hoc est factum ex omnibus sv in respectivas bK . Adeoque Sinuosa superficies, curvæ $A d \tau$ insitens, bifecat $K b B$ solidum, facitque solidum $A b B$ & solidum $Ab K$, invicem æqualia; (quod merito observandum;) utrumvis utique $\frac{1}{2}v^2R$: Est enim (propter $\alpha\beta v = vR$, & $AV = v$;) Solidum $K b B A = v^2R$.

Idemque per se, (sine ope portiois $A b \beta \alpha$;) sic colligitur. Cum singula plana (æqualibus intervallis sumpta, Solidum complementia,) quæ

S f

B;

Fig. 169,
170.

quæ rectis bB insistant, sint respectivis $\alpha\beta v$ æqualia, (quod ex constructione manifestum est;) sintque plana illa $\alpha\beta v = vR$ respective, (per § P, Q, prop. 17.) Solidi segmentum AbB , aut etiam solidum integrum $A\tau\alpha$, est aggregatum Omnium vR , eo spectantium; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad eorum maximum V . Sunt autem Omnes v , (arithmetice proportionales, usque ad maximum V ;) $= \frac{1}{2}V^2$, (per prop. 1. hujus.) Ergo $Omn. vR = \frac{1}{2}V^2R$; seu (restituto minusculæ v valore) $\frac{1}{2}v^2R$; ut prius. (Adeoque solidum integrum, (propter $v=V$;) $= \frac{1}{2}VR^3$, ut prius.) Cui si addatur portio $b\beta\alpha B$, habebitur portio $Ab\beta\alpha$, eadem quam prius exhibuimus. Cumque Solidum AbB sit (ut dictum est) $\frac{1}{2}v^2R$; sitque solidum $AKbB$, v^2R (propter basin $\alpha\beta v = vR$, & altitudinem $AV = v$;) erit etiam pars residua AbK , $\frac{1}{2}v^2R$, (ipsi AbB æqualis;) adeoque Superficies curva, curvæ Ab insistens, bisecat ipsum $AKbB$ Solidum.

C. Porro; Si intelligatur Solidum integrum ita positum, ut $\tau\alpha\alpha$ planum sit in situ horizontali, adeoque $A\tau\alpha$ (super illo erectum) in plano ad Horizontem recto: Momentum solidi totius, respectu $\tau\alpha$ rectæ; erit Duplum momenti Ungulæ semicirculi aciem habentis $A\alpha$, respectu ipsius $A\alpha$. (Et similiter in partibus respective sumptis.) Sunt utique singula $b\beta v$ parallelepipeda Solidum hoc complementia (ut ostensum est § A,) ad respectivas Pyramides αB Ungulam illam complentes, ut 3 ad 1. Eorumque Parallelepipedorum à perpendiculari plano $\tau\alpha A$ distantia Centri gravitatis, hoc est $\frac{1}{2}\beta v$ respective, (per prop. 2. hujus;) ad Pyramidum illarum distantias Centri gravitatis à perpendiculari plano $A\alpha$, $\frac{1}{4}BV$, (distant utique ab α , $\frac{1}{4}\alpha B$, per prop. 6 hujus; adeoque, $\frac{1}{4}BV$, ab $A\alpha$;) seu $\frac{1}{4}\beta v$; ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{4}$, seu 2 ad 1. Ergo, (propter $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$;) momentum cujusque Parallelepipedi, (adeoque & simul omnium,) ad respectivæ Pyramidis (adeoque & simul omnium) momentum; est ut 2 ad 1. Quod quidem momentum, est aggregatum Omnium $\frac{1}{8}\beta v^2$, sive totum Solidum, sive ipsius portionem, spectantium. (Sunt utique magnitudines, aggregatum Omnium βv ; distantiaque Centrorum gravitatis respective, $\frac{1}{2}\beta$.) Est autem Ungulæ Semicirculi $AD\alpha$ aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}R^3P$; Ungulæque Sectoris $B\alpha A$, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}vR^2 + \frac{1}{16}3\alpha$, (per § P, R, prop. 16.) Ergo Totius Solidi $A\tau\alpha$ (situ illo positi) momentum respectu α ; est $\frac{1}{8}R^3P$; & portionis $Ab\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{8}3R$. Atque hæc momenta, per respectivas magnitudines divisa,

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 315

divisa, (hoc est, per $2R^3$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, ut ad § A.) exhibent Fig. 169, Centrorum gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano distantias, nempe totius Solidi, 170.

$\frac{1}{6}P$; & portionis Solidi $A b \beta \alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{12vR + 6s^2}$.

Si verò ex eo Solidi $A b \beta \alpha$ momento; auferatur momentum ipsius $b \beta \alpha B$: restat momentum Solidi $A b B$. D.

Est autem Solidi $b \beta \alpha B$ magnitudo (per § B.) $s^2R = v h R$; ejusque Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano distantia, (quanta plani $A \beta \alpha$ à $\tau\alpha$, per § C. prop. 5.) est $\frac{eR + sv}{4v}$, per § Q. prop. 17. adeoque

momentum (in eo situ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}svhR = \frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}s^3R = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}s^3R = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{4}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R$: Hoc itaque, ex totius $A b \beta \alpha$ momento, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$, (§ C.) subductum; relinquit $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi $A b B$ (super plano $\alpha \beta \nu$ erecti) respectu $\tau\alpha$. (Quæ est summa omnium vR solidum complementum in suas respective distantias $\frac{eR + sv}{4v}$ ductarum; seu, omnium $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; sumptis v

arithmetice proportionalibus.) Illudque momentum, per magnitudinem divisum (§ B. traditam) $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; exhibet ejusdem $A b B$, Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$ distantiam $\frac{-3eR^2 + 3avR - s^3}{12vR - 6s^2} = 6v^2$.

Idem etiam per se (absque ope portionis $A b \beta \alpha$) sic colligitur. Cum singula plana rectis $b \beta$ insistentia, Solidum complementa, æqualia sint ipsis respective $\alpha \beta \nu = vR$, (ut dictum est;) sintque eorum Centra gravitatis in eadem ab $A\tau\alpha$ plano distantia, quæ ipsorum

$\alpha \beta \nu$ à $\tau\alpha$; hoc est $\frac{eR + sv}{4v}$ respective: Erunt singulorum momenta, respectu ipsius $A\tau\alpha$ perpendicularis plani, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, seu $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque Solidi $A b B$ momentum, erit Omnium Summa; hoc est, $Omn. \frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: sumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn. a*, (sumptis v arithmetice proportionalibus,) ipsum $A b B$ planum; hoc est, $-eR + sv$, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn. a*, $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR^2$.

Et similiter, *Omn. s*, (sumptis v arithmetice proportionalibus) sunt ipsum in semicirculo ABV planum; hoc est, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) Adeoque *Omn. s*, $\frac{1}{4}eR^2 = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR^2$. Item,

S f 2

Fig. 169. Item, *Omnia s v*, (hoc sensu,) sunt ipsius, in semicirculo, plani
170. *ABV*, momentum respectu *TA*, (est enim singulorum *s*, à *TA*

distantia *v*, respective;) hoc est, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{2}s^3$ per § F. prop. 15.) Adeoque, $Omn. \frac{1}{2}svR : = \frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}s^3R$.

Ergo, $Omn. \frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR : = -\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}s^3R$, momentum Solidi *AB*, respectu perpendicularis plani *Aτa*. Ut prius. Unde Centri gravitatis inde distantia habebitur. Atque huic momento, si addatur momentum Solidi *bβaB*, habebitur momentum Solidi *Abβa*, idem quod aliâ methodo jam invenimus.

E. Deinde; Si intelligatur Solidum illud integrum *Aτa*, ita positum, ut sit *Aτa* planum in situ horizontali, adeoque *aτx* planum, situ ad horizontem recto: Momentum Solidi totius, Duplum erit momenti Ungulæ Semicirculi *ADa*, aciem habentis *Aa*, respectu rectæ *τa*. Et similiter in partibus respective sumptis. Sunt enim (ut prius dictum § A. C.) Singula Parallelepipedum Solidum hoc complementia, ad respectivas Pyramides complentes illam Ungulam, ut 3 ad 1: Eorumque parallelepipedorum rectis *βb* insistentium distantie Centrorum gravitatis ab erecto plano *τa*, $\frac{1}{2}βb = \frac{1}{2}h$, respective; Pyramidum verò à *τa* plano, Distantie Centrorum gravitatis, respective, $\frac{1}{4}Va = \frac{3}{4}h$. Cum igitur magnitudines sint ut 3 ad 1; & distantie, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3; erit (propter $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$) Momentorum ratio, ut 2 ad 1. Hoc est, Momentum Solidi *Aτa* (hoc situ positi) respectu *τo* rectæ, duplum momenti Ungulæ Semicirculi *ADa*, aciem habentis *Aa*, respectu rectæ *τa*: Et portionis Solidi *Abβa* momentum, duplum momenti Ungulæ correspondentis *BaA*, (aciem habentis *Aa*,) respectu *τa*. Est autem (per § C. F. prop. 16.) Ungulæ Semicirculi, aciem habentis *Aa*, momentum respectu *τa*, $\frac{1}{2}R^4$; Ungulæque Sectoris *BaA*, $\frac{1}{2}vR^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$. Ergo Solidi *Aτa* sic positi, momentum respectu *τa*, $\frac{1}{2}R^4$; & portionis *Abβa*, $\frac{1}{2}vR^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$. (Quæ est summa, omnium $\frac{1}{2}sh^2$, eo spectandis, summa omnium *sh*; & distantia $\frac{1}{2}h$ respective.) Eaque momenta per respectivas magnitudines, $2R^3$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, (per § A.) divisa; exhibent Centrorum gravitatis ab erecto plano *τax*, distantias: Nempe, totius Solidi, $\frac{2}{3}R$; & portionis *Abβa*, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6vR + 3s^2}$.

F. Ex illo autem portionis *Abβa* momento; si eximatur momentum portionis *bβaB*: habetur momentum Segmenti *AbB*. Est.

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 317

Est autem $b\beta a B$, (per § B.) vbR seu s^2R , distantia Centri Fig. 169, gravitatis (per prop. 2 hujus,) $\frac{1}{2}b\beta = \frac{1}{2}h$: Ergo momentum (in hoc 170.

situ) respectu rectæ τa , $\frac{1}{2}vb^2R = \frac{1}{2}s^2hR$, seu (propter $vb = s^2$, & $h = 2R - v$), $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$. Hoc itaque subductum ex Portionis Solidi $AB\beta a$ momento, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$ (§ præced.) Relinquit $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$, momentum Solidi AbB (in hoc situ) respectu rectæ τa . Quod per magnitudinem, $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$, (§ B.) divisum, exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à τa in plano, $\frac{4vR^2 - 2s^2R - \frac{1}{2}s^2v}{6vR - 3s^2}$: seu $\frac{4vR^2 - 2vbR + 2v^2h}{6vR - 3vb} =$

$\frac{4R^2 - 2hR + 2vh}{6R - 3h} = \frac{2vR + 2vh}{3v} = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$: Adeoque, à bB ; $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}v$: Et propterea momentum ejusdem AbB solidi (sic positi) respectu bB , $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$.

Quod quidem momentum, est summa omnium planorum $a\beta v$ eo spectantium, (hoc est, omnium vR , per § O, Q. prop. 17. sumptis v arithmetice proportionalibus usque ad V eorum maximum,) in suas respective à bB distantias ductorum, hoc est, in $V - v$ respective: Hoc est, *Omnium* vVR , minus *Omn.* v^2R . Adeoque, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}V^3R - \frac{1}{2}V^2R = \frac{1}{6}V^3R$, seu $\frac{1}{6}v^3R$: ut prius.

Idem per se habebitur, (sine ope portionis $Ab\beta a$.) Cum enim singula rectis bB insistentia plana Solidum complentia, æqualibus intervallis ab invicem distita, sint æqualia ipsis $a\beta v = vR$ respective, (ut dictum est:) Sintque in distantis à vertice TA , ipsis v respective æqualibus; erit cujusque momentum respectu TA , v^2R ; adeoque summa omnium (propter v arithmetice proportionales, usque ad V maximum,) $\frac{1}{3}V^3R$, (per prop. 1. hujus.) Seu, restitutâ v minusculâ, $\frac{1}{3}v^3R$. Adeoque propter magnitudinem, $\frac{1}{2}v^2R$, (per § B.) Centri gravitatis à TA distantia $\frac{2}{3}v$: Ergo, à τa , $2R - \frac{2}{3}v$, seu $\frac{4}{3}R - \frac{2}{3}h$; ut prius: Et propterea ejusdem, respectu τa , momentum, $v^2R^2 - \frac{1}{3}v^3R$, seu $\frac{4}{3}v^2R^2 - \frac{1}{3}v^3hR$, hoc est $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, ut prius. Atque huic momento, si addatur momentum portionis $b\beta a B$, habebitur momentum portionis $Ab\beta a$; eadem quæ prius.

Idemque Solidum AbB , eodem situ positum, si respectu rectæ Aa consideretur, Momentum ejus est aggregatum omnium $a\beta v$ planorum solidum complentium (hoc est, omnium vR , eo spectantium,) in suas respective centrorum gravitatis distantias ab Aa ; (hoc est, in

G

Fig. 169, $\frac{-eR+av}{v}$ respective, per § P, Q. prop. 17.) Hoc est, Omnium

170.

$-eR^2+avR$, seu Omnium $-aR^2+sR^2+avR$; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad V eorum maximum.

Sunt autem *Omn. a*, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) ipsum planum $A b B$; hoc est, $-eR+av$, per § B. prop. 17. Adeoque *Omn. aR^2*: $= -eR^3+avR^2$.

Er, *Omn. s*. (hoc sensu,) ipsum Semicirculi segmentum ABV $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; per § F. prop. 15. Adeoque *Omn. sR^2*: $= \frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$.

Item, *Omn. av*, sunt ipsæ $b B$ rectæ, planum $A b B$ complentes, in suas respective à $T A$ distantias v ; Hoc est, Plani $A b B$ momentum respectu $T A$; Hoc est, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; per § F. prop. 17. Adeoque *Omn. avR*: $= -\frac{1}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$.

Ergo, *Omn. -aR^2+sR^2+avR*: $= \frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Quod itaque est momentum Solidi $A b B$ respectu $A \alpha$.

Idemque momentum, per magnitudinem $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$ (§ B) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

H.

Huic autem Solidi $A b B$ momento sic reperto, si addatur momentum Solidi $b \beta \alpha B$; habetur momentum Solidi $A b \beta \alpha$, respectu $A \alpha$.

Est autem $b \beta \alpha B$ Solidi magnitudo $s^2R=vhR$, per § B: Ejusque ab $A \alpha$ distantia Centri gravitatis, (idem quod ipsius $\alpha \beta v$ plani, per prop. 1, 5. hujus) est $\frac{-eR+av}{v}$, per § Q. prop. 17. Ergo ejusdem, respectu $A \alpha$, momentum est; $-ebR^2+avhR=-2eR^3+evR^2+as^2R=-2eR^3+avR^2-svR^2+as^2R$.

Hoc itaque, Solidi $A b B$ momento (modo reperto) $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$, additum; exhibet Solidi $A b \beta \alpha$ momentum respectu $A \alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$. (Adeoque totius $A \tau \alpha$ Solidi, cum sit in hoc casu, $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, $s=0$, & $e=a-s=a=\frac{1}{2}P$, momentum respectu $A \alpha$, $-\frac{1}{8}R^3P+R^3P=\frac{7}{8}R^3P$.) Et momento per magnitudinem $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$ (§ A) diviso; habetur ipsius $A b \beta \alpha$ Solidi, distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{-5eR^2+4avR-svR+2as^2}{4vR+2s^2}$. (Adeoque in integro $A \tau \alpha$ Solido, $\frac{1}{6}P$.)

Atque hoc (sive totius $A \tau \alpha$ Solidi, sive ipsius portionis $A b \beta \alpha$) momen-

PROP. XVII. De Calculo Centri Gravitatis. 319

momentum respectu $A\alpha$, est aggregatum omnium ash eo spectantium; sumptis a arcibus arithmetice proportionalibus, usque ad maximum A . Sunt enim, rectangula seu parallelepipeda $b\beta v$, summa omnium sh (ut § A dictum est,) eorumque ab $A\alpha$ distantia, $b\alpha = a$, respective.

Quaque de his Solidi portionibus dicta sunt, facile ad alias ubi opus fuerit transferentur: Quarum tum magnitudines, tum momenta & Centra gravitatis, ab his quae jam traduntur facile derivari poterunt: Puta, Portionis $b\beta \tau$, aut $A\beta K$, &c.

Si enim ex totius Solidi $A\tau\alpha$, magnitudine $2R^3$; Momento respectu $\tau\alpha$, in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^3P$; respectu $\tau\alpha$ in erecto plano Fig. 170. $\tau\alpha\alpha$, $\frac{1}{3}R^4$; & respectu plani super $A\alpha$ erecti, $\frac{1}{4}R^3P$; supra traditis: Auferantur Magnitudo, & respectiva momenta Solidi $A\beta\beta\alpha$, $vR^2 + \frac{1}{2}v^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}v^3R$; & $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi $b\beta \tau$, magnitudo, $2R^3 - vR^2 - \frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}v^3R$; respectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\alpha$ erecto, $\frac{1}{3}R^4 - \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; respectu plani $A\alpha$ erecti, $\frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{4}eR^3 - avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$. Atque haec Momenta per Magnitudinem divisa; exhibent Solidi $b\beta \tau$ distantiam Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3R^2P6e - R^2 - 6svR - 4s^3}{48R^2 - 24vR - 12s^2}$; à plano $\tau\alpha\alpha$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 - 4s^2R + s^2v}{12R^2 - 6vR - 3s^2}$; ab $A\alpha$ plano, $\frac{3R^2P - 10eR^2 - 8avR + 2svR - 4as^2}{16R^2 - 8vR - 4s^2}$.

Similiter; cum solidi portio $A\beta\beta\alpha$ parallelogrammo incumbens, Magnitudinem habeat (ex ductu $A\alpha = 2R$, in $a\beta v = vR$, factam,) $2vR^2$; & Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, (ex ductu Magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $a\beta v$, à $\tau\alpha$, $eR + sv$ $\frac{4v}{4v}$; per § O, Q. prop. 17.) $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}vR^2$; & respectu $\tau\alpha\alpha$ erecti plani, (ex ductu $aC = R$, dimidii longitudinis prismatis, in magnitudinem $2vR^2$,) $2vR^3$; & respectu $A\alpha$ erecti plani, (ex ductu magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani $a\beta v$ ab $A\alpha$, hoc est, in $\frac{eR - av}{v}$, per § P, Q. prop. 17.) $-2eR^3 + 2avR^2$ (est enim Prismatis centrum gravitatis in medio rectae Centra gravitatis basium oppositarum jungente, per prop. 1, & hujus:) Si ex his Solidi

I.

320 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 169, Solidi $AK\beta\alpha$ magnitudine & momenti; auferantur Magnitudo & Momenta respectiva Solidi $A b\beta\alpha$; $vR^2 + \frac{1}{2}v^2R$; & $\frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{6}v^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}v^3R$; & $-\frac{1}{4}R^3 + avR^2 - \frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{2}av^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi AbK , magnitudo, (hoc est, aggregatum *Omnium* $s v$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus,) $vR^2 - \frac{1}{2}v^2R = \frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ erecti, (hoc est, *Omnium* $\frac{2}{3}v$, eo spectantia,) $\frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{4}vR^2 - \frac{1}{6}v^3R$; Momentum respectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{6}v^3R$; Momentum respectu plani $A\alpha$, (hoc est, *Omnium* $a s v$, eo spectantia,) $-\frac{1}{4}vR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}vR^2 - \frac{1}{2}av^2R$. Atque hæc momenta, per magnitudinem divisa; exhibent, Solidi

AbK , distantiam Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3vR^2 + 3svR - 2s^3}{12vR - 6s^2} = 6v^2$;

à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{16vR^2 - 8s^2R + 2s^2v}{12vR - 6s^2} = 6v^2 = \frac{4}{3}R + \frac{s^2 - hv}{3v}$; (adeoque, à

TA , $\frac{4}{3}R - \frac{s^2}{3v} = \frac{4}{3}R - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}v$; & propterea ejusdem respectu TA ,

momentum, hoc est aggregatum *Omnium* $\frac{1}{2}sv^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus, $\frac{1}{6}v^3R = \frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}v^3R = \frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}v^3R$; distantiamque ab $A\alpha$ plano, $-\frac{3vR^2 + 4avR + svR - 2as^2}{4vR - 2s^2} = 2v^2$.

Item; Portionis $AKbB$, magnitudo & momenta, habentur ex Portionum AbK , & AbB , magnitudinibus & momentis (respective) additis: Vel subductis Portionis $b\beta\alpha B$ magnitudine & momenti, ex magnitudine & momenti (respective) portionis $AK\beta\alpha$: Vel etiam eodem modo quo habentur ipsius $b\beta\alpha B$ magnitudo & momenta. Nempe ex ductu plani $\alpha\beta v = vR$, in $AV = v$, habetur ipsius $AKbB$ (prismatis) magnitudo v^2R . Atque ex hac magnitudine in $\frac{2}{3}v$ (ejusdem Centri gravitatis à TA vel bB distantiam,) habetur ejusdem, respectu TA vel bB , momentum, $\frac{1}{3}v^3R$. Ductâque in $h + \frac{1}{2}v = 2R - \frac{1}{2}v$ (distantiam à $\tau\alpha$), ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{2}v^3R$. Eâdemque magnitudine ductâ in Centri gravitatis distantiam ab $A\alpha$, $\frac{-vR + av}{v}$; & à plano $A\tau\alpha$,

$\frac{vR + sv}{4v}$, (easdem utique quæ sunt, in $\alpha\beta v$ plano, distantia ab $A\alpha$, & $\tau\alpha$;) habentur ejusdem momenta, respectu $A\alpha$, $av^2R - vR^2$; & respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{4}v^2R$.

Et

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 321

Et similiter de portionibus aliis, mutatis mutandis, judicandum erit. Fig. 169,
170.

Super $A D \alpha$ Semicirculo, erigi intelligatur Cylindri recti portio; ea ratione, ut super singulas $B V$ ordinatim applicatas, altitudinem habeat respectivis $b B$ æqualem, hoc est arcubus $B A$. Aut etiam (quod eodem recidit) super *Trilinei Restituti* $A \tau \alpha$, (quam *Figuram Sinuum versorum, Arcuumve*, dicimus,) rectâ $A \alpha$, positus ad angulos rectos $A D \alpha$ Semicirculus, promoveri intelligatur usque ad $T \tau$, Semicylindrum describens; qui Semicylindrus inuosa superficie, inuosa rectâ $A d \tau$ ad angulos rectos ubique insistente, secari intelligatur, Solidum $A d \tau \alpha$ terminante.

Manifestum est, ex constructione, Plana Solidum hoc complementia, rectis $b B$ directe insistentia, Parallelogramma esse rectangula; ex rectis $b B$ fig. 170. hoc est arcubus $B A$ fig. 169. in $B V$ eorundem sinus rectos, seu ad diametrum circuli ordinatim-applicatas, ductis: Hoc est, rectangula $b B V$, fig. 166, 168. Hoc est, a rectangula, sumptis arcubus a non quidem arithmetice proportionalibus, sed qui sinibus versis $A V$, &c. arithmetice proportionalibus conveniunt; quò plana Solidum hoc complementia sint æqualibus intervallis dissita. Adeoque $Ab V$, Solidi frustum, est aggregatum omnium $a s$, eo spectantium, sumptis v sinibus versis arithmetice proportionalibus.

Manifestum item est, ex constructione, Plana rectis $b \beta$ directe insistentia, Solidum idem complementia, (cum semicylindri portio sit,) semicirculo rectæ $A \alpha$ insistenti parallela, Segmenta esse Semicirculi, ut $B V \alpha$ fig. 169. ipsis $b \beta$ rectis fig. 170. (arcuum arithmetice proportionalium sinibus versis) æquealta. Puta rectæ $x \xi$, Segmentum $O X D \alpha$; rectæ $z \zeta$, Segmentum $S Z D \alpha$, & sic deinceps; usque ad ultimum $\Phi F \alpha$ seu ipsum α punctum, si totum Solidum spectemus; vel usque ad $V B \alpha$ segmentum, si solidi portionem $A b \beta \alpha$, spectemus. Et sic alibi. Adeoque $A b \beta \alpha$, Solidi portio, est aggregatum omnium $V B \alpha$ Segmentorum Semicirculi, eo spectantium sumptis a arcubus, (puta $A X$, $A Z$, &c.) arithmetice proportionalibus. Sunt autem Omnia Segmenta $O X D \alpha$, $S Z D \alpha$, &c. totidem Semicirculi demptis contrariis Segmentis $O X A$, $S Z A$, &c. Hoc est, Semicirculus $A D \alpha$ in rectam $a \tau$ ductus seu $A \alpha \tau T$ Semicylindrus, si totum Solidum spectemus; vel. si portionem $A b \beta \alpha$ spectemus, idem Semicirculus in $a \beta$ ductus, (seu $A \alpha \beta K$ Semicylindrus:) Demptis utrobique omnibus $O X A$, $S Z A$ &c. hoc est omnibus $A B V$ eo spectantibus; Hoc est, dempro Solido quod ipsi $A \tau T$, vel $A b K$, trilineo insistere deberet ad respectivum Semicylindrum complendum;

$T \tau$

(cui

Fig. 169, (cui a quale est, quod simili portioni puncto σ adjacenti incumbit: Puta, quod AzK trilineo incumbet, incumbenti trilineo $\tau e \zeta$, & sic ubique.)

17c.

Est autem Segmentum BVA quodvis, (per § F. prop. 15.) $\frac{1}{2}eR - \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sk - \frac{1}{2}sv$. Adeoque summa omnium eo spectantium, sunt *Omnia*, $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sk - \frac{1}{2}sv$, usque ad (eo spectantium) ultimum, quod dicamus impræsentiarum $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$.

Sunt autem *Omnia* a , (arcus arithmetice proportionales, usque ad A maximum,) $= \frac{1}{2}A^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}AR = \frac{1}{4}A^2R$.

Item, *Omnia* s , (sinus recti arcubus illis convenientes, usque ad S maximum,) sunt $= VR$, (per § Q. prop. 17:) adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}SR = -\frac{1}{2}VR^2$.

Item, *Omnia* sv , usque ad SV maximum, sunt facta ex sinibus rectis arcuum arithmetice proportionalium, puta XO, ZS, &c. fig. 169. hoc est ξo , ζv , &c. fig. 17c. ductis in respectivos sinus versos, ut AO, AS, &c. Fig. 169, 17c. hoc est, xq , zK , &c. sinuum versorum ξx , ζz , &c. residuos ad diametrum $Aa = 2R$. (Nempe, Solidi prius constructi, portio AbK, § A, I, exhibita.) Hoc est, *Omnia* ξo , ζv , &c. in $2R$ ductæ; demptis eisdem in ξx , ζz , &c. respective ductis. Sunt autem, *Omn.* ξo , ζv , &c. hoc est *Omn.* sv usque ad S maximum, hoc est $\alpha \beta v$ trilineum, $= VR$; (ut modo dictum:) adeoque eadem *Omnia* in $Aa = 2R$, sunt $2VR^2$; Item eadem *Omnia* in respectivas ξx , ζz , &c. hoc est, *Omnia* sh usque ad SH maximum, (seu Solidi, prius constructi, portio Ab βa , § A exhibita;) sunt Triplum momenti Sectoris correspondentis BaA fig. 169. respectu rectæ Aa, (ut § L prop. 17. & § A hujus ostensum est,) hoc est, $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$; per § S. prop. 15. vel § A hujus. Ergo, eadem *omnes* ξo , ζv , &c. in respectivas AO, AS, &c. seu xq , zK , &c. hoc est, *Omn.* sv , usque ad maximum SV , sunt, $2VR^2$ minus $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$; hoc est $VR^2 - \frac{1}{2}S^2R$ ($= \frac{1}{2}V^2R$, ut § A, I.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$.

Omnia igitur, AXO, AZS, &c. Semicirculi Segmenta, usque ad maximum (eo spectantium) ABV, (Solidum AbK complementa;) hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}sv$: usque ad $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$: sunt, $\frac{1}{4}A^2R$, minus $\frac{1}{2}VR^2$, plus $\frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$: Hoc est, $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R = \frac{1}{4}eR$. (Nempe Solidi hujus portio AbK.)

Ergo, *Omnia* OXa, SZa, &c. Segmenta, hoc est totidem Semicirculi, demptis ipsis AXO, AZS, &c. sunt (propter Semicirculum $= \frac{1}{4}RP$;) $\frac{1}{4}AKP$, minus $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R$; Hoc est, $\frac{1}{4}AKP - \frac{1}{4}A^2R + \frac{1}{4}S^2R$: seu (restituis minuscularum valoribus,) $\frac{1}{4}AKP - \frac{1}{4}A^2R$

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 323

$+\frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$: Quæ est, Portionis Solidi quadrilineo Fig. 169, 170.
Ab βa incumbens magnitudo.

Adeoq; totum A d τa solidum, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $s = 0$;) est $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{8}Rf^2 = \frac{1}{8}RP^2$.

Sed & eadem totius Solidi magnitudo, sic facilius colligitur. Sumptis in A a diametro, duobus punctis quibuscvis æqualiter à C Centro utrinque remotis, ut S, Σ : manifestum est, tum sinus rectos SZ, ΣE , fig. 169. invicem æquales esse; tum rectas SZ, Σe , seu Zz, Ee, fig. 170. hoc est, arcus BA, EA, seu BA, Ba, fig. 169. simul æquales Semiperipheriæ AB α , seu τa rectæ. Adeoque duo simul rectangula, zZ \times ZS, eE \times ES, æqualia uni $\tau a \times$ SZ. Hoc est, Omnes BV totius Semicirculi, in respectivas bB; tantundem esse arque Omnes BV unius quadrantis (hoc est ipse quadrans ADC = $\frac{1}{8}RP$;) in $\tau a = \frac{1}{2}P$, ductæ. Hoc est, $\frac{1}{8}RP^2$; totius Solidi magnitudo; ut prius.

Hinc etiam; Portionis Solidi b $\beta \tau$ magnitudo colligitur. Nam totum Solidum = $\frac{1}{8}RP^2$; dempto segmento Ab $\beta a = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: Relinquit Segmentum $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{4}aRP + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; Vel (sumpto $a = \frac{1}{2}P - a$;) $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$. Quod ipsum in inquisitione prius repertum erat. Quippe, Sumpto AK = $\tau \beta$, (adeoque restituto a pro a ;) erit $\tau \beta b = AKb$, cujus magnitudo supra inventa est $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; seu $\frac{1}{4}efR$. Est enim, ef, hoc est $a - s$ in $a + s$, = $a^2 - s^2$.

Porro; Si ex Solido Ab $\beta a = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: auferratur Solidum b βa B; Hoc est, bB = a , in Segmentum Semicirculi V B $\alpha = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sb$ (per § F. prop. 15. quippe quod in BVA est u, v , idem in BV α est a, b ; & s utrobique idem;) hoc est (propter $a = \frac{1}{2}P - a$, & $b = \frac{1}{2}R - v$;) in $\frac{1}{4}RP - \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$; Nempe $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, seu $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}eaR - \frac{1}{2}asv$; Relinquitur Solidi portio Ab B = $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$: Seu summa rectangulorum omnium as solidum illud complementum; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Aut etiam; Si, ex Semicylindri portione AKb B; hoc est, ex Semicirculi Segmento ABV = $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) in bB = a ducto; hoc est, ex $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$; auferatur Semicylindri portio Ab K = $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K,) restabit Semicylindri portio Ab B, = $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$; ut prius.

Similiter de Momentis judicandum erit.

T t 2

Nempe

M.

324 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 169, Nempe, Momentum Solidi A b K, respectu T A, idem est at-
que Momenta Omnium A B V Semicirculi Segmentorum illud com-
170. plementum respectu ipsius (plani tangentis) T A: Hoc est, (per § L.
prop. 15.) $Omn. \frac{1}{2} \pi K^2 + \frac{1}{2} \pi v K - \frac{1}{3} \pi v^3$: seu $Omn. \frac{1}{2} \pi K^2 - \frac{1}{2} \pi K^2 +$
 $\frac{1}{2} \pi v K - \frac{1}{3} \pi v^3$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem $Omn. a$, (arithmetice proportionales usque ad, a maxi-
mum,) $\frac{1}{2} \pi a^2$ (per prop. 1. hujus.) Adeoque $Omn. \frac{1}{2} \pi a R^2 =$
 $\frac{1}{4} \pi a^2 R^2$.

Item Omnes s (eo spectantes,) sunt ipsum $a b v = v R$, (per
§ Q prop. 17.) Adeoque $Omn. - \frac{1}{2} \pi K^2 = - \frac{1}{2} \pi v R^2$.

Item, $Omn. s v$, sunt ipsum A b K Solidum ex ductu rectarum,
 $b v$ in b K; hoc est (per § I.) $\frac{1}{2} v^2 R = v K^2 - \frac{1}{2} \pi K$. Adeoque $Omn.$
 $\frac{1}{2} v R = - \frac{1}{2} v K^2 + \frac{1}{4} \pi K^2$.

Item, $Omn. s^2$: (per § V. prop. 13.) $= Omn. o^2 R$. Sunt autem
 $Omn. o^2$, hoc est, quadrata Ordinatum-applicatarum, Segmentum
A B V complementum, seu $Omn. s^2$, sumptis v arithmetice proportio-
nalibus: Duplum Momenti Segmenti A B V (fig. 69.) respectu
A a: Hoc est (per § V prop. 15.) $\frac{2}{3} v K^2 - \frac{1}{3} \pi K^2 + \frac{1}{3} \pi v^2$: Adeoque
 $Omn. o^2 R = (Omn. s^2) = \frac{2}{3} v K^2 - \frac{1}{3} \pi K^2 + \frac{1}{3} \pi v^2 R$: Et prop-
terea $Omn. - \frac{1}{3} \pi v^3 = - \frac{2}{3} v K^2 + \frac{1}{3} \pi K^2 - \frac{1}{3} \pi v^2 R$.

Ergo, $Omn. \frac{1}{2} \pi a R^2 - \frac{1}{2} \pi K^2 + \frac{1}{2} \pi v R - \frac{1}{3} \pi v^3$: Hoc est, Momentum
Solidi A b K, respectu T A, est, $\frac{1}{4} \pi a^2 R^2 - \frac{1}{3} \pi K^2 + \frac{1}{2} \pi v R -$
 $\frac{1}{3} \pi v^3$.

Adeoque, propter ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4} \pi a^2 R - \frac{1}{3} \pi K^2$, (per § K.)

Distantia Centri gravitatis à T A, $R - \frac{8 v K^2 - 4 s^2 R + 4 s^2 v}{9 a^2 - 9 s^2}$

$= R - \frac{4 v^2 R + 4 s^2 v}{9 e f}$; & à τa , $R + \frac{8 v K^2 - 4 s^2 R + 4 s^2 v}{9 a^2 - 9 s^2} = R$

$+ \frac{4 v^2 R + 4 s^2 v}{9 e f}$; & propterea ejusdem, respectu τa , momentum,
 $\frac{1}{4} \pi a^2 K^2 - \frac{1}{3} \pi K^2 + \frac{1}{2} \pi v R^2 + \frac{1}{3} \pi v^2 R$.

Si autem Solidi hujus A b K momenta, ex respectivis Semicylindri
'AK β momentis auferantur: Relinquantur respectiva Solidi A B β
momenta. Est autem Semicylindri hujus magnitudo (ex ductu Se-
micirculi AD $\alpha = \frac{1}{4} R P$, in $a \beta = a$), $\frac{1}{4} \pi R P$; Centrique gravitatis distantia
à T A, vel τa , A C vel C $\alpha = R$. Adeoque ipsius respectu T A,
vel τa , momentum, $\frac{1}{4} \pi R^2 P$. Unde subductis, Solidi A b K mo-
mentis, modo traditis, $\frac{1}{4} \pi a^2 K^2 - \frac{1}{3} \pi K^2 + \frac{1}{2} \pi v R^2 - \frac{1}{3} \pi v^2 R$; & $\frac{1}{4} \pi a^2 R^2$
 $- \frac{1}{3} \pi K^2 + \frac{1}{2} \pi v R^2 + \frac{1}{3} \pi v^2 R$: Relinquitur Solidi A b β momen-
tum

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 325

tum respectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{2}{5}vR^3 + \frac{2}{5}s^2vR$; & Fig. 169, respectu τa , $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{2}{5}vR^3 - \frac{2}{5}s^2vR$: Hujusque 170. propterea Distantia Centri gravitatis (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aKP$

$$= \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R, \text{ per } \S K.) \text{ à TA, } R + \frac{8vR^2 - 4s^2R - 14s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2}$$

$$= R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}; \text{ à } \tau a, R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2}$$

$$= R - \frac{4v^2R - 14s^2v}{9aP - 9ef}.$$

Si verò eadem Solidi AbK momenta, ex respectivis Segmenti Semicylindri AKbB, auferantur: habentur respectiva Momenta Solidi AbV. Est autem segmenti semicirculi ABV magnitudo $\frac{1}{2}eR - \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) quæ ducta in bB = a, exhibet magnitudinem segmenti Cylindri AKbB, $\frac{1}{2}eaR - \frac{1}{2}asv$: Centrique gravitatis distantia (utpote eadem quæ Segmenti Semicirculi ABV,

per § C. prop. 5.) à TA, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à τa , $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$:

Adeoquæ momentum respectu TA, $\frac{1}{2}eaR^2 (-\frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2) + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu τa , $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$;

(eadem quæ plani ABV momenta, in a ducta.) Unde subductis respectivis solidi AbK momentis, modo exhibitis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{2}{5}vR^3 - \frac{2}{5}s^2vR$, & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{2}{5}vR^3 + \frac{2}{5}s^2vR$: Relinquitur Solidi AbB, momentum respectu TA, (hoc est, Omnia asv, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{2}{5}vR^3 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{5}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; & respectu τa , (hoc est, Omnia asb, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{2}{5}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{5}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L) Solidi AbB,

distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv}$;

à τa , $R - \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv} = R - \frac{4v^2R^2 - 14s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$.

Totumque A τa Solidum, (sive spectetur ut AbBa, sive ut

AbB, perinde est,) momentum habet (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$.) respectu TA, $\frac{1}{16}k^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; respectu τa , $\frac{1}{16}k^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$.

Centrique

Fig. 170. Centrique gravitatis distantia à T A, est $R + \frac{64R^3}{9P^2}$; à T a,
 $R - \frac{64R^3}{9P^2}$.

N. Porro; eadem A B V Segmenta plana, Solidum A b K complentia; seu, *Omnia*, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) ab A a, distant ipsis b B = a arcibus arithmetice proportionalibus: Adeoque eorundem omnium, hoc est ipsius A b K Solidi, Momentum respectu A a, sunt *Omn.* $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$; seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $a^2 = \frac{1}{3}a^3$ (per prop. 1.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R = \frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omn.* as : hoc est, Omnes s, trilineum $\alpha\beta v$ complentes, in a, eorundem ab A a distantias ductæ; sunt ejusdem $\alpha\beta v$ momentum respectu A a; hoc est (per § P, Q. prop. 17.) $-eR^2 + avR$. Adeoque *Omn.* $asR = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{2}avR^2$.

Item, *Omn.* asv : Sunt ipsum A b K præcedentis Solidi (ex ductu rectarum βv in b K respective) momentum respectu A a; hoc est, $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{4}as^2R$; per § I. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asv = -\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}as^2R$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Hoc est ipsius A b K Solidi Momentum respectu A a; est, $\frac{1}{6}eR^3$ ($= \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{8}svR^3$) $+ \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$.

Hoc itaque per ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}as^2R$ (per § K.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab A a,

$$\frac{3eR^2 + 3svR - 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 = 6ef}$$
.

Illudque Solidi A b K momentum, ex momento Semicylindri A K βa , Subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{4}aRP$ (§ M. ostensâ) in $\frac{1}{2}a$ distantiam Centri gravitatis ab A a (per prop. 2.) ductâ; hoc est, ex $\frac{1}{8}a^2RP$ subductum: Relinquit Solidi A b βa momentum respectu ejusdem A a, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{4}as^2R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}as^2R$, per § K.) Distantia Centri gravitatis ab A a, $\frac{3a^2P - 3eR^2 - 3svR - 4a^3 + 6as^2}{6aP - 6a^2 + 6s^2 = 6aP - 6ef}$.

Idemque Solidi A b K momentum, ex momento Solidi A K b B, subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$ (§ M. ostensâ) in $\frac{1}{2}a$ (Distantiam Centri gravitatis ab A a) ductâ; hoc est, ex $\frac{1}{4}ea^2R$

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 327

$\frac{1}{4}ea^2R + \frac{1}{4}a^2sv$: Relinquit Momentum Solidi A b B, respectu ejusdem A α , (seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2s$: eo spectantia, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}vR^2 - \frac{1}{8}a^3R + \frac{1}{4}ea^2R - \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$, seu (propter $e=a-s$), $-\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{8}vR^2 + \frac{1}{4}as^2R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis ab A α , est $\frac{-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}vR^2 + \frac{1}{2}a^3R - 6a^2sR + 6as^2R - \frac{1}{4}6a^2sv}{6a^2R - 12asR + 6s^2R (=6e^2R) + 12asv}$.

Totumque Ara solidum quod spectat; (sive consideretur ut A b $\beta\alpha$, sive ut A b B, perinde est,) Momentum ejus resp. A α (propter $a=\frac{1}{2}l$, $v=2R$, & $s=0$), est $\frac{1}{96}R^3P^3 - \frac{1}{16}R^3P$: Distan. Cen. grav. ab A α , $\frac{R^2}{P}$.

Denique; Eadem A B V segmenta plana, Solidum A b K fig. 170. complentia Centra gravitatis habent tantundem à plano A $\tau\alpha$ distantia, quantum ab A α distant eorundem Centra in fig. 169. Eorumque omnium respectu A α fig. 169. momenta; Hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$: (per § R. V. prop. 15.) sunt ipsum solidi A b K momentum respectu plani A $\tau\alpha$ erecti.

Sunt autem *Omn.* v , (sumptis a arithmetice proportionalibus,) Hoc est, arcuum arithmetice proportionalium Sinus versis; eo spectantes; idem atque A b K planum; hoc est, eR , (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 = \frac{1}{3}eR^3$.

Et, *Omn.* s^2 , eo spectantia; *Duplum* Momenti ipsius $a\beta v$ respectu $\tau\alpha$; hoc est, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{6}s^2R = -\frac{1}{12}eR^3 - \frac{1}{12}svR^2$.

Item, *Omn.* s^2v , sunt *Duplum* Momenti Solidi A b K præcedentis, (ex ductu rectarum βv , in b K respective,) respectu Plani (erecti) A $\tau\alpha$; seu $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{3}s^3R$; (per § I. prop. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{12}eR^3 + \frac{1}{12}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R$.

Ergo *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{12}eR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R = \frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{8}s^3R$. Quod itaque est Solidi A b K momentum respectu erecti plani A $\tau\alpha$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}asR = \frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, est $\frac{12aR^2 - 12sR^2 - 2s^3}{9a^2 - 9s^2} = \frac{12eR^2 - 2s^3}{9ef}$.

Illudque Solidi A b K momentum, ex Semicylindri A K $\beta\alpha$ momento respectivo subductum; hoc est (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP$, atque

O.

Fig. 169, atque Distantiam Centri gravitatis a plano $A\tau\alpha$, eandem quæ Semi-
170. circuli à sua diametro, $\frac{8R^2}{3P}$, per § Q. prop. 15.) ex $\frac{2}{3}R^3$: Relin-

quit Momentum Solidi $Ab\beta\alpha$ respectu plani $A\tau\alpha$ (ereSti,) $\frac{2}{3}AR^3$
 $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{12}s^3R$. Adeo-
 que (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{4}AR^3 - \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{4}R^3 = \frac{1}{4}AR^3$
 $-\frac{1}{4}eR^3$, per § K.) Distantia Centri gravitatis a plano $A\tau\alpha$,
 $\frac{17fR^2 + 2s^3}{9aP - 9ef} = \frac{12aR^2 + 12sR^2 + 2s^3}{9a^2 - 9a^2 + 9s^2}$.

Idemque Solidi AbK momentum; ex Segmenti Semicylindri
 AKb momento respectivo subductum; hoc est (propter magnitudi-
 nem $\frac{1}{2}eAR + \frac{1}{2}asv$, & distantiam Centri gravitatis a plano $A\tau\alpha$, ean-
 dem quæ Segmenti Semicirculi ABV à diametro $A\alpha$, $\frac{v^2R - \frac{1}{2}v}{eR + 3sv}$ per
 § R. prop. 15.) ex $\frac{1}{2}av^2R + \frac{1}{2}as^2v = \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{6}as^2v$: Re-
 linquitur Solidi AbB momentum respectu ejusdem plani $A\tau\alpha$, (hoc
 est, *Omn.* $\frac{1}{2}as^2$: sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{3}eR^3$
 $+\frac{1}{2}av^2R + \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{6}as^2v = -\frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R$
 $+\frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR$
 $-\frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}c^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis
 à plano $A\tau\alpha$, $\frac{-12eR^3 - 12avR^2 - 6as^2R + 2s^3R + 6as^2v}{9c^2R - 12asv}$.

Totiusque $A\tau\alpha$ Solidi, (sive consideretur ut $Ab\beta\alpha$, sive ut AbB ,)
 Momentum respectu $A\tau\alpha$ plani (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, &
 $s = 0$,) $\frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano,
 $\frac{8R^2}{3P}$. Nempe tantundem atque Semicylindri $AK\beta\alpha$: Tantundem
 utique ponderat respectu $A\tau\alpha$ plani, atque tantundem inde distat;
 sive sit in situ $A\tau\alpha$, sive intelligatur pars $d\beta\tau$ in situm dKA re-
 plicata Semicylindrum complere.

P. Sed & eadem quæ jam Traduntur Solidi AbB momenta, similiter
 haberi poterunt, si, ex Solidi $AB\beta\alpha$ momentis, auferantur Solidi
 $b\beta\alpha B$ momenta respectiva.

Est autem Solidi $b\beta\alpha B$ magnitudo, $\frac{1}{4}AR^3 - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$,
 (ut § L. ostensum est;) ejusque Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia,
 $\frac{1}{2}a$; Atque à $\tau\alpha$, & TA , quantum inde distat Centrum gravitatis
 Segmenti Semicirculi BVa , atque ab $A\tau\alpha$ plano, quantum ab $A\alpha$
 distat ipsius BVa plani Centrum gravitatis; (est enim, per prop. 1.
 &c

PROP. XVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 329

& i hujus, in medio rectæ centra gravitatis oppositarum basium con- Fig. 169,
jungente: Hoc est, à τa , $R - \frac{2s^3}{3aR - 3sR + 3sb} =$ 170.

$$R - \frac{4s^3}{3aR - 6aR + 6sR - 6sv}; \text{ à TA, } R + \frac{4s^3}{3aR - 6aR + 6sR - 6sv};$$

à plano A τa , $\frac{h^2R + s^2h}{3aR - 3sR + 3sb} = \frac{8R^3 - 4vR^2 + 2s^2R - 2s^2v}{3aR - 6aR + 6sR - 6sv}$: Adeoque momentum respectu A α , $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2sR - \frac{1}{4}a^2sv$; respectu τa , $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; respectu plani A τa , $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Solidi A b βa subducta, Relinquent Solidi A b B momenta respectiva: eadem quæ prius exhibentur.

Eademque Solidi b βa B momenta, momentis respectivis A b B addita; exhibebunt eadem quæ prius momenta Solidi A b βa respectiva.

Solidoque b $\beta \tau$, eadem applicantur omnia quæ de b K A traduntur: Substituis ubique a pro a , h pro v , τa pro TA, & τT pro A α . Similiter enim ipsis τa , τT , adjacet b $\beta \tau$; atque b K A, ipsis AT, A α .

Q.

Exhibuimus itaque, in utroque Solido; tum eo scilicet quod ex Figuræ Sinuum verforum A τa rectis b β , in βv , respectivas Figuræ Sinuum Rectorum rectas, ductis; tum eo quod ex Figuræ Arcuum A τa rectis b B, in B V, respectivas Semicirculi rectas, ductis componitur; Eorumque partibus; Tum Magnitudines, tum Momenta respectu planorum aliquot expositorum, & Centrorum gravitatis ab illis planis distantias. Et propterea, (per prop. 26. cap. præced.) propter exhibitas Centrorum gravitatis à tribus saltem planis, quorum ne duo quidem sunt invicem parallela, (puta à plano A τa , & duobus aliis quæ huic in rectis A α , τa , ad rectos angulos insistant,) exhibentur ipsa gravitatis Centra. Quæque de his dicta sunt; facile erit ad alia ampliare.

R.

Et quidem, quæ de Solidis his tradidimus; eadem ad Protracta & Contracta facile transferuntur. Manentibus utique, (ut in propositione præcedente) A $\alpha = 2R$, adeoque AV = v, & V $\alpha = h$: Si sit τa , major (ut in Solido Protracto) vel minor (ut in Contracto) quam $\frac{1}{2}P$, (reliquæque his parallelæ similiter vel protractæ vel contractæ;) Quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a substituenda

V v

crit

Fig. 169, erit alia quantitas, quæ ad illam sit in eadem ratione qua est $\tau\alpha$,
170. ad $\frac{1}{2}P$.

Quæque de solidis figuram Sinuum Reſtorum unius quadrantis $\alpha\delta\kappa$ fig. 170. respicientibus, dicta sunt; eadem omnia, ad solida figuram chordarum seu subtensarum totius Semicirculi, ut $A\delta\kappa$ fig. 183. accommodanda erunt: Propter chordas subtensarum in semicirculo, ubique duplas sinuum reſtorum arcuum dimidiatorum; adeoque figuras $\alpha\delta\kappa$ fig. 170. & $A\delta\kappa$ fig. 183. omnino similes. Qua de re plura videantur ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

PROP. XIX.

PARS PRIMA.

- A. *Ungula* Figuræ Sinuum verſorum Arcuumve $A\tau\alpha$ insiſtens, Aciem habens $\tau\alpha$, est ad correspondentem *Ungulam* Semicirculi, ut 3 ad 2; seu *ſesquialtera*.
Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ; est *ſesquitertium* Momenti *Ungulæ* respectivæ Semicirculo $AD\alpha$ insiſtens, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu aciei suæ; seu ut 4 ad 3.
Idemque in respectivis Portionibus obtinet: puta, *Ungula* Quadrilineo $b\beta\alpha A$ insiſtens, (aciem habens $\tau\alpha$) est *ſesquialtera* *Ungulæ* respectivæ, ſectori $B\alpha A$ insiſtens; seu ut 3 ad 2. Ejusque *Momentum*, respectu aciei suæ $\tau\alpha$, est *ſesquitertium* momenti respectivæ *Ungulæ* insiſtens ſectori $B\alpha A$, respectu aciei $\tau\alpha$; seu ut 4, ad 3.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quoad Magnitudines, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in *Ungulis* Figuræ Sinuum verſorum, ejusve por-

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 331

portionibus, insistentibus; atque in illis quæ Semi-Fig. 169, circulo, ejusve portionibus respectivis insistent. 170.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,) Semiquadrantis Ungulæ, Trilinei $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3P$; respectu TA , $\frac{1}{3}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R$; à TA , $\frac{1}{3}R$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$.

Aciemque habentis TA ; Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$; respectu TA , $\frac{1}{12}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R$; à TA , $\frac{1}{3}R$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{16}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$.

Aciemque habentis $A\alpha$; Mag. $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; Momentum resp. $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; resp. TA , $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; Distan. Cent. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à TA , $\frac{1}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{24}RP^3 - R^3P$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{12}RP^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}P - \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$; à $T\tau$, $\frac{1}{6}P + \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$.

Aciemque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu TA , $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{24}RP^3$, respectu $T\tau$, $\frac{1}{12}RP^3 + R^3P$; Distantia

V v 2

Fig. 169,
170.Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{6}P - \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$; à

$$T\tau, \frac{1}{3}P + \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}.$$

C. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Quadrilinei $A b \beta \alpha$,
 aciem habentis $\tau \alpha$; magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{4}shR$; Momen-
 tum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu TA ,
 $\frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau \alpha$, $\frac{1}{9}R$

F. $+\frac{4sh^2}{27fR + 9sh}$; à TA , $\frac{2}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR + 9sh}$; Momentum
 respectu $b\beta$, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2$
 $+\frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri
 gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ab
 $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$.

C. Aciemque habentis TA ; Magnitudo $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{4}shR$; Mo-
 mentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{6}fR^3 + \frac{1}{2}s^3R$; respectu TA ,
 $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau \alpha$,

F. $\frac{1}{3}R + \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$; à TA , $\frac{2}{3}R - \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$; Mo-
 mentum respectu $b\beta$, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu
 $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia
 Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; ab
 $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$.

F. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$;
 Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3$
 $-\frac{1}{8}s^2R^2$; respectu TA , $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$
 $+\frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau \alpha$, $\frac{1}{4}R -$
 $\frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$; à TA , $\frac{1}{4}R +$

K. $\frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$; Momentum respectu $A\alpha$, $2eR^3$
 $- 2avR^2$.

PROP. XIX. De Calcūlo Centri Gravitatis. 333

— $2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$; respectu $b\beta$, — $2eR^3 + avR^2$ Fig. 169,
 $+ \frac{1}{6}a^3R$; Dist. Cen. grav. ab $A\alpha$, $\frac{12eR^2 - 12avR + 2a^3 + 6a^2s}{3a^2 + 6as - 6vR}$; 170.

à $b\beta$, $\frac{-12eR^2 + 6avR + a^3}{3a^2 + 6as - 6vR}$.

Acicmque habentis $b\beta$; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R + vR^2$; Mo- F.

mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu

TA , $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri gravi-

tatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{2vR + s^2}{4a^2 + 8vR}R$; à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{2vR + s^2}{4a^2 + 8vR}R$:

Momentum respectu $A\alpha$, — $2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; re- K.

spectu $b\beta$, $2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; Distantia Centri gravitatis

ab $A\alpha$, $a - \frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$; à $b\beta$, $\frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$.

Ungulæ Trilinei ABK , aciem habentis $\tau\alpha$, Magni- D.

tudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3$

$+ \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{8}s^3R$; respectu TA , $\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}s^3R$; Di-

stantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R + \frac{24svR + 2os^3}{225eR + 45sv}$; à

TA , $\frac{1}{12}R - \frac{24svR + 2os^3}{225eR + 45sv}$; Momentum respectu βbK , H.

$\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2$

$+ \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis

à βbK , $\frac{1}{2}a - \frac{10vR^2 - v^2R - 5asR + asv}{10eR + 2sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$

$+ \frac{10vR^2 - v^2R - 5asR + asv}{10eR + 2sv}$.

Acicmque habentis TA ; Magnitudo $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$; Mo- D.

mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}s^3R$; respectu TA ,

$\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{8}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$\frac{1}{3}R + \frac{4sv^2}{27eR - 9sv}$; à TA , $\frac{1}{3}R - \frac{4sv^2}{27eR - 9sv}$; Momen- H.

tum respectu βbK , $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu

$A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; Distan-

tia

Fig. 170. tia Centri gravitatis à $\beta b K$, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR - 2sv}$;
ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR - 2sv}$.

H. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$;
Momentum respectu TA , $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$
 $+ \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}vR^3$
 $+ \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à TA ,

L. $\frac{1}{2}R + \frac{v^2R - 2asv}{4a^2 - 8as + 8vR}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R - \frac{v^2R - 2asv}{4a^2 - 8as + 8vR}$; Mo-
mentum respectu bK , $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; respectu
 $A\alpha$, $-2eR^3 + 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R - a^2vR$; Distantia
Centri gravitatis à bK , $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6as + 6vR}$; ab $A\alpha$,
 $\frac{-12eR^2 - 12avR + 2a^3 - 6a^2s}{3a^2 - 6as + 6vR}$.

H. Aciemque habentis $\beta b K$; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; Mo-
mentum respectu TA , $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; re-
spectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri
gravitatis à TA , $\frac{1}{2}R - \frac{v^2R}{4a^2 - 8vR}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R +$

L. $\frac{v^2R}{4a^2 - 8vR}$; Momentum respectu $A\alpha$, $2eR^3 - avR^2$
 $+ \frac{1}{6}a^3R$; respectu bK , $-2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; Distantia
Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6vR}$; à bK ,
 $\frac{-12eR^2 + 2a^3}{3a^2 - 6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei $b\beta\tau$, aciem habentis TA ; Magnitudo,
 $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; Momentum respectu TA , $\frac{1}{6}\alpha R^3$
 $- \frac{1}{6}sR^3 + \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{2}s^3R$, respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha R^3$
 $- \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{2}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à
 TA , $\frac{1}{3}R + \frac{24shR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sh}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R -$
 $\frac{24shR}{225\alpha R - 225sR + 45sh}$.

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 335

$\frac{24shR+20s^3}{225aR-225sR+45sh}$: Momentum respectu $b\beta$, $\frac{1}{5}\alpha^2R^2$ H.
 $-\frac{1}{4}bR^3+\frac{1}{8}b^2R^2$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{5}\alpha^2R^2-\frac{1}{4}\alpha sR^2$ Fig. 170.
 $+\frac{1}{4}\alpha s bR+\frac{1}{4}bR^3-\frac{1}{8}b^2R^2$; Distantia Centri gra-
 vitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha-\frac{10bR^2-h^2R-5asR+ash}{10aR-10sR+2sh}$; à $T\tau$,
 $\frac{1}{2}\alpha+\frac{10bR^2-h^2R-5asR+ash}{10aR-10sR-2sh}$.

Acicmque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}R^2-\frac{1}{4}shR$; D.
 Momentum respectu TA , $\frac{1}{4}\alpha R^3-\frac{1}{4}R^3-\frac{1}{9}sR$; re-
 spectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha R^3-\frac{1}{4}R^3-\frac{1}{4}shR^2+\frac{1}{9}sR$; Distantia
 Centri gravitatis à TA , $\frac{1}{9}R+\frac{4sh^2}{27aR-27sR-9sh}$; à

$\tau\alpha$, $\frac{1}{9}R-\frac{4sh^2}{27aR-27sR-9sh}$: Momentum respectu H.
 $b\beta$, $\frac{1}{5}\alpha^2R^2-\frac{1}{4}bR^3-\frac{1}{8}b^2R^2$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{5}\alpha^2R^2$
 $-\frac{1}{4}\alpha sR^2-\frac{1}{4}ashR+\frac{1}{4}bR^3+\frac{1}{8}b^2R^2$; Distantia Centri
 gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha+\frac{3asR+ash-6bR^2-h^2R}{6aR-6sR-2sh}$; à $T\tau$,
 $\frac{1}{2}\alpha-\frac{3asR+ash-6bR^2-h^2R}{6aR-6sR-2sh}$.

Acicmque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R-\alpha sR+hR^2$; H.
 Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2-\frac{1}{4}\alpha sR^2-\frac{1}{4}ashR$
 $+\frac{1}{4}bR^3+\frac{1}{8}b^2R^2$; respectu TA , $\frac{1}{3}\alpha^2R^2-\frac{1}{4}\alpha sR^2+\frac{1}{4}bR^3$
 $+\frac{1}{4}ashR-\frac{1}{8}b^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R+\frac{b^2R-2ash}{4a^2-8as+8bR}$; à TA , $\frac{1}{4}R-\frac{b^2R-2ash}{4a^2-8as+8bR}$: Mo-

mentum respectu $b\beta$, $2\alpha R^3-2sR^3-\alpha bR^2+\frac{1}{6}\alpha^3R$, L.
 respectu $T\tau$, $-2\alpha R^3+\frac{1}{2}sR^3+\frac{1}{2}ashR^2+\frac{1}{3}\alpha^3R-a^2sR$; Di-
 stantia Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{12aR^2-12sR^2-6ashR+a^3}{3a^2-6as+6bR}$; à $T\tau$,
 $\frac{-12aR^2-12sR^2-12ashR-2a^3-6a^2s}{3a^2-6as+6bR}$.

Acicmque habentis $b\beta$; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2R-hR^2$; Mo-
 mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha^2R^2-\frac{1}{4}bR^3-\frac{1}{8}b^2R^2$; respectu
 TA

Fig. 169, T A $\frac{1}{3}a^2R^2 - \frac{1}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; Distantia Centri gravitatis
 170. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{h^2R}{4a^2 - 8hR}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{h^2R}{4a^2 - 8hR}$; Mo-
 L. mentum respectu T τ , $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha hR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R$;
 respectu b β , $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + \frac{1}{3}\alpha^3R$; Distantia Centri
 gravitatis à T τ , $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha hR - \alpha^3}{3a^2 - 6hR}$; à b β ,
 $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 2\alpha^3}{3a^2 - 6hR}$.

- E. Ungulæ Parallelogrammi b $\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$;
 Magnitudo, $\frac{1}{2}ah^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
 $\frac{2}{3}h$; à T A, $2R - \frac{2}{3}h$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3$;
 I. respectu T A, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$; Distantia Centri gravita-
 tis ab A α , seu b β , $\frac{1}{2}a$; momentum respectu A α , vel b β ,
 $\frac{1}{4}a^2h^2$.
 E. Aciemque habentis T A; Magnitudo, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2$
 $- \frac{1}{2}av^2$; Momentum respectu T A, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; re-
 spectu $\tau\alpha$, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$; Distantia Centri gravitatis à
 I. T A, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; Momentum
 respectu A α , seu b β , $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2$; Distantia Centri
 gravitatis, ab A α , seu b β , $\frac{1}{2}a$.
 I. Aciemque habentis A α ; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2h$; Distantia
 Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; à T A, $2R - \frac{1}{2}h$; Mo-
 mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; respectu T A, ah^2R
 M. $- \frac{1}{4}a^2h^2$; Distantia Centri gravitatis à b β , $\frac{2}{3}a$; ab A α ,
 $\frac{2}{3}a$; Momentum respectu b β , $\frac{1}{6}a^3h$; respectu A α , $\frac{1}{3}a^3h$.
 I. Aciemque habentis b β ; magnitudo, $\frac{1}{2}a^2h$; Distantia
 Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; à T A, $2R - \frac{1}{2}h$; Momen-
 tum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; respectu T A, $ah^2R - \frac{1}{4}a^2h^2$;
 M. Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{2}{3}a$; à b β , $\frac{2}{3}a$; Mo-
 mentum respectu A α , $\frac{1}{6}a^3h$; respectu b β , $\frac{1}{3}a^3h$.

Eadem

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 339

Eademque ab Ungulis $b\beta\alpha B$, ad Ungulas $bKAB$, transferentur, substitutis ubique v pro h , & $T A$ pro $\tau\alpha$, Fig. 169. & vice versa. 170.

Ungulae Segmenti bBA , aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, E.

$$\frac{1}{3}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ah^2; \text{ Momentum respectu } \tau\alpha, \frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ah^3; \text{ respectu } TA, \frac{1}{3}fR^3 - ah^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}ah^3; \text{ respectu } bB, \frac{1}{3}fR^3 - \frac{1}{4}ahR^2 - \frac{1}{4}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{4}s^2h^2R - \frac{1}{6}ah^3; \text{ Distantia Centri gravitatis a } \tau\alpha, \frac{20fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2};$$

$$\text{a } TA, \frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4as^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2};$$

$$\text{a } bB, \frac{30fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2} - h = v -$$

$$\frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4as^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2}. \text{ Momentum respectu } b\beta, \text{ I.}$$

$$-\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ respectu } A\alpha, -\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ Distantia Centri gravitatis a } b\beta, \frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}; \text{ ab } A\alpha, \frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}.$$

Acieque habentis TA ; Magnitudo, E.

$$\frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2; \text{ Momentum respectu } TA, -\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v; \text{ respectu } \tau\alpha, -\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v; \text{ respectu } bB, \frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v; \text{ Distantia Centri gravitatis}$$

$$\text{a } TA, \frac{-3ceR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2};$$

$$\text{a } \tau\alpha, \frac{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2};$$

X x

a b B,

Fig. 169,
170.

I.

$$\text{à b B; } \frac{3ceR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-27eR^2 + 36avR - 9svR - 18as^2};$$

$$\text{Momentum respectu b } \beta, -\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ respectu A } \alpha, -\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ Distantia Centri gravitatis à b } \beta, \frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - s^2a^2 - 3as^2R - asvR}{-6eR^2 + 8avR - 2svR - 4as^2}; \text{ à b A } \alpha,$$

$$\frac{\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3as^2R - asvR}{-6eR^2 - 8avR - 2svR - 4as^2}}{2}$$

$$\text{E. Aciemque habentis b B; Magnitudo, } \frac{1}{6}R^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2; \text{ Momentum respectu } \tau \alpha, \frac{1}{6}R^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{6}as^2v; \text{ respectu TA, } \frac{1}{6}R^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{6}as^2v; \text{ respectu b } \beta, -\frac{1}{6}R^3 + \frac{1}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{3}as^2v; \text{ Dist. Cen. grav. à } \tau \alpha \frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2};$$

$$\text{à TA, } \frac{3ceR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{27eR^2 - 27svR - 18as^2};$$

I.

$$\text{à b B } \frac{-3ceR^3 + 3avR^2 + 12as^2R - 22s^3R - 12as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}; \text{ Mo-}$$

$$\text{mentum respectu b } \beta, \frac{1}{6}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ respectu A } \alpha, \frac{1}{6}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ Distantia Centri gravitatis à b } \beta, \frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3as^2R - 3asvR}{6eR^2 - 6svR - 4as^2}; \text{ à b A } \alpha, \frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3as^2R - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}.$$

I.

$$\text{Aciemque habentis A } \alpha; \text{ Magnitudo, } -\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v; \text{ Momentum respectu } \tau \alpha, -\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ respectu TA, } -\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ Distantia Centri gravitatis à } \tau \alpha, \frac{1}{4}R - \frac{2asvR - a^2vR - vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}; \text{ à TA, } \frac{1}{4}R + \frac{2asvR}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}.$$

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 341

$$\frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}; \text{ à b B, } \frac{1}{4}R - h - \text{Fig. 169, 170.}$$

$$\frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}; \text{ Momentum respectu}$$

$$\text{b B, } \frac{1}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2;$$

$$\text{Momentum respectu b } \beta, -2eR^3 - avR^2 - \frac{1}{6}a^3R$$

$$+ \frac{1}{6}a^3v; \text{ respectu A } \alpha, 2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{4}a^3R$$

$$+ a^2sR + \frac{1}{3}a^3v; \text{ Distantia Centri gravitatis à b } \beta,$$

$$- \frac{12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R - 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}; \text{ ab A } \alpha,$$

$$\frac{12eR^3 - 12avR^2 - a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}.$$

$$\text{Acicmque habentis b } \beta; \text{ Magnitudo, } -\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \text{I.}$$

$$\frac{1}{2}a^2v; \text{ Momentum respectu } \tau \alpha, -\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 +$$

$$\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ respectu T A, } -\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3$$

$$- \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ Distantia Centri gravi-}$$

$$\text{tatis à } \tau \alpha, \frac{1}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v};$$

$$\text{à T A, } \frac{1}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}; \text{ à b B, } \frac{1}{4}R -$$

$$h - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}; \text{ Momentum respectu}$$

$$\text{b B, } \frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2; \text{ Momentum re-}$$

$$\text{spectu A } \alpha, -2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v; \text{ respectu}$$

$$\text{b } \beta, 2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v; \text{ Distantia Centri gra-}$$

$$\text{vitatis ab A } \alpha, \frac{12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}; \text{ à b } \beta,$$

$$\frac{12eR^3 - 12avR^2 - a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}.$$

PARS SECUNDA.

Eademque in Ungulis Figurarum Sinuum Rectorum, ejus- N.
que partes spectantibus; determinatur.

X x 2

Neape

Nempe (retentis symbolis ut prius ;)

- N. Ungulæ $\alpha \tau \kappa$, aciem habentis $\tau \alpha$, Mag. $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum
 Fig. 169. resp. $\tau \alpha$, $\frac{1}{8}R^4$; dist. à $\tau \alpha$, $\frac{32K^2}{9P}$; à $T \tau$, vel $A \alpha$, $\frac{1}{4}P$;
 17c. Momentum respectu $T \tau$, vel $A \alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2$.
 N. Aciemque habentis $T \tau$, vel $A \alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{8}R^2P$;
 Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2$; Distantia Centri
 O. gravitatis à $\tau \alpha$, $\frac{1}{16}P$; Momentum respectu Aciei suæ,
 $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; respectu extremi oppositi, $4R^4$; Di-
 stantia Centri gravitatis ab acie sua, $\frac{1}{2}P - \frac{8K^2}{P}$; ab op-
 posito extremo, $\frac{8K^2}{P}$.

- N. Ungulæ $\alpha \delta \kappa$, aciem habentis $\tau \alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{12}R^2P$;
 Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{8}R^4$; Distantia Centri gra-
 P. vitatis à $\tau \alpha$, $\frac{32R^2}{9P}$; Momentum respectu $\delta \kappa$, $\frac{1}{128}R^2P^2$
 $- \frac{1}{8}R^4$; respectu $A \alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$; Distantia
 Centri gravitatis à $\delta \kappa$, $\frac{1}{4}P - \frac{2K^2}{P}$; ab $A \alpha$, $\frac{1}{8}P - \frac{2K^2}{P}$.
 O. Aciemque habentis $\delta \kappa$; magnitudo, $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$; Mo-
 mentum respectu $A \alpha$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; respectu $\delta \kappa$,
 $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$,
 $\frac{8K^2 - RP}{P - 4K}$; à $\delta \kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16K}$; Momentum respectu $\tau \alpha$,
 $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau \alpha$, $\frac{1}{32}P$
 $+ \frac{1}{8}R = \frac{P^2 - 16K^2}{32P - 128R}$.
 O. Aciemque habentis $A \alpha$; magnitudo, R^3 ; momentum
 respectu $\delta \kappa$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; respectu $A \alpha$, $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$;
 Distantia Centri gravitatis à $\delta \kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab $A \alpha$,
 P. $\frac{1}{2}P - 2R$; Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2$
 +

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 343

$\tau + \frac{1}{8}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R$ — Fig. 169, 170.
 $\frac{1^2}{128R^2}$

Ungulae $\alpha\beta v$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}efR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}v^2eR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4v^2R + 4v^2e}{9eR + 9sv}$; Momentum respectu βv , $\frac{1}{8}efR^2$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}v^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à βv , $\frac{efR}{2eR + 2sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$.

Aciemque habentis βv ; Magnitudo, eR^2 ; Momentum respectu $A\alpha$, $2vR^3 - asR^2$; respectu βv , $a^2R^2 - 2vR^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{2vR - as}{e}$; à βv , $\frac{a^2 - 2vR}{e}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}efR^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}f$.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $-eR^2 + avR$; Momentum respectu βv , $2vR^3 - asR^2$; respectu $A\alpha$, $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$; Distantia Centri gravitatis à βv , $\frac{2vR^2 - asR}{-eR + av}$; ab $A\alpha$, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-eR + av}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$.

Adeoque in expositis Ungulis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, earumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa gravitatis Centra. Quæque de Ungulis dicta sunt, ad solida conversione (perfectâ vel imperfectâ) descripta, facile transferentur.

Quod.

Fig. 169 Quodque in expositis factum est, ad alias portiones facile ampliabitur.

170.

R. Quæque de Ungulis, Solidisque conversione factis, ex his figuris oriundis traduntur; ad ea quæ ex Protractis Contractisve figuris similiter oriuntur facile accommodantur.

Et quæ de Solidis figuram Sinuum rectorum unius quadrantis traduntur; eadem ad Solida figuram Chordarum semicirculi similiter respicientia, transferentur.

A. Distributis, (ut ad propositiones præcedentes,) tum Semicirculo $AD\alpha$, in Sectores seu Triangula; tum Figurâ Sinuum Versorum $A\tau\alpha$, in Quadrilinea seu Parallelogramma, Sectoribus illis seu Triangulis correspondentia: Intelligatur, utrique insistere, Semiquadrantalibus Ungula, aciem habens $\tau\alpha$.

Quarum quidem Ungularum, ea quæ vel toti semicirculo, vel ipsius sectori ut $B\alpha A$, insistit; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut αB , seu $Y\alpha P$, &c.) incumbentibus: quarum communis vertex sit α punctum; Basesque super Triangulorum illorum basibus (ut YB , &c.) erectæ altitudines habeant ipsis $V\alpha$ respectivis æquales.

Quæque Trilineo sive toti, sive ipsius Portioni, ut $b\beta A$, (quæ Sectori $B\alpha A$ responderet) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Parallelogrammis, βb , seu $y\delta\xi p$, &c. incumbunt; acies habentibus in $\tau\alpha$ rectâ continuè jacentes, altitudines vero super ipsis $y\beta p$ parallelogrammorum basibus (pro semiquadrantalibus ungulæ ratione) ipsis $V\alpha$ (respective) earundem à $\tau\alpha$ distantis æquales. Quæ quidem Ungulæ, sunt Cunei, seu Prismata basibus triangularibus (ipsis δy , ξp insistentibus) interjecta.

Sunt autem hæc Minuta Prismata, (utpote Semiquadrantales Ungulæ, parallelogrammorum quibus incumbunt, momentis respectu $\tau\alpha$, æquales, seu Parallelepipedorum dimidia;) Pyramidularum illarum (respectivis Triangulis incumbentium, horumque momentis respectivis æqualium,) tum singula singulorum, tum omnia omnium, Sesquialtera, (per γ C. prop. 17.) seu ut . ad 2. (& quidem Pyramis illa, est ad Parallelepipedum super eadem base æque altum, ut 1 ad 3; Cuneus vero, ut 1 ad 2: Estque $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ut 3 ad 2.)

Cunei

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 345

Cunei vero seu Prismatis cujusque, Distantia Centri gravitatis Fig. 169, à τa (intellige, perpendiculare planum super τa erectum,) utpote 1. 0. eadem quæ est basium Triangularium quibus interjacet (per prop. 5. hujus,) est ad distantiam inde Centri gravitatis Pyramidis correspondentis (æque altæ) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, (per prop. 6. hujus) Hoc est, ut 8 ad 9.

Ergo; (propter $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$) Momentum Ungulæ seu Prismatis Parallelogrammo, ut βb , incumbens; ad momentum correspondentis Ungulæ seu Pyramidis incumbens Triangulo, ut $a B$; (respectu ejusdem τa ;) est ut 4 ad 3, seu Sesquitergium. Et sic ubique.

Est itaque, illius quæ ex Prismatis componitur, Ungulæ, sive toti $A \tau a$ Trilineo, sive ipsius Portioni, ut $b \beta a$ Avel $b \beta d$, vel $b \beta \tau$, &c. insistentis momentum; ad illius, quæ ex Pyramidis componitur, Ungulæ, sive toti Semicirculo, sive ipsius correspondenti sectori, $B a A$, vel $B a D$. vel segmento $a B$, insistentis momentum; ut 4 ad 3, seu Sesquitergium.

Est autem toti Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis τa , momentum respectu τa ; $\frac{1}{16} A^3 P$; (per § T. prop. 16) Adeoque Trilineo $A \tau a$ insistentis Ungulæ, (aciem habentis τa ;) momentum respectu τa , (utpote istius Sesquitergium) $\frac{1}{12} A^3 P$. Et (propter magnitudinem $\frac{1}{8} A^3 P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{24} R$; Adeoque, a $T A$, $\frac{8}{9} R$; ejusque momentum respectu $T A$, $\frac{1}{3} R^3 P$.

Eademque momenta ex Ungulæ toti Parallelogrammo $A T \tau a$ insistentis momentis subducta, exhibent (mutatis mutandis) momenta Ungulæ aciem habentis $T A$; Nempe momentum Ungulæ totius Parallelogrammi $A T \tau a$ (propter $A a = 2 R$, & τa vel $T A = \frac{1}{2} R$) aciem habentis τa ; respectu aciei suæ, est $\frac{1}{2} A a q \times \frac{2}{3} A a \times \tau a = \frac{1}{3} A^3 R$; Unde subductum momentum Ungulæ Trilinei $A \tau a$, respectu τa ; relinquit momentum Ungulæ Trilinei $A \tau T$, ungulam habentis τa , respectu τa ; hoc est Ungulæ Trilinei $A \tau a$ (ipsi $A \tau T$ simili & æqualis, inverso situ) aciem habentis $T A$, respectu ipsius $T A$, $\frac{1}{12} R^3 P$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{8} A^3 P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis ab acie sua $\frac{2}{3} R$; atque ab extremo opposito $\frac{1}{3} R$; & respectu hujus, momentum, $\frac{1}{3} R^3 P$.

Item; Ungulæ sectoris $B a A$, aciem habentis τa , momentum respectu τa (per § W. prop. 16.) est $\frac{1}{2} a A^3 + \frac{1}{8} R^3 - \frac{1}{8} s v A^2 - \frac{1}{12} s^3 R = \frac{1}{6} f R^3 + \frac{1}{8} b R^2 - \frac{1}{12} s^3 R$, Ergo Ungulæ quadrilinei correspondentis $b \beta a A$, respectu τa , momentum (utpote istius Sesquitergium) $\frac{1}{6} f R^3 + \frac{1}{8} s b R^2 - \frac{1}{9} s^3 R = \frac{1}{6} f R^3 + \frac{1}{2} s b R^2 - \frac{1}{9} s b v R$

B.

C.

Fig. 169, $= \frac{1}{6}aR^3 + \frac{1}{6}sR^3 - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{6}s^3R$: Centrique gravitatis distantia a $\tau\alpha$ (propter magnitudinem $\frac{1}{6}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{1}{6}fR^2 + \frac{1}{6}shR$, per §. D. prop. 17.) $\frac{3ofR^2 + 18shR - 4s^3}{27fR + 9sh} = \frac{1}{9}R + \frac{8shR - 4s^3}{27fR + 9sh} = \frac{1}{9}R - \frac{8shR - 4shv}{27fR + 9sh} = \frac{1}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR + 9sh}$; Adeo-

que, à TA, $\frac{1}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR + 9sh}$; ejusque, respectu TA, momentum, $\frac{1}{9}fR^3 + \frac{1}{9}shR^2 - \frac{1}{9}sh^2R = \frac{1}{9}fR^3 - \frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{1}{9}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$, est momentum Ungulæ eidem $b\beta A$ insistentis, aciem habentis TA, respectu $\tau\alpha$, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas;) & (propter magnitudinem $\frac{1}{6}fR^2 - \frac{1}{6}shR$, per §. D. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$\frac{24fR^2 + 4s^3}{45fR - 9sh} = \frac{1}{5}R + \frac{24shR - 20s^3}{225fR - 45sh}$; & à TA, $\frac{66fR^2 - 18shR - 4s^3}{45fR - 9sh}$

$= \frac{1}{5}R - \frac{24shR - 20s^3}{225fR - 45sh}$: Ejusque respectu TA, momentum, $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{6}shR^2 - \frac{1}{6}s^3R$.

D. Est autem, Semiquadrantalís Ungulæ toti $A\alpha\beta K$ quadrilineo insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, (propter $A\alpha = 2R$, & $AK = \alpha\beta = a$), momentum respectu $\tau\alpha$, (aut etiam, aciem habentis TA, momentum respectu TA,) $\frac{8}{3}aR^3$. Unde, si dematur momentum Ungulæ quadrilinei $b\beta A$, modo inventum, $\frac{1}{9}fR^3 + \frac{1}{9}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{1}{6}aR^3 + \frac{1}{6}sR^3 - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{6}s^3R$; relinquitur momentum, respectu $\tau\alpha$, Ungulæ insistentis Trilineo reliquo $A\beta K$, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}aR^3 - \frac{1}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R = \frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{6}eR^2 + \frac{1}{6}svR$, per §. E. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$\frac{66eR^2 + 18svR + 4s^3}{45eR - 9sv} = \frac{1}{5}R + \frac{24svR - 20s^3}{225eR - 45sv}$; atque à TA, $\frac{1}{5}R - \frac{24svR - 20s^3}{225eR - 45sv}$. Ideoque, ejusdem AbK Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$, momentum resp. TA, $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{6}s^3R$.

Idemque $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{6}s^3R$, est momentum Ungulæ eidem $A\beta K$ insistentis, aciem habentis TA, respectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{6}eR^2 - \frac{1}{6}svR$, per §. E. prop. 17.) Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia,

$\frac{24eR^2 - 4s^3}{27eR - 9sv} = \frac{1}{9}R + \frac{8svR - 4s^3}{27eR - 9sv} = \frac{1}{9}R + \frac{8svR - 4svh}{27eR - 9sv} = \frac{1}{9}R + \frac{4sv^2}{27eR - 9sv}$

4sv²

$$\frac{4sv^2}{27eR-9sv}; \text{ Atque, à TA, } \frac{1}{9}R - \frac{4sv^2}{27eR-9sv} = \frac{\text{Fig. 169}}{170}.$$

$$\frac{30eR^2-18svR+4s^3}{27eR-9sv}; \text{ Ideoque ejusdem, respectu TA, momentum}$$

$$\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R.$$

Similiter ostenderur; Semiquadrantalibus Ungulæ Trilineo $b\beta\tau$, aciem habentis TA, momentum respectu aciei suæ TA, $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$: Centriq; gravitatis distantiam à TA esse $\frac{1}{3}R + \frac{24shR-20s^3}{225eR-225sR-45sh^2}$

$$\text{atque à } \tau\alpha, \frac{1}{3}R - \frac{24shR+20s^3}{225eR-225sR-45sh^2}.$$

Acieque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, aciei suæ, $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$:

$$\text{Centrique gravitatis distantiam à TA, } \frac{1}{9}R + \frac{4sh^2}{27eR-27sR-9sh^2}:$$

& à $\tau\alpha$, $\frac{1}{9}R - \frac{4sh^2}{27eR-27sR-9sh^2}$. Nam, eodem plano modo rectæ $\tau\alpha$ adjacet Trilineum $b\beta\tau$, atque (huic simile & æquale) Trilineum bKA rectæ AT: adeoque idem valet a, b , in illo, atque a, v , in hoc.

Deinde (per prop. 11. hujus § F.) si ex Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, auferatur Ungulæ Parallelogrammi $b\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; relinquitur Ungula segmento bBA insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$.

Illa autem Parallelogrammi $b\beta\alpha B$ Ungula, aciem habentis $\tau\alpha$, est Prisma, oppositarum basium triangularium, rectis $\beta b, \alpha B$ insistentium: Cujus itaque Centri gravitatis distantia à $\tau\alpha$ (quippe eadem quæ basium triangularium, per prop. 5. hujus,) est $\frac{2}{3}aV = \frac{2}{3}h$; adeoque à TA, $2R - \frac{2}{3}h$: Quæ, ductæ in magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2$ (per § F. prop. 17.) exhibent ejusdem momentum respectu aciei suæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3 = \frac{1}{3}aR^3 - 4avR^2 + 2av^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{1}{3}aR^3 - 2as^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$: Et respectu TA, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$. (Quod etiam erit momentum, respectu $\tau\alpha$, aciem habentis TA.)

Illud itaque (Ungulæ $b\beta\alpha B$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$), ex Momento Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha A$, aciem item habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$, (nempe $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{3}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{1}{6}eR^3$)

E.

Fig. 169, $+\frac{1}{6}R^3 - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{3}v^2R$, per § C.) subductum: relinquit $-\frac{1}{6}R^3$
17c. $+\frac{1}{6}R^3 - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{3}v^2R$, momentum Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis τa , respectu τa ; ejusque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{2}R^2$ per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à τa , erit

$$\begin{aligned} & -66eR^3 - 48avR^2 - 18svR^2 - 48as^2R - 4s^3R - 12as^2v \\ & -45eR^2 + 36avR - 9svR - 18as^2 \\ & 20fR^3 + 18shR^2 - 4s^3R - 12sh^3; \text{ à TA, } \frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4s^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2}; \text{ à TA, } \frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4s^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2} \\ & \text{à b B, } \frac{30fR^3 - 18shR^2 - 4s^3R - 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2} \\ & -h = v - \frac{24fR^3 - 36ah^2R + 4s^3R + 12ah^3}{27fR^2 + 9shR - 18ah^2} = \\ & \frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-45ah^2 + 45sR^2 - 36avR - 9svR - 18as^2} : \text{ Adeoque e-} \\ & \text{jusdem respectu TA momentum, } \frac{2}{3}fR^3 - ah^2R - \frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{3}sh^3 = \\ & -\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}sh^3; \text{ \& respectu b B, } \frac{2}{3}fR^3 \\ & -\frac{2}{3}ahR^2 - \frac{1}{3}shR^2 - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}sh^2R + \frac{1}{3}sh^3 = \frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R \\ & -\frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}sh^3. \end{aligned}$$

Atque ex illo porro momento Ungulæ ipsi bBA insistentis, aciem habentis τa , respectu ipsius τa ; si subducatur Prismatis eidem bBA insistentis, altitudinem habentis $V a = h$, momentum respectu ipsius τa ; hoc est, ipsius bBA, respectu ejusdem τa , momentum in $h = R - v$, ductum; hoc est (per § F. prop. 17.) $-\frac{1}{2}eR^2 + avR - \frac{1}{2}as^2h = -\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{2}as^2v$; hoc est, $-\frac{1}{2}eR^2 + avR - \frac{1}{2}as^2h = -\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{2}as^2v$: Relinquitur Ungulæ eidem bBA insistentis, aciem habentis bB momentum respectu τa , $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}sh^3R + \frac{1}{3}as^2v$. Adeoque (propter mag. $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{2}as^2h$, per § F. pr. 17.) Dist. Cen. grav. à τa , $\frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 5s^3R + 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$

& à TA, $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$; atque à b B, $\frac{27eR^2 + 27svR - 18as^2}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$: E-
jusque momentum respectu TA, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R$
- $\frac{1}{3}sh^3R - \frac{1}{3}as^2v$: Et respectu b B, $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R$
- $\frac{1}{3}sh^3R - \frac{1}{3}as^2v$.

Idemque

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 349

Idemque $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$, est Fig. 169, momentum respectu b B, Ungulæ eidem b B A insistentis aciem ha-

bentis T A, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:)

Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{2}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR$

$-\frac{1}{2}as^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis a b B,

$30eR^3 - 3avR^2 - 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v$: Adeo-

que à T A, $-\frac{27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}{-30eR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}$;

à $\tau\alpha$, $-\frac{27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}$: Ejusque

respectu T A momentum, $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{36}s^3R$

$-\frac{1}{6}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R$

$+\frac{1}{3}as^2v$.

Illud autem, ejusdem Ungulæ, trilineo b B A insistentis aciem ha-

bentis T A, momentum, respectu ipsius T A, ex momento Ungulæ

quadrilineo b $\beta\alpha$ A insistentis aciem item habentis T A, respectu e-

jusdem T A, subductum; hoc est, ex $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2R$

$+\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$, (per § C.) relinquit Ungulæ parallelo-

grammo b $\beta\alpha$ B insistentis, aciem habentis T A, momentum re-

spectu T A, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v = \frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{3}av^3$.

Idem habetur, si ex Ungulæ parallelogrammi K $\beta\alpha$ A, aciem ha-

bentis T A, momento respectu T A, $\frac{1}{3}eR^3$; subducatur parallelo-

grammi K b B A, (aciem item habentis T A,) momentum respectu

T A, $\frac{1}{3}av^3$: Quippe quod restat, est Ungulæ Parallelogrammi

b $\beta\alpha$ B, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{3}av^3$;

ut prius.

Adeoque, (propter magnitudinem, $2abR - \frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2$

$-\frac{1}{2}av^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à T A,

$\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; atque à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2} = \frac{8R^3 - 6v^2R + 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; ejus-

que respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{1}{3}eR^3 - av^2R + \frac{1}{3}av^3 = \frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{3}avR^2$

$+\frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v = ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$; ut etiam prius ostensum est.

Aut etiam ejusdem Ungulæ Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B insistentis;

aciem habentis T A, magnitudo, momenta, & Centrum gravitatis,

per se facile determinantur; est utique solidum ex Prismate, eique

super imposito Cuneo constante; eidem b $\beta\alpha$ B super eminentibus:

Quorum utriusque separatim magnitudines, & Centra gravitatis,

adeoque & momenta, facile determinantur; adeoque & aggregati ex

utroque conflati.

Y y 2

Accedimus

F. Accedimus ad Ungularum Trilinei $A\tau\alpha$, ejusque partium, aciem
Fig. 169, habentium $\tau\alpha$ aut huic parallelam, momenta respectu $A\alpha$: Aciem-
170. que habentium $A\alpha$, momenta respectu $\tau\alpha$ aut parallelarum huic;
quæque hinc dependent.

Si Trilineo restituto, seu *Figura Sinuum versorum*, $A\tau\alpha$, insistant Semiquadrantis Ungula aciem habens $\tau\alpha$: Quæ rectis $b\beta$, planum complentibus, insistant plana Ungulam complentia, sunt (propter angulum Semiquadrantalem) Triangula Rectangula Isoscelia; ipsarum $b\beta$, seu b , semiquadrata: Adeoque ipsa Ungula, (sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ ipsius portioni $Ab\beta\alpha$ insistit,) aggregatum omnium $\frac{1}{2}b^2$, eo spectantium. Eorumque ab $A\alpha$ distantia est $bB (=a)$ respective: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ momentum, respectu $A\alpha$, est Aggregatum omnium $\frac{1}{2}ab^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus: Hoc est, Arcuum arithmetice proportionalium in Semiquadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum.

Quæ autem rectis bB , æqualiter ab invicem distantibus, planum similiter complentibus, insistant plana Ungulam complentia, totidem erunt parallelogramma, quorum bases $bB = a$, & altitudines (propter angulum Semiquadrantalem) æquales eorum à $\tau\alpha$ distantis respectivis, hoc est ipsis $V\alpha = b$ respective: Adeoque Ungula, sive quæ toti $A\tau\alpha$ Trilineo insistit, sive quæ ipsius Portioni AbB , est Aggregatum omnium ab , eo spectantium; sumptis AB , seu AV , hoc est v , arithmetice proportionalibus. Eorumque ab $A\alpha$ distantia, $\frac{1}{2}bB = \frac{1}{2}a$ respective, (per prop. 2. hujus.) Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu $A\alpha$; Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2b$: Hoc est, Semiquadratorum arcuum sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentium, in sinus versus arcuum ad semicirculum residuorum.

Hujusque Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu $A\alpha$, idem est atque Ungulæ aciem habentis $A\alpha$ momentum respectu $\tau\alpha$; propter magnitudines & distantias reciprocatas. Ut ad § H. prop. 16. ostensum est.

Nempe, si eidem Trilineo Restituto $A\tau\alpha$, Ungula insistant semiquadrantis, aciem habens $A\alpha$: Quæ rectis bB insistant plana, Ungulam complentia, erunt (propter angulum ad $A\alpha$ semiquadrantalem) ipsarum bB Semiquadrata, seu $\frac{1}{2}a^2$; adeoque ipsa Ungula, sive quæ toti $A\tau\alpha$, sive quæ illius Segmento AbB , insistit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2$; sumptis AB , seu AV , hoc est v , arithmetice pro-

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 351

proportionalibus. Eorumque à τa distantia est $V a = h$: Adeo Fig. 169. que simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu τa ; 170. est aggregatum omnium $\frac{1}{2} a^2 h$; sumptis v arithmetice proportionalibus. Atque eadem ratione, ejusdem respectu $T A$, erit Aggregatum omnium $\frac{1}{2} a^2 v$; propter singulorum planorum à $T A$ distantiam, v respective.

Planaque ipsis $b \beta$ insistentia, eandem Ungulam complementia, erunt rectangula $b \beta a$, hoc est $a h$ respective; eorumque a τa distantia $\frac{1}{2} h$: Adeoque Ungulæ aciem habentis $A a$, sive quæ toti $A \tau a$, sive quæ ipsius portioni $A b \beta a$ insitit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2} a h^2$, eo spectantium; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sed & eadem Ungula, si tertiis adhuc planis secetur, basi parallelis, æqualiter ab invicem distantibus: Erunt ea plana, (propter obliquam Ungulæ sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab $A a$ deficientia,) æqualia ipsis $A a \tau$, $x \xi \tau$, & sic deinceps, usque ad ultimum $f \tau$, seu ipsum τ punctum; si Ungulam totius $A \tau a$ trilinei spectemus: Vel, si portionem $A b \beta a$ spectemus; ipsis $A a \beta b$, $x \xi \beta b$, & sic deinceps usque ad ipsam βb . Hoc est, in totius Trilinei Ungula; æqualia totidem $A a \tau$ planis (hoc est, prismati ipsi $A \tau a$ insistenti altitudinem habenti τa), demptis omnibus $A x \xi a$, $A z \zeta a$, &c. (hoc est, demptâ contrariâ Ungulâ super eodem plano aciem habente $T \tau$.) Et similiter, in portione $A b \beta a$; æqualia totidem $A b \beta a$ planis (seu prismati $A b \beta a$ altitudinem habenti ipsi $a \beta$ æqualem) demptis omnibus $A x \xi a$, $A z \zeta a$, &c. eo spectantibus; hoc est, demptâ Ungulâ contrariâ $A b \beta a$ aciem habente $b \beta$. (Ut supra dictum est, § G. prop. 17.) Ergo, Ungulæ momentum, (sive totius Trilinei, sive portionis $A b \beta a$), respectu τa ; est Aggregatum Momenti planorum horum omnium. Quæ calculo facile exquirentur.

Est utique ejusmodi plani $A b \beta a$ cujusvis momentum respectu τa , $\frac{1}{4} f R^2 + \frac{1}{4} a h R - \frac{1}{4} a R^2 - \frac{1}{4} \tau R^2 - \frac{1}{4} h R$; per § D. prop. 17. Adeoque prismatis huic insistentis, altitudinem habentis $a = a$; $\frac{1}{4} a^2 R^2 + \frac{1}{4} a s R^2 + \frac{1}{4} a h R$.

Item, Omnia $\frac{1}{4} a R^2 + \frac{1}{4} s R^2 + \frac{1}{4} h R$, usque ad maximum $\frac{1}{4} A R^2 + \frac{1}{4} S R^2 + \frac{1}{4} H R$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ungulæ $A b \beta a$, aciem habentis $b \beta$, momentum respectu τa ; (adeoque & aciem habentis τa , momentum respectu $b \beta$; propter altitudines & distantias reciprocatas, ut sæpius ante dictum est.)

Sunt autem omnes a , (arcus arithmetice proportionales,) usque ad A maximum, $\frac{1}{2} . i^2$; per prop. 1. hujus. Ergo Omnia $\frac{1}{4} a R^2 = \frac{1}{8} A^2 R^2$. Item,

Fig. 169, Item, *Omnēs S*, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum $\alpha\beta v$
 170. Trilineum, hoc est \sqrt{R} , per § O, Q, prop. 17.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}R^2$:

Et *Omnia sh*, sunt $\sqrt{R^2} + \frac{1}{8}S^2R$, (ut ostensum est ad § A. prop. 18.)

Ergo, *Cmn.* $\frac{1}{4}shR$: $= \frac{1}{4}\sqrt{R^3} + \frac{1}{8}S^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}AR^2 + \frac{1}{4}SR^2 + \frac{1}{4}shR$: (hoc est, Ungulæ $Ab\beta a$ aciem habentis $b\beta$, momentum respectu τa ; vel aciem habentis τa , momentum respectu $b\beta$;) sunt $\frac{1}{8}A^2R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{R^3} + \frac{1}{8}S^2R^2$; seu (restitutis minuscularum valoribus) $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

(Quod quidem, ex Prismatis respectu τa momento, modò reperito, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$, subductum; relinquit Ungulæ $Ab\beta a$, aciem habentis Aa , momentum respectu τa , (vel etiam aciem habentis τa , momentum respectu Aa ;) Nempe, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Sed & idem (sine ope Prismatis) mox alio modo obtinebitur.)

Illud autem $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ Momentum, per Ungulæ $Ab\beta a$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{4}R + \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; adeoque à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; ejusque respectu TA momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Quod ipsum est aciem habentis TA , momentum respectu $b\beta$.

Idemque $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ $Ab\beta a$, aciem habentis τa , magnitudinem, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$, (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; adeoque ab Aa , $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ejusque respectu Aa , momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$: Idemque est momentum Ungulæ $Ab\beta a$, aciem habentis Aa , respectu τa ; prius exhibitum.

Quod quidem $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ $Ab\beta a$, aciem habentis Aa , magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{4}R - \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; adeoque à TA , $\frac{1}{4}R + \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; ejusque respectu

TA ,

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 353

T A, Momentum $\frac{1}{8}a^2k^2 - \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: aciemve Fig. 169,
habentis T A, momentum respectu A a.

Atque hoc demum $\frac{1}{8}a^2k^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$ mo- 170.
mentum, per Ungulæ A b β a, aciem habentis T A, magnitudinem

$\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}sbR = \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$ (§ D. prop. 17. inventam,)
divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab A a,

$\frac{\frac{1}{8}vR^2 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR - asv}{\frac{1}{4}aR - \frac{1}{4}sv}$; adeoque à b β, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$

$\frac{8vR^2 - s^2R^2 - 4asR - 4sv}{10aR - 6sR - sv}$: Ejusque, respectu b β, momentum,

$\frac{1}{8}a^2R^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; idem quod prius repertum est momentum
aciem habentis b β, respectu T A.

Adeoque; Si torius A r α Ungulas spectemus; (propter $a = \frac{1}{2}P$, G.
 $v = 2R$, $s = 0$;) Erit Ungulæ A r α, aciem habentis T r, magnitudo,

$\frac{1}{8}R^2P^2 + 2R^3$: Momentum respectu r α, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu
T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à r α, $\frac{1}{4}R - \frac{1}{4}$

$\frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$.

Acieque habentis A a; Magnitudo, $\frac{1}{8}R^2P^2 - 2R^3$; Momentum
respectu r α, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$:

Distantia Centri gravitatis à r α, $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à T A, $\frac{1}{4}R +$

$\frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$.

Acieque habentis r α; Magnitudo, $\frac{1}{8}R^2P$; momentum re-
spectu T r; $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu A a, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$:

Distantia Centri gravitatis à T r, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$; ab A a, $\frac{1}{4}P -$

$\frac{16R^2}{3P}$.

Acieque habentis T A; Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu
T r, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu A a, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$:

Distantia Centri gravitatis à T r, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$; ab A a, $\frac{1}{4}P -$

$\frac{16R^2}{5P}$.

Eademque per se poterant, eodem modo, calculo exquiri; quo Un-
gularum portionis A b β a momenta prius exquirebantur; quæque
inde dependent. Ex

H. Ex his item sic traditis, Ungularum portionis $b\beta\tau$ momenta Fig. 169. (quæque hinc dependent) haberi poterunt. Nempe, ex Momentis 170. Ungularum totius Trilinei $A\tau a$, subductis respectivis Ungularum portionis $Ab\beta a$, restant Momenta respectiva Ungularum $b\beta\tau$; sive respectu ipsarum τa , TA , sive respectu ipsarum Aa , $T\tau$, &c. Atque ex cognitis aliquibus reliqua facile derivantur.

Sed &c eadem possunt per se eodem modo exquiri, quo in ipsis $Ab\beta a$ factum est.

Est utique (per § E. prop. 17.) plani cujusque $b\beta\tau$, momentum respectu τa , $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; Adeoque *Omnia*, $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; (hoc est, momenta planorum omnium Ungulam $b\beta\tau$, aciem habentem $b\beta$, complementum;) sunt istius Ungulæ momentum.

Sed *Omnies a*, (arcus arithmetice proportionales, ab ipso a , usque ad maximum a seu $\tau\beta = a$), sunt, (per prop. 1. hujus), $\frac{1}{2}a^2$. Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 = \frac{1}{8}a^2R^2$.

Item *Omnies s*, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum Trilineum $\tau\beta v = hR$ per § Q. prop. 17.) Ergo *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2 = -\frac{1}{4}hR^2$.

Item *Omnia sh* (ad $b\beta\tau$ spectantia) $\frac{1}{2}h^2R$, (per § A. prop. 18.) Ergo *Omn.* $-\frac{1}{4}shR = -\frac{1}{8}h^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR^2$: (hoc est, Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, momentum respectu τa , seu aciem habentis τa , momentum respectu $b\beta$;) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}hR^2 - \frac{1}{8}h^2R^2 = \frac{1}{8}a^2R^2 - hR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2$; seu (propter $a = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$), $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{8}P^2R^2 + \frac{1}{4}PR^2 - 2R^4 + vR^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Quod quidem, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}hR^2 - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R - hR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem centri gravitatis distantiam à

τa , $\frac{1}{4}R - \frac{h^2R}{4a^2 - 8hR}$; adeoque à TA , $\frac{1}{4}R + \frac{h^2R}{4a^2 - 8hR}$; ejusque respectu TA momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}hR^2 + \frac{1}{8}h^2R^2$.

Idemque $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}hR^2 - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis τa , magnitudinem $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à

$b\beta$, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR - asb - 6hR^2 - h^2R}{6aR - 6sR - 2sh}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR - asb - 6hR^2 - h^2R}{6aR - 6sR - 2sh}$.

Adeoque

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 355

Adeoque ejusdem Ungulæ $b\beta r$ (aciem habentis τa) momentum Fig. 169, respectu $T r$, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}ashR + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$. Idemque 170. est, aciem habentis $T r$, momentum respectu τa .

Quod quidem $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}ashR + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta r$, aciem habentis $T r$, magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R - asR + bR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{4}R + \frac{b^2R - 2ash}{4a^2 - 8as + 8bR}$; adeoque

à TA , $\frac{1}{4}R - \frac{b^2R - 2ash}{4a^2 - 8as + 8bR}$; ejusque, respectu TA , momentum, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{4}ashR - \frac{1}{8}b^2R^2$. Idemque est, aciem habentis TA , momentum respectu $T r$.

Atque hoc denum $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{4}ashR - \frac{1}{8}b^2R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta r$ aciem habentis TA , magnitudinem, $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR$ (per § E. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $T r$, $\frac{1}{2}a + \frac{10bR^2 - b^2R - 5asR + ash}{10aR - 10sR + 2sh}$;

adeoque, à $b\beta$, $\frac{1}{2}a - \frac{10bR^2 - b^2R - 5asR + ash}{10aR - 10sR + 2sh}$; ejusque, respectu $b\beta$, momentum, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$; idem quod momentum, aciem habentis $b\beta$, momentum respectu TA , modo repertum.

Quæque de Ungulis $b\beta r$ hic dicta sunt; eadem omnino Ungulis $A b K$ conveniunt; substitutis a pro a , v pro b , TA pro τa , $A a$ pro $T r$, & vice versâ. Quippe $A b K$ portio, similiter adjacet rectis TA , $A a$, atque $\tau b \beta$ rectis $a r$, $r T$.

Solidorum autem, sive semisolidorum, respondentium magnitudo, ad magnitudinem Ungulæ correspondentis; eorumque momentum ad momentum hujus, (resp. ejusdem plani ad conversionis axem, aciemque Ungulæ, recti,) est ut P vel $\frac{1}{2}P$, ad R . Distantiaque à planis ad conversionis axem, aciemve Ungulæ, rectis, utrobique eadem respectiva.

Deinde: Si ex Ungularum $B b \beta a$ momentis, § F traditis; auferantur respectiva Ungularum $B b \beta a$ momenta: habentur respectiva Momenta Ungularum $A b B$: & quæ hinc dependent.

Est autem Ungulæ $A b \beta a$, aciem habentis $b\beta$ vel $A a$, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}a^2b$, per § I. prop. 17. Centrique gravitatis, in media longitudine positi, per prop. 2. distantiam à τa , $\frac{1}{2}b$; adeoque à TA , $2R - \frac{1}{2}b$;) Momentum respectu τa , $\frac{1}{4}a^2b^2$; respectu TA , $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2$: Illudque $\frac{1}{4}a^2b^2$, (ob distantias & altitudines reciprocatas,) momentum etiam, aciem habentis τa , respectu $b\beta$ vel

Z Z

A a:

Fig. 169, A.: Et $a^2 h R - \frac{1}{4} a^2 h^2$, momentum etiam aciem habentis TA, respectu
170. $b\beta$, vel A α . Estque utriusque horum, Distantia Centri gravitatis

a $b\beta$ vel A α , $\frac{1}{2} a$, per prop. 2. Magnitudo autem, aciem habentis
 $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} a h^2$; aciemque habentis TA, $2 a h R - \frac{1}{2} a h^2$; (per § F.
prop. 17.) Adeoque, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} h$; à TA, $R - \frac{2}{3} h$.

Si, itaque ex Ungulæ Ab $\beta\alpha$, aciem habentis TA, momento
respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momento respectu TA; $\frac{1}{8} a^2 R^2$
 $+ v R^3 - \frac{1}{8} v^2 R^2$, (per § F.) Auferatur respectivum Ungulæ Bb $\beta\alpha$
momentum, modo exhibitum, $a^2 h R - \frac{1}{4} a^2 h^2 = a^2 R^2 - \frac{1}{2} a^2 v R +$
 $\frac{1}{4} a^2 v^2$: Relinquetur, Ungulæ AbB, aciem habentis TA, mo-
mentum respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momentum respectu
TA; $-\frac{1}{8} a^2 R^2 - v R^3 - \frac{1}{8} v^2 R^2 + \frac{1}{2} a^2 v R - \frac{1}{4} a^2 v^2$. Quod per Ungu-
læ AbB, aciem habentis TA, magnitudinem, $-\frac{1}{4} a h^2 + \frac{1}{4} v R^2$
 $+ a v R + \frac{1}{4} v R^2 - \frac{1}{2} a v^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejus-

dem distantiam Centri grav. à $b\beta$, $\frac{1}{2} a + \frac{8 v R^3 - 5 a^2 R^2 - 3 a v R^2 - a v R}{-6 a h^2 + 8 a v R + 2 v R^2 - 4 a v^2}$;

ab A α , $\frac{1}{2} a - \frac{8 v R^3 - 5 a^2 R^2 - 3 a v R^2 - a v R}{-6 a h^2 + 8 a v R + 2 v R^2 - 4 a v^2}$.

Item; si ex Ungulæ Ab $\beta\alpha$, aciem habentis TA, momento re-
spectu A α ; aciemve habentis A α , momento respectu TA; $\frac{1}{8} a^2 h^2$
 $+ \frac{1}{4} a v h^2 - v R^3 + \frac{1}{8} v^2 R^2 + \frac{1}{4} a v v R$, (per § F.) Auferatur correspon-
dens momentum Ungulæ Bb $\beta\alpha$, modo exhibitum, $a^2 h R - \frac{1}{4} a^2 h^2$
 $= a^2 R^2 - \frac{1}{2} a^2 v R - \frac{1}{4} a^2 v^2$: Relinquetur, Ungulæ AbB, aciem ha-
bentis TA, momentum respectu A α ; aciemve habentis A α , mo-
mentum respectu TA; $-\frac{1}{8} a^2 R^2 + \frac{1}{4} a v R^2 - v R^3 + \frac{1}{8} v^2 R^2 + \frac{1}{4} a v v R$

Item; Si ex Ungulæ Ab $\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento re-
spectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, momento respectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{8} a^2 h^2$
 $+ v R^3 - \frac{1}{8} v^2 R^2$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum
Ungulæ Bb $\beta\alpha$, modo exhibitum, $\frac{1}{4} a^2 h^2 = a^2 R^2 - a^2 v R + \frac{1}{4} a^2 v^2$
 $= a^2 R^2 - \frac{1}{2} a^2 v R - \frac{1}{4} a^2 v^2$: Relinquitur, Ungulæ AbB, aciem ha-
bentis $\tau\alpha$, momentum respectu $b\beta$; aciemve habentis $b\beta$, mo-
mentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{8} a^2 R^2 + v R^3 + \frac{1}{8} v^2 R^2 + \frac{1}{2} a^2 v R - \frac{1}{4} a^2 v^2$.
Quod, per Ungulæ AbB, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{1}{4} h R^2$
 $+ \frac{1}{4} a h R - \frac{1}{2} a h^2 = -\frac{1}{4} a R^2 + \frac{1}{4} v R^2 + a v R - \frac{1}{2} a v^2$, (per § F.
prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis

à $b\beta$, $\frac{1}{2} a + \frac{8 v R^3 - 5 a^2 R^2 - 3 a v R^2 + a v R}{-10 a h^2 + 8 a v R - 2 v R^2 + 4 a v^2}$; ab A α , $\frac{1}{2} a -$

$8 v R^3$

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 357

$\frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 - asvR}{-10eK^2 + 8avR - 2svR - 4as^2}$ Idemque, per Ungulæ A b B, Fig. 169,

aciem habentis b β , magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$,^{170.}
(per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Ungulæ distantiam Cen-

tri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8vK^2 - 4a^2v}$; à T A,

$\frac{1}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8vK^2 - 4a^2v}$: Adeoque, à b B, $\frac{1}{4}R - h$

$(=v - \frac{1}{4}R) - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8vK^2 - 4a^2v}$. Et propterea ejus-

dem, respectu b B, momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Idemque est Ungulæ A b B, aciem habentis b B, momentum re-

spectu b β . Quod itaque per hujus magnitudinem, $\frac{1}{4}aK^2 - \frac{1}{4}sR^2$

$+ \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$ (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Un-

gulæ A b B, aciem habentis b B, distantiam Centri gravitatis à b β ,

$\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 7s^2K^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eK^2 + 6svR - 4as^2}$; adeoque ab A α , $\frac{1}{2}a -$

$\frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eK^2 + 6svR - 4as^2}$; ejusque respectu A α momentum,

$\frac{1}{8}a^2R^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$: quod etiam (prop-

ter altitudines & distantias reciprocatas) est Ungulæ A b B, aciem

habentis A α , momentum respectu b B.

Item; si ex Ungulæ A b β , aciem habentis $\tau\alpha$, momento resp. A α ,

aciemve habentis A α , momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$

$- vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ (per § F.) Auferatur correspondens Ungulæ B b β mo-

mentum, modò exhibitum, $\frac{1}{4}a^2h^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relin-

quetur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu

A α ; aciemve habentis A α , momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{8}a^2R^2$

$+ \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per

Ungulæ A b B, aciem habentis A α , magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R$

$+ asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus

dist. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 - 4a^2v}$;

à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 - 4a^2v}$: Adeoque à

b B, $\frac{1}{4}R - h (=v - \frac{1}{4}R) - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R - 8asR - 8vR^2 - 4a^2v}$.

Et propterea, ejusdem respectu b B momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - vR^3$

Fig. 169,
170.

$+\frac{1}{3}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$; ut prius. Atque hinc etiam, regrediendo, reliqua quæ Ungulam AbB aciem habentem $b\beta$ spectantia modo tradebantur, similiter derivari poterunt.

Sed & hæc omnia Momenta Ungularum AbB , (quæque hinc dependent,) similiter haberi possent, ex Ungulis $AKbB$, subductis respectivis Ungulis AbK . Habentur autem Ungularum $AKbB$ momenta, reliquaque inde dependentia, eodem plano modo quo Ungularum $Bb\beta a$: substitutis ubique v pro h , & TA pro τa , & vice versa. Quæ monuisse sufficiat.

K. Restat, ut Ungularum acies habentium Aa , (aut huic parallelas,) momenta respectu acierum suarum (reclarumque his parallelarum) ostendam; & Centrorum gravitatis inde distantias.

Si intelligatur portioni $Ab\beta a$ semiquadrantis Ungula insistere aciem habens $b\beta$; quæ hanc complent plana ipsi $A\tau a$ parallela, sunt ipsa $Ax\xi a$, $Az\zeta a$, &c. usque ad $Ab\beta a$; seu Omnia $Ab\beta a$, eo spectantia, ut ad § F. ostensum est: Adeoque, & eorum omnium, respectu Aa , momenta; hoc est, (per § H. prop. 17.) *Omnia*, $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{15}R - vR^2$, eo spectantia, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ipsum Ungulæ $Ab\beta a$ aciem habentis $b\beta$, momentum respectu Aa ; aut etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) aciem habentis Aa , momentum respectu $b\beta$.

Sunt autem *Omnia* a^2 , (sumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{3}a^3$; per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn* $\frac{1}{2}a^2R$: $=\frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omnia* as , (hoc est, momentum respectu Aa omnium βv , trilineum $a\beta v$ complementum;) sunt, $-eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. Adeoque, *Omn. as* R : $= -eR^3 - avR^2$.

Item, *Omn* v , (sumptis a arithmetice proportionalibus,) hoc est, ipsum AbK trilineum, est eR ; per § B. prop. 17. Adeoque *Omn. v* R^2 : $= -eR^3$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; hoc est, momentum Ungulæ $Ab\beta a$ aciem habentis $b\beta$ respectu Aa ; aciemve habentis Aa momentum respectu $b\beta$; est, $-2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $Ab\beta a$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$, (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab Aa , $a - \frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$: A-

deoque, à $b\beta$, $\frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$: Et propterea; ejusdem, respectu $b\beta$, momentum, $2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$.

Idemque,

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 359

Idemque $-2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{8}a^3R$ momentum, divisum per Un- Fig. 169.
gulae A b βa aciem habentis A α , magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR - vR^2$ 170:

(per § H. prop. 17.) exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à b β ,
 $-\frac{12eR^2 + 6avR + \frac{1}{2}a^3}{3a^2 + 6as - 6vR}$; Adeoque ab A α , $\frac{12eR^2 - 12avR + 2a^3 + 6a^2s}{3a^2 + 6as - 6vR}$;
& propterea, ejusdem, respectu A α , momentum (seu *Omnia a² h eò*
spectantia,) $2eR^3 - 2avR^2 + \frac{1}{2}a^3R + a^2sR$.

Et quidem si totius A τa Ungulam spectemus; erit (propter $a = \frac{1}{2}P$,
 $v = 2R$, & $s = 0$;) aciem habentis T τ , momentum respectu A α ;
aciemve habentis A α momentum respectu T τ , $\frac{1}{4}R^3P^3$. Adeoque
(propter illius magnitudinem $\frac{1}{8}R^3P^2 + 2R^3$; hujusque $\frac{1}{8}R^3P^2 - 2R^3$,
per § G. prop. 17.) erit, Aciem habentis T τ Distantia Centri gra-
vitatís ab A α , $\frac{8R^2P}{6P^2 + 96R^2} = \frac{1}{6}P - \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$; à T τ ,
 $\frac{1}{3}P + \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$; ejusque, respectu T τ , momentum, $\frac{1}{24}RP^3$
 $+ R^3P$.

Aciemque habentis A α , Distantia Centri gravitatis à T τ ,
 $\frac{1}{6}P - \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$; ab A α , $\frac{1}{3}P - \frac{8R^2P}{3P^2 + 48R^2}$;
hujusque, respectu A α , momentum, $\frac{1}{24}RP^3 - R^3P$.

Si autem ex Ungularum parallelogrammi A K βa momentis, au-
ferantur respectiva momenta Ungularum A b βa , habentur Ungu-
larum A b K momenta respectiva,

Est autem Ungulae A K βa aciem habentis K β , vel A α , (utpote
Prismatis, oppositarum basium triangularium,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2 \times 2R$
 $= a^2R$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à ter-
mino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque Aciem habentis b β momentum re-
spectu A α , vel aciem habentis A α momentum respectu b β , est
 $\frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis b β momentum respectu ipsius b β ; aci-
emve habentis A α , respectu ipsius A α , momentum $\frac{1}{3}a^3R$.

Ex his itaque; si subducantur respectiva Ungularum A b βa mo-
menta, § K tradita: Relinquitur Ungularum A b K momenta re-
spectiva.

Nempe; Ungulae A b K aciem habentis $\beta b K$; momentum re-
spectu A α ; aciemve habentis A α , momentum respectu $\beta b K$; $2eR^3$
 $- avR^2 + \frac{1}{8}a^3R$. Adeoque (propter illius magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R$
 $- vR^2$; hujus $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; per § H. prop. 17.) Aciem
habentis.

Fig. 169, habentis $\beta b K$, Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{12eK^2 - 6avR - a^3}{3a^2 - 6vR}$;
170.

adeoque à $\beta b K$, $\frac{-12eK^2 + 2a^3}{3a^2 - 6vR}$: Aciemque habentis $A\alpha$, Di-
stantia Centri gravitatis à $\beta b K$, $\frac{12eK^2 - 6avR - a^3}{3a^2 - 6as + 6vR}$; adeoque ab
 $A\alpha$, $\frac{-12eK^2 + 12avR + 2a^3 - 6a^2s}{3a^2 - 6as + 6vR}$.

Aciemque habentis $\beta b K$, momentum respectu $\beta b K$, $-2eR^3$
 $+ \frac{1}{3}a^3R$; Aciemque habentis $A\alpha$ momentum respectu $A\alpha$, $-2eR^3$
 $+ 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R - a^2sR$.

Quaque de Ungulis $Ab K$ dicta sunt; eadem Ungulis $\tau b \beta$, ac-
commodantur, substitutis a pro a , h pro v ; & $T\tau$, pro $A\alpha$.
Quippe similiter adjacet rectis τT , τa , ipsum $\tau b \beta$; atque ipsum
 $Ab K$, rectis $A\alpha$, AT .

Nempe, Ungula $\tau b \beta$, aciem habentis $\beta b K$, momentum re-
spectu $T\tau$, aciemve habentis $T\tau$, momentum respectu $\beta b K$, $2aR^3$
 $- 2sR^3 - a^2hR^2 + \frac{1}{6}a^3R$: Aciem habentis $\beta b K$ momentum re-
spectu $\beta b K$, $-2aR^3 + 2sR^3 + \frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis $T\tau$, re-
spectu ipsius $T\tau$, $-2aR^3 + 2sR^3 + 2abR^2 - \frac{1}{3}a^3R$
 $- a^2sR$: Et Aciem habentis $\beta b K$, Distantia Centri gravitatis à $T\tau$,
 $\frac{12aR^2 - 12sR^2 - 6abR - a^3}{3a^2 - 6hR}$; à $\beta b K$, $\frac{-12aR^2 + 12sR^2 + 2a^3}{3a^2 - 6hR}$;

Acieq; habentis $T\tau$, dist. Cen. grav. à $\beta b K$, $\frac{12aR^2 - 12sR^2 - 6abR + a^3}{3a^2 - 6as + 6hR}$;
à $T\tau$, $\frac{-12aR^2 + 12sR^2 + 12abR - 2a^3 - 6a^2s}{3a^2 - 6as - 6hR}$.

Sed & earundem Ungularum $\tau b \beta$ momenta, haberi poterunt; ex
Ungularum totius $A\tau a$ momentis, subductis momentis respectivis
Ungularum $Ab \beta a$: Restabunt utique momenta respectiva Ungula-
rum $\tau b \beta$; quæ & ad alias, ut opus fuerit, rectas facile transfe-
rentur.

M. Ex momentis autem Ungularum $Ab \beta a$; si subducantur respectiva
Ungularum $b\beta a B$ momenta; habentur momenta respectiva Ungu-
larum $Ab B$.

Est autem Ungula $b\beta a B$, aciem habentis $b\beta$, vel Ba , (utpote
Prismatis,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2 \times h = \frac{1}{2}a^2h$; ejusque ab acie sua Distantia
Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque aciem ha-

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 361

habentis $b\beta$ momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $b\beta$; $\frac{1}{6}a^3b = \frac{1}{3}a^3R - \frac{1}{6}a^3v$. Aciemque habentis $b\beta$, momentum respectu $b\beta$; aciemve habentis $A\alpha$, respectu $A\alpha$, momentum, $\frac{1}{3}a^3b = \frac{1}{3}a^3R - \frac{1}{3}a^3v$.

Hæc itaque, ex respectivis momentis Ungularum $A b \beta \alpha$ (§ K. inventis,) subducta; relinquunt respectiva Ungularum $A b B$ momenta.

Nempe; Ungulæ $A b B$, aciem habentis bK , momentum respectu $A\alpha$, aciemve habentis $A\alpha$, momentum resp bK ; $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$: Aciemque habentis bK momentum respectu bK , $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$: Aciemque habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, (hoc est, *Omn* $\frac{1}{3}a^3$, eo spectantia,) $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$.

Adeoque, (propter illius magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; hujusque $-\frac{1}{2}a^2R - asR - vR^2 - \frac{1}{2}a^2v$; per § I. prop. 17.) Ungulæ $A b B$, aciem habentis $b\beta$, Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
$$\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R - 6vR^2 + 3a^2v}$$
; à $b\beta$,
$$\frac{12eR^3 - 2a^3R - 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$$
: Aciemque habentis $A\alpha$. Dist. Cen. grav. à bK ,
$$\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R - 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$$
; ab $A\alpha$,
$$\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR - 2a^3v}{-3a^2R - 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$$
.

Atque his in Figuræ Sinuum verforum $A\tau\alpha$, ejusve partium, Ungulis, si, expeditis: Eadem operâ, eadem in Figuræ Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ expediuntur. Est enim (ut § M. prop. 17. ostensum est,) Figura Sinuum Rectorum Unius quadrantis $\alpha\delta\kappa$, eadem plane figura atque d D A, figuræ Sinuum verforum portio. Adeoque ex magnitudine, Momentis, Ungulisque, figuræ d D A (quæ figuræ $A\tau\alpha$ pars est,) & partium ejusdem; facile erit figuræ $\alpha\delta\kappa$, adeoque & $\alpha\tau\kappa$, partiūque illius, Magnitudines, Momenta, Ungulasque, quæque hinc dependent, derivare.

Vel etiam, sine ope figuræ $A\tau\alpha$, ejusve portionis d D A; possunt ipsius $\alpha\tau\kappa$, partiūque hujus, Ungulæ, (ut § Q. prop. 17. ostensum est,) earumque momenta, facile obtineri.

Cum enim rectæ βv , trilineum $\alpha\beta v$ complentes, sint arcuum arithmetice proportionalium (ipsis $\alpha\beta$ respective æqualium) sinus Recti: Quæ Ungulam $\alpha\beta v$ aciem habentem $\alpha\beta$ seu τ , plana complent; fuit eorundem sinuum rectorum Semiquadrata, hoc est,

Quonia,

N.

Fig. 169. *Omnia*, $\frac{1}{2}s^2$, eo spectantia: Quorum Semiquadratorum summa, seu ipsa $\alpha\beta$ unguia aciem habens $\alpha\tau$, seu plani momentum respectu rectæ $\alpha\tau$, est $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17. Atque eorundem semiquadratorum $\frac{1}{2}s^2$, seu planorum Triangulorum momentum respectu ipsius $\alpha\tau$, (propter $\frac{2}{3}s$, Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, per prop. 6. hujus) sunt, *Omnia*, $\frac{2}{3}s^3$; (propter $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{3}s^3$.) Aut etiam (propter $s^2 = vh$), *Omn.* $\frac{1}{3}svh$. Hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* s^3 ; (sumptis a arithmetice proportionalibus,) idem atque *Omn.* v^2R : (per § V. prop. 13.) seu *Omn.* s^2R ; sumptis v arithmetice proportionalibus: Hoc est, Duplum momenti (respectu $A\alpha$) segmenti semicirculi ABV fig. 169. in R ductum; (sunt enim *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$: sumptis v arithmetice proportionalibus, momentum illud:) Hoc est, (per § R. prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR = \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$. Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, seu $\frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, est Ungulæ $\alpha\beta$ unguia aciem habentis $\alpha\tau$, momentum respectu $\alpha\tau$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$.

Vel sic etiam; Sunt *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 = \text{Omn. } \frac{1}{3}svh$; (propter BV , mediam proportionalem inter AV & VO ; hoc est, s , inter v & h ;) seu (propter $h = 2R - v$), *Omn.* $\frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$.

Sunt autem *Omn.* sv : (sumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{3}svR = \frac{1}{3}v^2R^2 = \frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2$.

Item; *Omn.* $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{6}v^3R = \frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$, (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{3}v^3R = -\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2 = (\text{Omn. } \frac{1}{3}svh = \text{Omn. } \frac{1}{3}s^3)$: Hoc est, momentum Ungulæ $\alpha\beta$ unguia aciem habentis $\alpha\tau$, respectu ipsius $\alpha\tau$ rectæ, est, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}v^3R$, hoc est, $\frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$. ut prius. Atque hinc Distantia Centri gravitatis ab $\alpha\tau$ colligitur, ut prius.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta$ unguia aciem habentis $\alpha\tau$ momentum respectu ipsius $\alpha\tau$, (propter $v = s = R$, & $a = \frac{1}{4}P$), est $\frac{2}{9}R^4$; ejusque magnitudo $\frac{1}{16}R^2P$; Centrique gravitatis ab $\alpha\tau$ distantia, $\frac{32R^2}{9P}$.

Un-

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 363

Ungulæque totius $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu Fig. 169, $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R^4$; (iplius $\alpha\delta\kappa$ duplum, propter duplam magnitudinem: 170.

Distantiaque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ eadem, nempe $\frac{32R^3}{9P}$: Et quidem (per prop. 5.) in ipsa $\delta\kappa$ recta; hoc est, à $T\tau$, vel $A\alpha$, $\frac{1}{6}P$; & propterea ejusdem respectu $A\alpha$, seu $T\tau$ momentum, (propter magnitudinem $\frac{1}{3}R^2P$,) est $\frac{1}{3}R^2P^2$: Quod idem est aciem habentis $T\tau$, vel $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; propter altitudines & distantias reciprocitas. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{3}R^2P$) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}P$.

Similiter; Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu $A\alpha$; sunt omnium planorum $\alpha\xi\theta$, $\alpha\zeta\upsilon$, &c. usque ad $\alpha\beta\upsilon$, (ungulam illam complementum) momenta respectu $A\alpha$; hoc est (per § Q. prop. 17.) $Omn. - cR^2 - avR$: seu $Omn. - aR^2 - sR^2 - avR$, eò spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem $Omn. a$, (arcus arithmetice proportionales, eo spectantes;) $\frac{1}{2}a^2$, (per prop. 1. hujus;) adeoque $Omn. - aR^2 = -\frac{1}{2}a^2R^2$.

Et $Omn. s$ (eo spectantes) hoc est, ipsum $\alpha\beta\upsilon$ planum, est vR , (per § Q. prop. 17.) Adeoque $Omn. sR^2 = vR^3$.

Item $Omn. av$ (sumptis a arithmetice proportionalibus,) sunt ipsius $A\beta K$ plani, momentum respectu $A\alpha$; hoc est, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, (per § H. prop. 17.) Adeoque, $Omn. avR = \frac{1}{2}a^2R^2 - asR^2 - vR^3$.

Ergo; $Omn. - aR^2 + sR^2 + avR = 2vR^3 - asR^2$. Quod itaque est Momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Quod quidem momentum, divisum per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, magnitudinem cR^2 seu $aR^2 - sR^2$, (per § Q. prop. 17.) exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{2vR - as}{a - s = c}$; ade-

oque à $\beta\upsilon$, $a - \frac{2vR - as}{a - s} = \frac{a^2 - 2vR}{a - s = c}$; ejusque propterea respectu $\beta\upsilon$ momentum, $a^2R^2 - 2vR^3$.

Idemque $2vR^3 - asR^2$, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem $-cR^2 + avR$ (per § Q. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2 - asR}{-aK + sK + av}$; adeo-

A a a

q. z

Fig. 169,
170.

De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

que ab $A\alpha$, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-aR - \frac{1}{2}R + av} = \frac{-a^2R - 2asR + a^2v - 2vR^2}{-aR - \frac{1}{2}R + av} = \frac{-cR - av}{-a^2vR - 2vR^3}$;

hujusque propterea, respectu $A\alpha$, momentum, $-a^2R^2 + 2asR^2$;
Ft, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\delta\kappa$; $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; Ungulæque $\alpha\delta\kappa$ aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$; Aciemque habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$. Centrique gravitatis, Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\delta\kappa$, distantia ab $A\alpha$, $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$; Aciemque habentis $A\alpha$, distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - 2R$.

Ungulæ autem totius $\alpha\tau\kappa$ figuræ sinuum rectorum totius semicirculi, aciem habentis sive $A\alpha$, sive $\tau\tau$, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2P$, $s = 0$.) Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$; Momentum respectu aciei suæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; respectu termini oppositi, $4R^4$; Distantiaque Centri gravitatis ab acie sua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab opposito termino, $\frac{8R^2}{P}$.

Ungulæque $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque omnium $\alpha\beta\upsilon$ planorum, ipsam complementum, respectu ejusdem $\tau\alpha$: Hoc est, (per § Q. prop. 17.) $Omn. \frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}sR$; seu $Omn. \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sR$: eo spectantia: sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn. a*: (arithmetice proportionales,) $= \frac{1}{2}a^2$. Adeoque $Omn. \frac{1}{4}aR^2 = \frac{1}{8}a^2R^2$.

Et *Omn. s*: (ut modo ostensum,) $= vR$. Adeoque $Omn. -\frac{1}{4}sR^2 = -\frac{1}{4}vR^3$.

Item *Omn. s v*: (per § A. prop. 18.) $= \frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque $Omn. \frac{1}{4}sR^2 = \frac{1}{8}v^2R^2 = \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Ergo, $Omn. \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sR = \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$, seu $\frac{1}{8}efR^2$. Quod itaque est momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu $\tau\alpha$; Idemque (propter distantias & altitudines reciprocatas,) etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$ magnitudinem (modo dictam) eA^2 , divisum; exhibet hujus, à $\tau\alpha$, distantiam Centri gravitatis, $\frac{1}{8}f = \frac{1}{8}a - \frac{1}{8}s$.

Idemque momentum, divisum per magnitudinem Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}sR$ (per § Q. prop. 17.) exhibet Ungulæ

PROP. XIX. De Calculo Centri Gravitatis. 365

Ungulæ $\alpha\beta v$ aciem habentis $\tau\alpha$, Distantiam Centri gravitatis à βv , Fig. 169,

$$\frac{a^2 R - s^2 R = ef R}{2aR - 2sR - 2sv}; \text{ adeoque ab } A\alpha, \frac{a^2 R - 2asR + s^2 R + 2asv}{2aR - 2sR - 2sv} 170.$$

$$= \frac{e^2 R + 2asv}{2eR + 2sv}; \text{ \& propterea, ejusdem respectu } A\alpha \text{ momentum,}$$

$\frac{1}{8}a^2 R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2 R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2 R^2 + \frac{1}{4}asvR$: Quod ipsum (propter distantias & altitudines reciprocatas) est etiam momentum Ungulæ $\alpha\beta v$ aciem habentis $A\alpha$, respectu $\tau\alpha$. Atque hoc demum per hujus magnitudinem (modo dictam) $-eR^2 + avR$, divisum; exhibet Ungulæ $\alpha\beta v$, aciem habentis $A\alpha$, distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{a^2 R - 2asR + s^2 R + 2asv}{-8aR - 8sR + 8av} = \frac{e^2 R + 2asv}{-8eR - 8av}$.

Et speciatim, Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\tau\alpha$, aciemve habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\delta\kappa$; (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{128}R^2 P^2 - \frac{1}{8}R^4$. Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{128}R^2 P^2 + \frac{1}{8}R^4$. Item Aciem habentis $\delta\kappa$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}P + \frac{1}{8}R$: Aciemque habentis $A\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{128R} = \frac{1}{8}R - \frac{P^2}{128R}$: Aciemque ha-

bentis $\tau\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$ ab $A\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

In Ungulis igitur expositis, tum quæ figuram Sinuum Verorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, eorumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines, tum Momenta; & Centri gravitatis distantias, tum à plano per aciem perpendiculari, tum à plano ad aciem recto; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, constat ex prop. 12. nempe in eo quæ Ungulæ altitudinem bifecat. Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsum in singulis gravitatis Centrum determinavimus.

Quæ autem de Ungulis traduntur, eadem & Solidis conversione factis, eorumve Semilolidis, aliisve imperfectâ conversione factis, facile accommodantur: per prop. 12, & 14. hujus. Nempe Semilolidi conversione facti, magnitudo, est ad correspondentem Ungulam Semiquadrantalem, ut $\frac{1}{2}P$ ad R : Ejusque Centri gravitatis distantia à plano quod conversionis Axi rectum sit, eadem est quæ

A a a 2

Ungulæ

Q.

Fig. 169,
170.

Ungulæ à Plano aciei suæ recto : Adeoque momenta illius ad respectiva momenta hujus, respectu istius plani, sunt ut ipsæ magnitudines, nempe ut $\frac{1}{2} P$ ad R : Centrique gravitatis Semisolidi distantia à conversionis axe, ad illam Ungulæ ab acie sua ; ut $2 R$ ad $\frac{1}{2} P$: Semisolidique momentum respectu axis sui, ad illud Ungulæ respectu aciei suæ, (in ratione quæ ex magnitudinum & distantiarum rationibus componitur,) ut 2 ad 1. Ut in suis locis passim ostensum est.

Quæque de expositis Ungulis (sive quæ figuram Sinuum Versorum, sive quæ figuram Sinuum Rectorum spectant, eorumve partes,) dicta sunt : eadem ad alias (calculi rite adhibito) facile accommodantur.

R. Si autem pro figuris jam expositis $Ar\alpha$, $ar\kappa$, Protractæ Contractæve considerandæ veniant : Quoties rectæ bB in Calculum veniunt ; pro a , substituenda erit alia quantitas quæ ad illam sit, ut $r\alpha$, ad $\frac{1}{2} P$; ut ad Propositiones præcedentes monitum est.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum Unius Quadrantis traduntur ; eadem etiam ad Solida figuram Chordarum in Semicirculo spectantia transferentur ; uti ad propositiones præcedentes monitum est.

PROP.

PROP. XX.

Semicyclois, est, correspondentis Semicirculi Generantis, *Tripla*: Et Partes, Partium (respective sumpta- Fig. 169.
rum,) *Tripla*. Puta $A\tau\alpha = 3 AD\alpha$; & $b\beta\alpha A 170.$
 $= 3 B\alpha A$. Et sic ubique.

Illorum verò Momenta, ad Momenta horum, respectu C.
ejusdem $\tau\alpha$ Tangentis, ut 5 ad 2; seu *Dupla-sesqui-*
altera.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quod ad
Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra
gravitatis, in Semicycloide; quæ supra in Semicirculo
(prop. 15.) & in Figura Sinuum versorum, (prop. 17.)
determinantur.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præce-
dentibus)

Semicycloidis $A\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Momentum re- B, C.
spectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^2P$; respectu TA , $\frac{3}{8}R^2P$: Distantia Cen-
tri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R$; à TA , $\frac{2}{3}R$: Momentum
respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{1}{3}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{16}RP^2$
 $-\frac{1}{3}R^3$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$;
à $T\tau$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$.

Complementi Semicycloidis, $A\tau T$; magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Mo- B, C.
mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^2P$; respectu TA , $\frac{3}{8}R^2P$; Di- H..
stantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R$; à TA , $\frac{1}{3}R$: Mo-
mentum

Fig. 169, 170. mentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}RP^2 + \frac{1}{3}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{6}RP^2 - \frac{1}{3}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

B, D. Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha A$, magnitudo $\frac{1}{2}fR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{12}shR$; respectu TA , $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{12}shR$; Distantia Centri grav. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R + \frac{5sh}{18f}$; à

TA , $\frac{1}{6}R - \frac{5sh}{18f}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{12}s^2R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s - \frac{4vR + 2s^2}{9a + 9s} = \frac{1}{2}f - \frac{4vP + 2s^2}{9f}$.

B. Segmenti Semicycloidis $b\beta\tau$, Magnitudo $\frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{12}shR$; & respectu TA , $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{12}shR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R - \frac{5sh}{18\alpha - 18s}$; à TA , $\frac{1}{6}R + \frac{5sh}{18\alpha - 18s}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}s + \frac{2h^2}{9\alpha - 9s}$; Momentum resp: $T\tau$, $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{2}\alpha sR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{3}h^2R$.

B, F. Trapezii $b\beta\alpha V$; Magnitudo $ab + \frac{1}{2}sh$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sh^2$; respectu TA , $2abR + shR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sh^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3a + 2s}{6a + 3s}b$; à TA , $2R - \frac{3a + 2s}{6a + 3s}b$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2h$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3fa + s^2}{6a + 3s}$.

B. Segmenti Semicycloidis, bVA ; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; respectu TA , $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; & respectu bV , $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $-\frac{9eR^2}{-6eR - 12av + 6sv} - \frac{12nvR + 3svR - 6as^2 + 4s^3}{-6eR - 12av + 6sv}$; à

à T A, $\frac{-3eR^2 - 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}{-6eR - 12av + 6sv}$; à b V, $\frac{3eR^2 - 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}{-6eR - 12av + 6sv}$; Fig. 169; 170.

: Momentum respectu K, L.

A α, $-\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 3asR - s^2R - 3asv - 2s^2v}{-6aR + 6sR - 12av - 6sv}$.

Trilinei A b K; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$; Momentum re-

specu T A, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3$; respectu τ α, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; respectu b V, $-\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3$; Momentum respectu A α, $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}s^2R - \frac{1}{2}asv - \frac{1}{6}s^2v$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{8vR^2 + 6a^2R - 6asR - s^2R - 6asv + 4s^2v}{6eR - 6sv}$. K.

Adeoque exhibentur tum totius Semicycloidis, tum ejusdem Partium expositarum, Magnitudines, & Momenta respectu rectarum expositarum, ipsaque Centra gravitatis. M.

Quæ autem de Momentis hic tradita sunt; ad Ungularum magnitudines, & Solidorum conversione factorum, facile transferuntur. Et planorum hic consideratorum momenta, (propter data ipsa Centra gravitatis,) respectu rectarum aliarum, quocunque situ positarum, facile haberi possunt.

Eademque omnia quæ de his expositis Cycloidis portionibus traduntur; ad alias item, variis modis abscissas, facile erit accommodare; additionibus & subductionibus, prout res postulaverit, adhibitis.

Quæque de Cycloide primaria jam traduntur; Ad Cycloides Protractas & Contractas, facile transferuntur. N.

A. **Fig. 166.** SI super τa rectâ, insists circulus (quem *Circulum Generantem*, seu *Generatorem* dicimus,) puncto sui b (quod *punctum lineans* appellabimus) rectam in τ tangens; qui super eadem recta volvi intelligatur (motu continuo & aquabili) peripheriâ suâ (continuâ ad rectam applicatione) commensurans æqualem rectam $\tau a \tau$, donec b punctum lineans, in sublime latum, (adeoque curvam suo motu describens $b b$,) circuitu facto, eandem $\tau a \tau$ rectam, (in ejusdem altero extremo τ ,) iterum contingat: (dum interim Centrum suum c , rectam $c C c$ describat, ipsi $\tau a \tau$ parallelam & æqualem:) Curvam $b b$ descriptam, *Lineam Cycloidem* appellabimus: Rectam τa , *Cycloidis Basin*: Figuram curvâ illâ & Basē comprehensum, $\tau \tau A$, *Figuram Cycloidem*: Ejusque semissem $\tau a A$, *Semicycloidem*: Et bisecantem rectam (basī perpendicularem) $a C A$, *Cycloidis Axem*.

Cycloidis autem Nomen, quod spectat, Videtur (mihi saltem) *Cyclois* (hoc est, Græce Κυκλοῖς , Κυκλοῖδης ,) potius quam *Cycloides* (hoc est, Κυκλοειδής , Κυκλοειδέης , contraſte Κυκλοειδής ;) dicenda: utpote quæ non tam *Circulo similem*, quàm *ex circulo oriundam*, lineam vel figuram indicat.

Manifestum autem est, (ex constructione Cycloidis,) non modo Peripheriam Circuli Generantis integram (propter continuam sui quæ supponitur ad rectam τa applicationem) ipsi τa æqualem esse; (adeoque semissem semissi, &c. puta curvam Semicirculi $a B A$, rectæ τa , &c.) Sed &, particulatim, dum Circulus Genitor, Basin in a contingens, puncto suo lineante designat Cycloidis punctum b ; rectam $\tau \beta$ (propter eandem continuam ἐφαπτομένην) curvæ $b \beta$ æqualem esse; hoc est, (ductâ rectâ $b B V$ basī parallelâ, quæ occurrat in B Circulo Genitori circa Cycloidis Axem constituto, Axique in V ,) curvæ $a B$: Adeoque, & reliquam reliquæ; nempe rectam βa , hoc est $b B$, ipsi $B A$ curvæ. Et sic ubique.

Et propterea: Rectam $b V$, ubique æqualem esse, aggregato Arcus & Sinus recti, Sinui verso $V A$ competentium; puta (retentis Symbolis propositionum præcedentium) $b V = B A + B V = a - \text{vers}$. Atque hoc indifferenter, sive sit V punctum, supra C Centrum circuli Generantis, sive infra, sive denique in ipso C puncto.

Ductisque $B a$, $b \beta$, rectis; sunt (per 33. El. 6. *Euclidis*) Anguli $B a A$, proportionales ipsis quibus insistent Arcubus $B A$; hoc est, rectis $b B$, seu βa : Adeoque anguli $B a \tau$, hoc est, $b \beta \tau$, arcubus $B a$, seu $b \beta$; hoc est rectis $\beta \tau$. Nempe, (propter angulum in centro duplum Anguli in Peripheria, per 20. El. 3.) Ut $\tau \beta$ recta, hoc est

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 371

est arcus, αb , seu αB , ad Semiperipheriam $\alpha B A$, vel huic æqualem rectam $\tau \alpha$; sic angulus $b \beta \tau$, hoc est $B \alpha \tau$, ad $A \alpha \tau$ rectum.

Divisâ itaque $\tau \alpha$ in partes quodlibet æquales, in punctis ϕ , ϵ , δ , Fig. 167. ζ , ξ , &c. ductisque, ab his punctis contractus ad punctum lineans, rectis ϕf , ϵe , δd , ζz , ξx , &c. (quibus parallelæ sint in Semicirculo, αF , αE , αD , αZ , αX , &c. arcuum arithmetice proportionalium subtensa:) erunt, tum anguli $f \phi \tau$, $e \epsilon \tau$, $d \delta \tau$, $z \zeta \tau$, $x \xi \tau$, &c. tum, his æquales, $F \alpha \tau$, $E \alpha \tau$, $D \alpha \tau$, $Z \alpha \tau$, $X \alpha \tau$, &c. arithmetice proportionales: Eorumque communis excessus, primo æqualis; puta $f \phi \tau$, vel $F \alpha \tau$; Nempe, ea pars anguli recti, quæ est $\tau \phi$, totius $\tau \alpha$; seu arcus $F \alpha$, semiperipheriæ $\alpha F A$.

Divisis autem hoc modo, tum Semicycloide rectis $f \phi$, ϵe , $d \delta$, &c. tum Semicirculo, rectis $F \alpha$, $E \alpha$, $D \alpha$, &c. in segmenta numero æqualia, singula singulis respective correspondentia: Ductisque insuper in Semicycloide, à punctis ξ , ζ , δ , &c. rectis $\xi \pi$, $\zeta \sigma$, $\delta \sigma$, &c. quæ parallelæ sint rectis ζz , δd , ϵe , &c. Erunt anguli omnes $x \xi \pi$, $z \zeta \sigma$, $d \delta \sigma$, &c. æquales, tum inter se, tum ipsi $f \phi \tau$, tum cuilibet angulorum $\tau \alpha F$, $F \alpha E$, $E \alpha D$, &c. qui item (propter æquales arcus αF , $F E$, $E D$, &c.) sunt inter se æquales.

Ductis porro, tum in Semicycloide rectis $x O$, $z p$, $d r$, &c. tum in Semicirculo, $X O$, $Z P$, $D R$, &c. basi $\tau \alpha$ parallelis; inscribatur, tum Semicycloidi, figura ex Trapezis; tum Semicirculo, Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa inscripta Trapezia, Triangulorum inscriptorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) plusquam Tripla.

Constat enim Trapeziorum illorum quodlibet, ex Triangulo simul & Parallelogrammo. Quorum illud est Triangulo sibi correspondenti in Semicirculo (fig. 167, seu 169.) ubique æquale; (quippe simili, & æque alto.) Hoc autem, illius plusquam duplum; utpote correspondenti in fig. 170. parallelogrammo æquale, (æque altum scilicet, & super æquali base,) quod respectivi Trianguli plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostensum est. Puta Triangulum $\pi \xi p$ fig. 167, æquale Triangulo $Z \alpha P$ fig. 167 seu 169; & parallelogrammum $z \zeta \xi \pi$, fig. 167, æquale (utpote æque altum & super æquali base) Parallelogrammo correspondenti $z \zeta \xi \pi$ fig. 170; quod Trianguli correspondentis $Z \alpha P$ plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. demonstratur: Adeoque Totum $z \zeta \xi p$ Trapezium, ejusdem $\pi \xi p$ seu $Z \alpha P$ Trianguli plusquam Triplum. Et sic ubique.

Deinde continuatis rectis αX , αZ , αD , &c. ad Q , I , Y , &c. Fig. 168. rectisque

B b b

Fig. 168. rectisque ξx , ζz , δd , &c. ad q , i , y , &c. rectisque $\xi \pi$, $\zeta \rho$, &c. ad r , v , &c. ductisque rectis tum AQq , XI , ZY , &c. tum $x i$, $z v$, &c. ipsi τa parallelis: Circumscribatur, tum Semicycloidi Figura ex Trapezis, tum Semicirculo Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa circumscripta Trapezia, circumscriptorum Triangulorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) minus quam Tripla.

Constat enim Trapeziorum horum quodlibet, ex Triangulo simul & parallelogrammo. Quorum quidem illud est Triangulo ad Semicirculum posito, ubique æquale, (utpote simili, & æque alto:) Hec autem, illius minus quam duplum; utpote respectivo Parallelogrammo fig. 170. æquale, (cum æque altum sit, & super æquali base,) quod Trianguli respectivi minus quam duplum esse, ad δA . prop. 17. ostenditur. Puta, Triangulum ξx fig. 168. æquale Triangulo IaX fig. 168, seu 169. Et Parallelogrammum $i \zeta \xi$ fig. 168. æquale Parallelogrammo $i \zeta \xi x$ fig. 170. adeoque minus quam Trianguli duplum, ut ad δA . prop. 17. ostenditur. Et propterea totum $i \zeta \xi x$ Trapezium, ejusdem IaX Trianguli minus quam Triplum. Ex sic ubique.

Fig. 166, Cumque hæc ubique obtineant: Figura illa ex Trapezis Inscripta
167, sive toti Semicycloidi $\tau b A a$, sive ipsius portioni, ut $\tau b \beta$, aut $\beta b A a$,
168, aut etiam $\beta b d \delta$, (utrobique enim, sive de tota sive de parte, eodem modo procedit demonstratio;) Major est quam Tripla Figuræ
169. ex Triangulis correspondentis, Inscriptæ, sive toti Semicirculo $a B A$, sive ipsius correspondenti portioni, ut $a B a$, aut $a B A$, aut etiam $a B D a$: Circumscripta verò, Circumscriptæ, Minor quam Tripla.

Cumque, multiplicatis Sectionibus, Inscriptæ & Circumscriptæ Differentia continue decrescat utrobique, donec tandem datâ quâvis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta Inscriptæ Minor quam Tripla, nec Circumscripta Circumscriptæ Major quam Tripla, esse possit: Continuatâ in infinitum sectione, evanescet differentia; Inscriptis simul & Circumscriptis coincidentibus illic cum Semicycloide ejusve portione, hic cum Semicirculo hujusve portione correspondente: eritque propterea tum Semicyclois Semicirculi tripla, tum partes partium respective sumptarum.

Hoc est; tum Semicyclois $\tau b A a$, Tripla Semicirculi $a D A$; tum istius Portio, $b \beta a v A$, sectoris hujus $B a A$; portioque reliqua $\tau b \beta$, reliqui segmenti $a B a$; portioque $\beta b d \delta$, sectoris $B a D$, Tripla. Et sic ubique. Quod erat primo loco probandum.

Est

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 373

Est utique *Semicyclois*, Figura ex *Semicirculo* & *Figurâ Sinuum* Fig. 166, *Verforum* (*Arcuumve*) composita. Quippe Recta qualibet bBV fig. 166, æqualis duabus simul bB , BV , fig. 170, 169. Et quidem, 170, si ex *Semicycloidis* Trapezis singulis (fig. 167, vel 168.) eximi intelligantur sua respective Triangula; hoc est, ex *Semicycloide* quam constituunt illa numero infinita Trapezia, *Semicirculus* quem illa numero infinita Triangula, aut illis saltem æqualia, constituunt; (protrusis rectis bB , ad rectam Aa ; ut puncta B , V , congruant:) Reliqua Parallelogramma (prius inclinata, jam exemptis Triangulis erecta,) eadem erunt cum parallelogrammis (fig. 170.) correspondentibus, figuram Sinuum Verforum Arcuumve complementibus. Quod itaque *Trilineum Restitutum* dicimus; propter parallelogramma, quæ in *Semicycloide* interpositis triangulis obliquabantur, in debitum situm restituta in *Trilineo* fig. 170. Quod quidem *Trilineum* aliud non est quam illud ipsum fig. 166, 167, 168. *Trilineum* $A\tau aD$, (curvâ cycloidis, & *Semicirculi* convexâ, rectâque τa , comprehensum,) in debitum situm, exempto *Semicirculo*, restitutum.

Atque in partibus similiter: Puta, ex Trapezis *Quadrilineum* $\beta b Aa$ in *Semicycloide* constituentibus, exemptis Triangulis *Sectorem* *Trilineum* BaA constituentibus (vel his æqualibus;) reliqua Parallelogramma constituent *Quadrilineum* $\beta b Aa$ *Trilinei* restituti, aut huic æquale; Hoc est, in *Semicycloide*, *Quinquilineum* $b\beta aBA$ (tribus rectis $b\beta$, βa , aB , & duabus curvis bA , BA , comprehensum,) vel *Quadrilineum* $b\beta aDA$ fig. 166. (tribus curvis $b\beta$, bA , ADa , ut recta βa , comprehensum;) *Sectoris* BaA duplum: Adeoque (quod ex utrisque componitur) *Quadrilineum* *Cycloidis* $\beta b Aa$, (rectis Aa , $a\beta$, βb , curvâque bA , comprehensum,) ejusdem *Sectoris* BaA , triplum. Et sic ubique. Similiter; Si ex *Semicycloidis* Segmento AbV , eximatur Segmentum *Semicirculi* ABV , relinquitur AbB fig. 166. = $Ab'B$ fig. 170. Et sic ubique. Quod & de eorum Momentis respectu rectarum τa , TA , aut aliarum hinc parallelarum, pariter intelligendum erit: Propter tum Magnitudines tum Distantias æquales. (Si vero ad Aa , aliamve rectam quæ ipsis τa , TA , parallela non sit, æstimentur momenta; secus erit: Quippe tum, æqualium Magnitudinum, Distantiæ inæquales erunt. Ut infra dicendum erit.)

Et quidem, ut, in *Cycloide*, recta bBV (aggregatum arcûs & sinûs recti) ea quantitas est quam dicimus $f = a + s$: Sic, in *Trilineo* restituto (seu *Figurâ Arcuum*) si Diametro Aa describatur circulus, quæ à b puncto ordinatim applicatur ad Axem Aa , est a Arcus;

$Bbb\ 2$

quæ

quæ verò ad peripheriam ulteriorem continuetur est $a+s=f$; quæque peripheria propiore intercipitur est $a-s=e$, differentia arcûs & finis recti sinui versio AV convenientium. (Putæ, fig. 186, $bB=a+s=f$; fig. 185, $bB=a-s=e$; utrobique $bV=a$, $BV=s$.) Adeoque si, exemplo illo Semicirculo, protruderentur illæ interceptæ rectæ usque ad A axem; quæ prodiret figura esset figura differentiarum Arcuum sinuumque rectorum: Sicut, ex Semicycloide, exemplo Semicirculo, figura Arcuum formabatur.

B. His ita constitutis; (Nempe Semicycloidem Semicirculi Triplam Fig. 166, esse, & partes partium respectue sumptarum; vel quod eodem 170. recidit, Semicycloidem Semicirculo & Figuræ Sinuum versorum Arcuumve (hoc est, Trilineo restituto,) simul sumptis æqualem, ejusque partes partibus horum respectue sumptis:) ad calculum sic procedimus: Retentis Symbolis propositionum præcedentium.

Est Semicirculus A D $a = \frac{1}{4} RP$, (per § D. prop. 15.) & Trilineum restitutum $\tau AD a$ (istius duplum) $\frac{1}{2} RP$; per § B. prop. 17. Ergo Semicyclois (ejusdem Triplum) $\tau AV a = \frac{1}{2} RP$. Adeoque Parallelogrammi residuum seu Semicycloidis complementum A $\tau T = \frac{1}{4} RP$.

Item Sector B $\alpha A = \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} fR$ (per § H. prop. 15.) Trilinei restituti portio b $\beta \alpha BA = aR + sR = fR$, per § B. prop. 17. Ergo Portio Cycloidis b $\beta \alpha VA = \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} fR$.

Item Segmentum Semicirculi residuum $\alpha B a = \frac{1}{4} RP - \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR$, (per § G. prop. 15.) Ergo Segmentum Semicycloidis residuum b $\beta \tau = \frac{1}{4} RP - \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR$.

Item; Si, ex illa portione Semicycloidis b $\beta \alpha VA$; auferatur tum parallelogrammum b $\beta \alpha B (= b \beta \alpha B$ fig. 170.) $= ah$, tum Triangulum $\alpha BV = \frac{1}{2} sh$; hoc est Trapezium b $\beta \alpha V = ah + \frac{1}{2} sh = 2aR - av + sR - \frac{1}{2} sv$: Relinquitur Semicycloidis segmentum AbV $= -\frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR - av + \frac{1}{2} sv = -\frac{1}{2} eR - av + \frac{1}{2} sv = \frac{1}{2} fR - ah - \frac{1}{2} sh$.

Vel etiam; propter $ABV = \frac{1}{2} eR + \frac{1}{2} sv$ (per § E. prop. 15.) & $ABb = -eR - av$, (per § B. prop. 17.) erit AbV $= -\frac{1}{2} eR + av + \frac{1}{2} sv = -\frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR - av + \frac{1}{2} sv$.

Et, speciatim, Segmentum Ad C (propter $a = \frac{1}{4} P$, $s = v = R$) $= R^2 - \frac{1}{8} RP$.

Fig. 166. Item, si ex Parallelogrammo A V b K $= fv$ (propter $AV = v$, & $bV = f$), eximatur Segmentum illud AbV $= \frac{1}{2} fR - ah - \frac{1}{2} sh$: Relinquitur Trilineum AbK (seu segmenti AbV complementum) $fv - \frac{1}{2} fR + ah + \frac{1}{2} sh$; hoc est (reductione facta) $\frac{1}{2} eR + \frac{1}{2} sv$; Nempe,

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 375

Nempe, tantundem atque Semicirculi segmentum ABV, modo dictum.

Porro, si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus constitui, ut $A\alpha X$, $X\alpha Z$, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet) ex infinitis numero Triangulis figuram inscriptam complementibus, ut $O\alpha X$, $P\alpha Z$, &c. live ex totidem Triangulis figuram circumscriptam complementibus, ut $Q\alpha A$, $I\alpha X$, &c. aut etiam figuram inscriptam & circumscriptam intermediam (utpote partim inscriptam, partim circumscriptam) complementibus, ut $Y\alpha P$, &c. (quæ rectis αZ , &c. ut illorum axibus represententur.) Intelligenda erit similiter Semicyclois ex totidem constitui Quadrilineis $A\alpha\xi x$, $x\xi\zeta z$, &c. vel etiam (quod eodem recidit, sectione in infinitum continuatâ,) ex totidem Trapezii figuram inscriptam complementibus, ut $Ox\xi\alpha$, $pz\zeta\xi$, &c. aut circumscriptam complementibus, ut $Aq\xi\alpha$, $xi\zeta\xi$, &c. aut quæ figuram partim inscriptam partim circumscriptam complement, ut $py\delta\xi$, &c. (quæ rectis $z\zeta$, &c. ut eorum axibus represententur.)

Cumque hæc Trapezia singula, ex Triangulo simul & Parallelogrammo consistunt; quorum illud est respectivo Semicirculi Triangulo æquale, hoc autem respectivo Parallelogrammo Trilinei Restituti fig. 170. suntque in eisdem sive à $\tau\alpha$ sive à TA distantis: Trapezii cuiusque momentum sive respectu rectæ $\tau\alpha$, sive respectu rectæ TA , (aliarumve hisce parallelarum,) æquabitur Momentis simul sumptis eorundem quibus æquantur Trianguli Parallelogrammique.

Cumque hoc de singulis obtineat, obtinebit & de simul omnibus complementibus vel totam $A\tau\alpha$ Semicycloidem, vel ipsius portionem aliquam, ut $Ab\beta\alpha$, $b\beta\tau$, $b\beta\delta d$, &c. Puta Momentum Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, respectu rectæ $\tau\alpha$ vel TA , æquale erit momento Sectoris $B\alpha A$, & Quadrilinei fig. 170. $b\beta\alpha BA$, (respectu rectarum $\tau\alpha$ vel TA respective,) simul sumptis.

Et similiter ostendetur, Momentum Segmenti Semicycloidis AbV , æquale momenti Segmenti Semicirculi ABV , & Segmenti Trilinei fig. 170. AbB , (respectu rectarum $\tau\alpha$, TA , vel hisce parallelarum, respective,) simul. Æqualia siquidem sunt, atque in eadem distantia.

Est autem Semicirculi $AD\alpha$, respectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{2}R^2P$, (per § I. prop. 15.) Et momentum Trilinei Restituti, ejusdem sesquialterum seu ut 3 ad 2, hoc est $\frac{3}{2}R^2P$, per § C. prop. 17. Semicycloidis igitur, respectu ejusdem $\tau\alpha$, momentum (utpote illis simul sumptis æquale) ad illud Sectoris, ut 5 ad 2, hoc est $\frac{5}{2}R^2P$. Cumque hujus magnitudo sit (per

C.
Fig. 167.
168.

Fig. 166.
167.
168.
170.

Fig. 166 (per § B.) $\frac{1}{4}RP$; distantia centri gravitatis Semicycloidis à τa ,
 170. erit $\frac{1}{6}R$. Adeoque à TA , $\frac{1}{2}R$. Ejusque respectu TA momen-
 tum (magnitudine in distantiam ductâ) $\frac{1}{8}R^2P$. (Quod reale est
 momentis Semicirculi Trilineique Restituti, prop. 15. & 17. inventis,
 simul sumptis.) Ergo & Semiquadrantis Ungula eidem insistens,
 aciem habens τa , est $\frac{1}{8}R^2P$; aciemque habens TA , $\frac{1}{8}R^2P$. So-
 lidumque ejusdem conversione circa τa factum, $\frac{1}{16}RP^2$; & Semifoli-
 dum, $\frac{1}{16}RP^2$: Atque circa TA , Solidum $\frac{1}{8}RP^2$, & Semifolidum
 $\frac{1}{16}RP^2$.

Atque si ex Parallelogrammi ATa momento respectu τa vel
 TA , hoc est ex R^2P , (propter magnitudinem $\frac{1}{2}P \times 2R = RP$, di-
 stantiamque Centri gravitatis R ;) auferatur Semicycloidis momentum
 jam inventum; habetur Complementi AT , momentum respectu
 τa , $\frac{1}{8}R^2P$; respectu TA , $\frac{1}{8}R^2P$. Adeoque (propter magnitu-
 dinem modo inventam, $\frac{1}{4}RP$,) Distantia Centri gravitatis ejusdem
 à τa , $\frac{1}{2}R$; atque à TA , $\frac{1}{2}R$. Item Semiquadrantis Ungula
 eidem insistens, aciem habens τa , $\frac{1}{8}R^2P$; aciemque habens TA ,
 $\frac{1}{8}R^2P$. Solidumque ejusdem conversione circa τa factum, $\frac{1}{16}RP^2$;
 & semifolidum, $\frac{1}{16}RP^2$: Atque circa TA , solidum $\frac{1}{8}RP^2$; semifo-
 lidum, $\frac{1}{16}RP^2$.

D. Item Sectoris BaA momentum respectu τa , est $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$
 $= \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}fR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. 15. Et Portionis Trilinei
 restituti $b\beta aBA$, momentum $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR = \frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}svR$,
 per § D. prop. 17. Ergo Portionis Semicycloidis $b\beta aVA$, mo-
 mentum respectu τa (utpote ex illis aggregatum,) $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{12}shR$
 $= \frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{12}fR^2 - \frac{1}{12}svR$. (Idemque est & Ungula Semiqua-
 drantis eidem insistens, aciem habens τa .) Adeoque (propter
 magnitudinem § B inventam, $\frac{1}{2}fR = \frac{1}{2}fR - \frac{1}{2}fR$) Distantia Centri
 gravitatis à τa , est $\frac{1}{6}R - \frac{5sh}{18f} - \frac{15aR + 25sR - 5sv}{18a + 18s}$: Atque à TA ,
 $\frac{1}{6}R - \frac{5sh}{18f} - \frac{21aR + 11sR - 5sv}{18a + 18s}$: Ejusque respectu TA momen-
 tum, (vel Semiquadrantis Ungula eidem insistens, aciem habens
 TA ,) $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{12}shR = \frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{12}fR^2 - \frac{1}{12}svR$. Solidumque ejus-
 dem conversione circa τa , $\frac{1}{4}fRP - \frac{1}{12}svRP - \frac{1}{12}svP$; & Semifoli-
 dum $\frac{1}{4}fRP + \frac{1}{12}svRP - \frac{1}{12}svP$: Atque circa TA , Solidum $\frac{1}{4}fRP$
 $+ \frac{1}{12}svRP + \frac{1}{12}svP$, & semifolidum, $\frac{1}{4}fRP - \frac{1}{12}svRP - \frac{1}{12}svP$.

E. Similiter, Segmenti Semicirculi aBa , Momentum (vel Semiqua-
 drantis Ungula) respectu τa , est $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$; & re-
 spectu

377

170.

— $\frac{1}{2}R$), Distanzia Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{6}R = \frac{5sh}{18a - 18s} =$

$\frac{103R-53v}{9P-18a-18s}$. Solidumque ejusdem circa τ^a conversione factum

Atque, circa TA, Solidum $\frac{7}{4}RP - \frac{7}{4}RP - \frac{1}{2}hP = \frac{7}{8}RP^2 - \frac{7}{4}aRP$
 $-\frac{1}{2}hP - \frac{1}{2}hP$, & semisolidum $\frac{7}{4}RP - \frac{7}{4}RP - \frac{1}{2}hP - \frac{1}{2}hP^2$

F.

$$\text{Distantia Centri gravitatis à } \tau a, \frac{-9eR^2 - 12avR - 3svR + 6as^2 + 4s^3}{-6eR - 12av + 6sv};$$
$$a \text{ TA}, \frac{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}{-6eR - 12av - 6sv}; a \text{ bBV},$$
$$\frac{2eR^2 - 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}{-6eR - 12av + 6sv} \cdot \text{Solidum ejusdem conversione}$$

circa

Fig. 166, circa $\tau\alpha$ factum, $-\frac{1}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP + \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{3R}$; & semi-

170.

solidum, $-\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{1}{8}svP - \frac{3as^2P + 2s^3P}{12R}$: Item circa TA,

Solidum, $-\frac{1}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{3R}$; & semisolidum,

$-\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{1}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{6R}$: Denique circa bV, Soli-

dum $\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{6R}$; & semisolidum, $\frac{1}{8}eRP$

$+\frac{1}{4}avP + \frac{1}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{12R}$.

Eadem habentur ope Trapezii b β aV. Quippe si ex quadrilinei b β aA fig. 166. auferatur Trapezium b β aV, restabit Semicycloidis segmentum bVA: Ejusque momentum ex momento Quadrilinei subductum, relinquit segmenti bVA momentum, sive respectu rectae TA, sive $\tau\alpha$; unde & reliqua consequuntur.

Est autem Trianguli BVa, magnitudo $\frac{1}{2}sh$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2$; respectu TA, $shR - \frac{1}{3}sh^2$; per § M. prop. 15. Et parallelogrammi b β aB, magnitudo ah ; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2$; respectu TA, $2ahR - \frac{1}{2}ah^2$; per § F. prop. 17. Ergo Trapezii b β aV, magnitudo, $ah - \frac{1}{2}sh$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2$; respectu TA, $2ahR - shR - \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2$. Quae respective subducta ex Quadrilinei b β aA, magnitudine & Momentis § D. traditis: Relinquant Segmenti bVA magnitudinem $\frac{1}{2}fR - ah - \frac{1}{2}sh = -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}vR + av + \frac{1}{2}sv = -\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\alpha$, (vel correspondens Ungula,) $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{2}shR - \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2 = -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}vR^2 + 2avR + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{2}av^2 - \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; respectu TA, $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{2}shR - 2ahR - shR + \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2 = -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$. Unde reliqua deducuntur ut prius. Trapeziique Distantia Centri gravitatis (momento per magnitudinem diviso) à $\tau\alpha$, $\frac{3a + 2s}{6a + 3s}h$; à TA, $2R - \frac{3a + 2s}{6a + 3s}h$.

C. Si verò, ex Parallelogrammi AVbK momentis, eximantur momenta segmenti AbV; relinquentur Momenta respectiva Trilinei AbK. Est

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 371

Est autem, (propter $AV = v$, $bV = f$, Distantiamque Centri Fig. 166. gravitatis ab $A\alpha$, vel bK , $\frac{1}{2}f$; ab AK , vel bV , $\frac{1}{2}v$; adeoque ab $\alpha\tau$, $\frac{1}{2}v + h = 2R - \frac{1}{2}v$;) Parallelogrammi magnitudo, fv ; momentum respectu $A\alpha$ vel bK , $\frac{1}{2}f^2v$; respectu AT vel bV , $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2$; respectu $\alpha\tau$, $2fvR - \frac{1}{2}fv^2 = \frac{1}{2}fv^2 + fvb = \frac{1}{2}fv^2 + fs^2 = fvR + \frac{1}{2}fs^2$.

Si itaque ex $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2 = avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$, auferatur segmenti AbV momentum respectu TA (modo inventum) $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$; habetur $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3$, momentum Trilinei AbK respectu TA . Ideoque, propter magnitudinem (§ B inventam) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, Distantia Centri gravitatis a TA , $\frac{\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3}{\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv} = \frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque, a $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; a bV , $\frac{1}{2}R - h (=v - \frac{1}{2}R) - \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; & (restituendo magnitudinem) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; & respectu bV , $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv - \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{6}s^3 = -\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$ (propter $\frac{1}{2}eR = \frac{1}{2}avR - \frac{1}{2}svR$, & $\frac{1}{2}sv^2 = svR - \frac{1}{2}s^3$.) Vel etiam, ex momentis Parallelogrammi $AVbK$, $fvR + \frac{1}{2}fs^2$ & $fvR - \frac{1}{2}fs^2$ (modo traditis,) hoc est, ex $avR + svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{2}s^3$, & $avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$; subductis momentis segmenti AbV , $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, modo inventis; Habetur Momentum Trilinei AbK , respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; & respectu bV , $-\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$; ut prius.

Atque hactenus Semicycloidis, partiumque illius, Momenta & Ungulas, consideravimus duntaxat prout ad rectas $\tau\alpha$, TA , aut huic parallelas respectum habent. Quæ quidem, (propter eandem a rectis illis distantiam Parallelogrammorum $b\beta\xi\pi$, sive ut inclinata jacent in Semicycloide fig. 167, 168. sive ut erecta in Trilineo restituto fig. 170. Et Triangulorum similiter, ut $\pi\xi p$ seu $B\alpha P$, fig. 167, 168. eisque æqualium $B\alpha P$, fig. 169.) alia non sunt quam aggregata partium correspondentium in Semicirculo, & Trilineo Restituto, fig. 169, 170. Et Momenta Ungulaeque quæ Semicycloidem spectant, respectivorum Momentorum Ungularumque aggregata, Semicirculum Trilineumque illud respective spectantium.

Verum si ad rectam $A\alpha$, aliâve ipsi $\tau\alpha$, TA , non parallelam exigantur, sive ut Ungularum aciem sive ut librationis axem: Quo-

Ccc

niam

niam alia est inde distantia Parallelogrammorum in Semicycloide inclinatorum, atque erectorum in Trilineo Restituto; altiore adhuc indagine opus erit, quo distantiarum variarum iusta ratio habeatur.

Intelligatur itaque, ut prius, tum Semicirculus in minuta Triangula, ut $Y \alpha P$, tum Semicyclois in totidem Trapezia correspondentia, ut $y \delta \xi p$, distribui; quæ figuram utrobique inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) compleant. Quæ suis Axibus seu Diametris $B \alpha$, $b \beta$ representari intelligantur. In quibus itaque rectis sua respective Centra gravitatis constituta fore, constat (ex prop. 5. hujus,) saltem inde distare distantia quæ datâ quavis minor sit; quæque sectione in infinitum continuatâ evanescet. Cûmque ex præmonstratis (§ A,) Trapeziarum illarum quodvis ex Triangulo constat, respectivo Semicirculi Triangulo æquali, & Parallelogrammo ejusdem Trianguli duplo, (utpote æquali respectivo Trilinei restituti Parallelogrammo:) intelligatur Trapezii Triangulum illud, ut $\nu \beta \pi$, (ipsi $Y \alpha P$ simile & æquale,) utrinque ad $b \beta$ positum, (per cujus itaque Centrum gravitatis transire intelligatur $b \beta$ recta,) adeoque Parallelogrammum (Trapezii reliquum) in duo Parallelogramma dimidia dirimere, ut $\nu \beta \delta y$, $\pi \beta \xi p$. Per cujus itaque bipartiti Parallelogrammi, seu duorum Parallelogrammorum simul sumptorum, commune Centrum gravitatis non minus transibit $b \beta$ recta, quam si, exempto Triangulo, (quod in Trilineo restituto sit,) utrinque eidem $b \beta$ rectæ adjacerent dimidia illa Parallelogramma, utrinque jam æqualiter remota. Quanquam enim in sectione definitâ, major sit $B Y$ quam $B P$, & $b \nu$ quam $b \pi$; sectione tamen in infinitum continuatâ; differentia illa in æqualitatem sensim evanescit; ut ex præmonstratis patet.

Re sic constructâ; Momentum Trapezii cujusvis, ut $y \delta \xi p$, ad momentum correspondentis Trianguli, ut $Y \alpha P$, respectu ejusdem $A \alpha$, (adeoque & Ungula super illo, ad Ungulam super hoc, quæ conversione circa $A \alpha$ factum;) est in ratione quæ componitur ex magnitudinis ad magnitudinem ratione, (hoc est, sectione in infinitum continuatâ, ut 3 ad 1, per § A;) atque ex ratione Distantiæ Centri gravitatis illius, ad Distantiam Centri gravitatis hujus, ab eadem $A \alpha$ rectâ.

Est autem Centrum gravitatis Trianguli $Y \alpha P$, in ipsâ αB ; ejusque ab α distantia est $\frac{2}{3} \alpha B$, (per § C. prop. 6. hujus;) adeoque ab $A \alpha$ distantia est $\frac{2}{3} BV = \frac{2}{3} r$, & $\alpha \tau \alpha$, $\frac{2}{3} V \alpha = \frac{2}{3} h$.

Trapezii vero $y \delta \xi p$, Centrum gravitatis in $b \beta$ positum, à β distat $\frac{2}{3} \beta b$.

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 381

$\frac{1}{2} \beta b$. Cum enim Trianguli $\nu \beta \pi$ centrum, $a \beta$ distet $\frac{1}{3} \beta b$; & pa- Fig. 166,
rallelogrammi bipartiti seu ex duobus compositi, βy , βp , centrum 168.
 $a \beta$ distet $\frac{1}{2} \beta b$; per 6 hujus; sitque utrumque in βb recta, ut modo
ostensum est: Horum ab invicem distantia erit $\frac{1}{6} \beta b = \frac{1}{3} \beta b - \frac{1}{2} \beta b$:
Hæc itaque centrorum ab invicem distantia, divisa in magnitudinum,
quæ sunt ut 1 ad 2, ratione reciproca; pro communi utriusque, hoc
est ipsius Trapezii centro gravitatis, superaddit distantia Centri Pa-
rallelogrammi a puncto β , trientem ipsius $\frac{1}{3} \beta b$, hoc est $\frac{1}{6} \beta b$; per
27. cap. præced. Nam, ut $3 = 2 + 1$, ad 1; sic $\frac{1}{3} \beta b$, ad $\frac{1}{6} \beta b$.
Adeoque propter $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, Trapezii centrum gravitatis, in
 βb positum, a β distabit, $\frac{2}{3} \beta b$.

Et propterea, ejusdem a νa distantia erit $\frac{1}{3} \nu a = \frac{1}{3} b$; & ab $A a$ di-
stantia $b B (= \beta a = B A) + \frac{1}{3} B V$, (ut ex Schematis inspectu
facile constabit;) hoc est $a + \frac{1}{3} s$.

Ratio itaque distantiarum Centrorum gravitatis Trapezii $y \delta \xi p$,
& Trianguli $Y a P$, ab eadem $A a$; nempe $b B + \frac{1}{3} B V$ ad $\frac{2}{3} B V$,
seu $a + \frac{1}{3} s$ ad $\frac{2}{3} s$; cum ratione magnitudinum 3 ad 1 (multipli-
cando) composita; exhibet rationem momentorum $3 b B + \frac{1}{3} B V$
ad $\frac{2}{3} B V$, seu $3 a + \frac{1}{3} s$ ad $\frac{2}{3} s$. Hoc est, Momentum Trapezii
 $y \delta \xi p$, in suo situ, ad momentum Trianguli $Y a P$ in suo, respectu
ejusdem $A a$ rectæ; est ut Trianguli illius in distantia $3 b B + \frac{1}{3} B V$
suspensi momentum, ad ejusdem suspensi in distantia $\frac{2}{3} B V$, (hoc est,
in suo situ,) momentum respectu ejusdem $A a$. Hoc est (propter
eamdem Trianguli magnitudinem) ut distantia $3 b B + \frac{1}{3} B V$, ad
distantiam $\frac{2}{3} B V$. Hoc est, ut $\frac{1}{3} B V$ ad $\frac{2}{3} B V$ (seu ut 5 ad 2) atque
insuper ut $3 b B$ ad $\frac{1}{3} B V$, seu $9 b B$ ad $2 B V$. Hoc est; ut 5 ad
2, atque insuper ut 9 ad 2 s.

Quod quidem cum ubique fiat: Ratio momenti Trapeziorum simul
omnium, sive quæ Totam Semicycloidem, sive quæ ipsius Portionem
ut $b \beta A$, complent; (quippe de partibus perinde procedit demon-
stratio atque de totis;) ad momentum omnium Triangulorum com-
plentium vel totum Semicirculum, vel ipsius Portionem, ut $B a A$,
respective; ea est quam habent omnium illorum triangulorum ut $Y a P$,
in distantias respective $3 b B + \frac{1}{3} B V$ suspensorum momenta, ad mo-
menta earundem in distantis respective $\frac{2}{3} B V$ suspensorum; seu, ut
omnia $Y a P$ in $\frac{1}{3} B V$, ad eadem in $\frac{2}{3} B V$ respective ducta, atque
insuper ut eadem omnia $Y a P$ in $3 b B$, ad eadem in $\frac{1}{3} B V$ res-
pective.

Cumque sit eadem ubique ratio Trianguli, ut $Y a P$, in $\frac{1}{3} B V$,
ad idem in $\frac{2}{3} B V$; adeoque & omnium ad omnia; nempe ut 5 ad 2;
Ccc 2 Sed

Fig. 166, Sed non eadem ubique ratio Trianguli, ut $Y \propto P$, in $3 b B$; ad idem
 168. in $\frac{2}{3} B V$; propter tum Triangulorum super æquales bases in æqualem
 altitudinem, tum aliam atque aliam rationem $b B$ ad $B V$, hoc est,
 arcus ad sinum: Propterea, rationi 5 ad 2 ; alia consocianda est;
 Quam nempe habeant omnia respective Triangula ut $Y \propto P$ in $3 b B$,
 ad eadem in $\frac{2}{3} B V$; seu, quam habent omnia in $9 b B$, ad eadem
 in $2 B V$, respective: Hoc est, Quam habet *Noncuplum omnium*
 $b B$, seu $\beta \alpha$, (hoc est $B A$ arcum arithmetice proportionalium,) aut
 his æqualium $\beta \epsilon$ Triangulum $\alpha \tau$ fig. 170. complementum, in re-
 spectiva Triangula $Y \propto P$, seu (propter æquales omnium bases) Tri-
 angulorum altitudines $V \propto$ respectivas, (hoc est, sinus versos arcuum
 $B \propto$, qui cum $B A$ complent Semicirculum,) seu in, ipsis æquales,
 $b \beta$, seu *minuta parallelogramma* his proportionalia figuram Sinuum
 versorum seu Trilineum Restitutum fig. 170. complementia: Ad Du-
 plum omnium $B V$ (Sinuum rectorum eorundem arcuum $B A$), aut
 his æqualium $\beta \nu$ (complementum $\tau \propto \nu$ figuram Sinuum rectorum to-
 tius Semicirculi fig. 170.) in eadem respective Triangula seu Trian-
 gulorum Altitudines, aut *minuta Parallelogramma* ipsis Proportio-
 nalia: Hoc est (in Trilineo Restituto fig. 170.) quam habet *Non-*
cuplum omnium $b \beta$ in $\beta \epsilon$, ad *Duplum* eorundem $b \beta$ in $\beta \nu$, re-
 spective.

Fig. 170. At $b \beta$, in $\beta \epsilon$ seu $\beta \alpha$ ducta, exhibet ipsius $b \beta$ momentum re-
 spectu $A \propto$; adeoque omnes $b \beta$ in respectivas $\beta \epsilon$ seu $\beta \alpha$, exhibent
 respectu ejusdem $A \propto$, momenta omnium $b \beta$, hoc est momentum
 Trilinei $\alpha \tau \propto$; Adeoque *Noncuplum* omnium $b \beta$ in $\beta \epsilon$, est *Non-*
cuplum Momenti Trilinei $\alpha \tau \propto$ respectu $A \propto$. Et similiter in portio-
 nibus: Puta, *Noncuplum* omnium $b \beta$ portionem $b \beta \propto B A$ com-
 plentium, in respectivas $\beta \epsilon$ seu $\beta \alpha$ ductarum, (hoc est omnia $9 \propto h$,
 portionem $b \beta \propto B A$ spectantia,) est *Noncuplum* momenti portionis
 $b \beta \propto B A$, respectu ejusdem $A \propto$.

Fig. 168, Atque omnes eadem $b \beta$ in $\beta \nu$ fig. 170. seu in $B V$ fig. 168, 169.
 169, Exhibent *Triplum* Momenti Semicirculi $A D \propto$, aut ipsius Sectoris
 170. $B \propto A$, (prout de Triangulis totum Semicirculum, aut ipsius tantum
 Sectorem complentibus, intelligatur,) respectu Diametri $A \propto$; per
 § A. prop. 18.

Adeoque *Duplum* omnium $b \beta$ in $\beta \nu$, est *Sextuplum* momenti Se-
 micirculi $\propto D A$ respectu ipsius $A \propto$: Atque, in partibus similiter, re-
 spective sumptis.

Adeoque *Noncuplum* omnium $b \beta$ in $\beta \epsilon$, ad *Duplum* earundem
 $b \beta$ in $\beta \nu$, est ut *Noncuplum* momenti Trilinei Restituti $\alpha \tau \propto$,
 (ejusve

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 383

(ejusve portionis $b\beta aBA$) fig. 170. respectu rectæ Aa ; ad *Sextuplum* momentum Semicirculi ADa , (ejusve Sectoris respectivi BaA) respectu Diametri Aa : Vel, ut *Triplum* momenti illius, ad *Duplum* momenti hujus.

Est autem (per § C. prop. 17.) Trilinei Restituti $A\tau a$ fig. 17c. momentum respectu Aa , $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; adeoque hujus Triplum $\frac{3}{8}RP^2 - 6R^3$: Et momentum Semicirculi, respectu Aa , per § Q. prop. 15. $\frac{2}{3}R^3$; hujusque Duplum $\frac{4}{3}R^3$. Est ergo Triplum illud ad Duplum hoc; ut $\frac{3}{8}RP^2 - 6R^3$ ad $\frac{4}{3}R^3$; hoc est, $9R^2 - 144R^3$ ad $32R^3$: Seu ut $9P^2 - 144A^2$ ad $32R^2$. Atque hæc demum ratio (ut supra ostensum est) rationi 5 ad 2, hoc est $80R^2$ ad $32R^2$ conjuncta; exhibet rationem momenti Semicycloidis $A\tau a$, ad momentum Semicirculi ADa , respectu ejusdem Aa rectæ; nempe, ut $9P^2 - 64R^2$ ad $32R^2$. Cum itaque momentum illud Semicirculi sit $\frac{2}{3}R^3$: Erit Semicycloidis momentum respectu Aa (seu correspondens Ungula Semiquadrantis,) $\frac{9P^2 - 64R^2}{48}R = \frac{1}{6}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$.

Atque hoc Momentum per Semicycloidis magnitudinem $\frac{1}{4}RP$ (§ B.) divisum; exhibet ejusdem ab Aa Centri gravitatis distantiam, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; adeoque, à τT , $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; & (restituendo magnitudinem,) ejusdem respectu τT momentum $\frac{1}{6}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$. Solidumque conversione factum (utpote ad Ungulam ut P ad R), circa Aa , $\frac{1}{6}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$; & circa τT , $\frac{1}{6}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$: Semisolidaque horum dimidia.

Eademque Momenta, ex respectivis Parallelogrammi $Aa\tau T$ momenti, hoc est, (propter $\tau a = \frac{1}{2}P$, & $Aa = 2R$, distantiamque Centri gravitatis sive à τT sive ab Aa , $\frac{1}{2}\tau a = \frac{1}{4}P$), ex $\frac{1}{4}RP^2$, subducta; relinquunt Complementi Semicycloidis $A\tau T$, momentum respectu Aa (seu correspondentem Ungulam Semiquadrantalem) $\frac{1}{6}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; & respectu τT , $\frac{1}{6}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$: (Et Solida Semisolidaque correspondentia, ad hæc Momenta Ungulæve, ut P seu $\frac{1}{2}P$, ad R .) Eademque momenta Complementi Semicycloidis per magnitudinem, $\frac{1}{4}RP$ (per § B.) divisa; exhibent ejusdem ab Aa distantiam Centri gravitatis $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; & à τT , $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$.

Similiter, in Semicycloidis portione $b\beta aVA$. Momentum hujus, I.

Fig. 168, 169, 170. jus, ad momentum Sectoris in Semicirculo, correspondentis, $B\alpha A$, respectu ipsius $A\alpha$, (ut modo ostensum est,) est ut s ad 1 ; atque insuper, ut *triplum* momenti correspondentis Portionis Trilinei restituti, $b\beta\alpha BA$, ad *Duplum* momenti Sectoris Semicirculi $B\alpha A$; respectu $A\alpha$.

Est autem Momentum Portionis Trilinei Restituti $b\beta\alpha BA$, respectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR - vR^2$, (per § H. prop. 17.) adeoque ejusdem Triplum $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR - 3vR^2$; & momentum Sectoris $B\alpha A$, respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. 15.) hujusque Duplum $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R$. Ratio itaque quam habet Triplum illud ad hoc Duplum, hoc est $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR - 3vR^2$ ad $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R$; seu $9a^2 - 18as - 18vR$, ad $4vR - 2s^2$; rationi 5 ad 2 , seu $10vR + 5s^2$ ad $4vR + 2s^2$ (addendo) consociata; exhibet Momenti Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, ad momentum correspondentis Sectoris $B\alpha A$, respectu $A\alpha$, rationem, $9a^2 - 18as - 8vR + 5s^2$ ad $4vR + 2s^2$. Cum itaque Sectoris momentum illud sit, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$ (ut modo dictum;) erit Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, momentum respectu $A\alpha$, (seu correspondens Ungula Semiquadrantis) $\frac{2}{3}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$.

Atque hoc momentum, per Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$ magnitudinem $\frac{1}{2}fR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, (per § B.) divisum; exhibet distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{9a^2 + 18as - 8vR + 5s^2}{18a + 18s} = \frac{1}{2}a$

$+ \frac{1}{2}s - \frac{4vR - 2s^2}{9a + 9s} = \frac{1}{2}f - \frac{4vR - 2s^2}{9f}$. Unde etiam ejusdem aT & bK distantia facile colligitur; & momentum respectu illarum. Item Solidum ejusdem circa $A\alpha$ conversione factum, $\frac{1}{4}a^2P + \frac{1}{2}asP - \frac{2}{3}vRP + \frac{1}{2}s^2P$; & semisolidum, hujus dimidium.

Si autem ex totius Semicycloidis respectu $A\alpha$ momento, $\frac{1}{6}RP^2 - \frac{1}{3}R^3$, subducatur hoc portionis $b\beta\alpha VA$ momentum $\frac{1}{3}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$: Relinquitur Segmenti $b\beta\tau$ momentum respectu ejusdem $A\alpha$, $\frac{1}{6}RP^2 - \frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$; seu (propter $a = \frac{1}{2}P - s$, & $b = 2R - v$), $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{2}{3}bR^2 + \frac{1}{2}s^2R$: Quod per magnitudinem $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, (§ B.) divisum: Exhibet Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantiam, $\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s - \frac{4bR - 2s^2}{9a - 9s} = \frac{1}{2}P - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}s - \frac{2b^2}{9a - 9s}$: Adeoque $aT\tau$,

$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}s + \frac{2b^2}{9a - 9s}$: Ejusque, respectu $T\tau$, momentum $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{3}h^2R$. Ex

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 385

Ex illo autem Portionis Semicycloidis $b\beta a V A$ Momento (Ungulave) respectu $A a$; si subducatur Trapezii $b\beta a V$, respectu ejusdem Fig. 168, $A a$, Momentum Ungulave: Relinquitur, respectu ejusdem $A a$, 169, Momentum Ungulave Segmenti Semicycloidis $A b V$. 170.

Componitur autem hoc Trapezium, ex Parallelogrammo $b\beta a B$, & Triangulo $a B V$. Parallelogrammi magnitudo (propter basin $b B = a$, & altitudinem $V a = h$, est $a h$; Centrique gravitatis (utpote in sui medio positi) ab $A a$ distantia, $\frac{1}{2} b h - \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} a h - \frac{1}{2} a h = \frac{1}{2} f$: Adeoque momentum $\frac{1}{2} f a h$. Trianguli magnitudo (propter $B V = s$, & $V a = h$), $\frac{1}{2} s h$; Centrique gravitatis ab $A a$ distantia $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} B V = \frac{1}{3} s$: Adeoque momentum respectu $A a$, $\frac{1}{6} s^2 h$. Momentum itaque Trapezii $b\beta a V$ respectu $A a$, est, $\frac{1}{2} f a h - \frac{1}{6} s^2 h = a^2 h - \frac{1}{6} s^2 h$.

(Magnitudo autem, $a h - \frac{1}{2} s h$: Adeoque Centri gravitatis ab $A a$ Distantia, $\frac{3 f a - s^2}{6 a - s}$.)

Illud autem Trapezii Momentum, ex Portionis $b\beta a V A$ momento (modo reperto) $\frac{3}{4} a^2 R + \frac{1}{2} a s R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{1}{2} s^2 R$ subductum; relinquit, $-\frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{2} s^2 R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v - \frac{1}{2} a s v - \frac{1}{6} s^2 v$, Momentum Segmenti Semicycloidis $b V A$ respectu $A a$; Ungulave correspondentem. (Solidumque & Semisolidum ejusdem circa $A a$ conversione factum, ad Ungulam illam, ut P , & $\frac{1}{2} P$, ad R .)

Quod quidem momentum, per magnitudinem (§ B. inventam) $-\frac{1}{2} e R (= -\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R) - \frac{1}{2} a v - \frac{1}{2} s v$, divisum; exhibet Centri grav. ab $A a$ distantiam

$$\frac{-\frac{1}{2} a^2 R - \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{2} s^2 R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v - \frac{1}{2} a s v - \frac{1}{6} s^2 v}{-\frac{1}{2} e R - \frac{1}{2} a v - \frac{1}{2} s v} = \frac{-6 a^2 R - 6 a s R + 6 s^2 R - 4 v R^2 + 3 a^2 v - 3 a s v - s^2 v}{-6 e R - 3 a v - 3 s v}$$

Unde habetur etiam ejusdem à τ T vel $b K$ distantia; ejusque respectu hujus momentum, Ungulave: Solidumque & Semisolidum ejusdem circa τ T vel $b K$ conversione factum.

Si autem ex Parallelogrammi $A V b K$ momento respectu $A a$ (§ G. tradito) $\frac{1}{2} f^2 v$; hoc est, ex $\frac{1}{2} a^2 v - \frac{1}{2} a s v - \frac{1}{2} s^2 v$; auferatur momentum segmenti $A b V$ respectu ejusdem $A a$, jam inventum, $-\frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{2} a s R + \frac{1}{2} s^2 R - \frac{2}{3} v R^2 + \frac{1}{2} a^2 v - \frac{1}{2} a s v - \frac{1}{6} s^2 v$: Relinquitur Trianguli $A b K$ respectu ejusdem $A a$, momentum $\frac{3}{4} v R^2 - \frac{1}{2} a^2 R - \frac{1}{2} a s R$

$$-\frac{1}{12}s^2R + \frac{1}{2}asv - \frac{1}{4}s^2v: \text{ Adeoque, propter magnitudi-}$$

$$\text{nem (§ B. traditam) } \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv; \text{ Distantia Centri gravitatis ab } A\alpha,$$

$$\frac{8vR^2 - 6a^2R - 6asR - s^2R - 6asv - \frac{1}{4}s^2v}{6eR - 6sv}$$

L. Hæc eadem Momenta & Solida, aliâ adhuc methodo sic investi-
Fig. 166, gantur.

168. Omnia momenta rectarum b V, æqualibus intervallis sumptarum,
(sive totam Semicycloidem, sive ipsius segmentum ut b V A com-
plementum,) respectu rectæ Aα; momentum integrum complementia:
Vel omnia Triangula rectangula Isoscelia eisdem insistentia, Semi-
quadrantalem Ungulam, aciem habentem Aα, complementia: Sunt
totidem Semiquadrata earundem b V rectarum: Hoc est, semisumma
quadratorum rectarum omnium b V = b B + B V = a + s: Hoc
est, semisumma omnium $a^2 + 2as + s^2$; seu summa Omnium, $\frac{1}{2}a^2 + as$
 $+\frac{1}{2}s^2$; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Fig. 170. Sunt autem Omn. $\frac{1}{2}a^2$, seu semisumma quadratorum omnium b B
rectarum: Idem atque momentum Trilinei restituti A r α, (quam
figuram Arcuum, non minus quam Sinuum versorum figuram esse,
ostendimus § A. prop. 17.) ejusve segmenti b B A, respectu Aα. (Est
enim magnitudo cujusque b B = a, quæ itaque in sui semissem, seu Centri
gravitatis distantiam, $\frac{1}{2}a$, ducta; exhibet ejusdem respectu Aα mo-
mentum, $\frac{1}{2}a^2$.) Nempe Trilinei A r α momentum, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$:
Et Segmenti b B A, momentum, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, per
§ G, l. prop. 17.

Fig. 168, 169. Item Omn. $\frac{1}{2}s^2$; seu semisumma Quadratorum rectarum B V
(æqualibus intervallis sumptarum) Semicirculum A D α, ejusve seg-
mentum A B V complementum; est ejusdem A D α Semicirculi, ejusve
Segmenti A B V, momentum respectu diametri suæ Aα. Nempe
Semicirculi momentum, $\frac{2}{3}R^3$; & segmenti A B V momentum (re-
spectu ejusdem Aα) $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; per § Q, R.
prop. 15.

His autem jam inventis Omn. $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}s^2$; si addantur Omn. as ,
(ut modo ostensum est) habentur Omn. $\frac{1}{2}a^2 + as + \frac{1}{2}s^2$: Mo-
mentum Semicycloidis, ejusve Segmenti b V A, respectu Aα.

Adeoque si admitamus Momentum illud Semicycloidis Segmentive
sui, per præcedentem methodum, jam inventum: Inde colligitur
summa omnium as ; hoc est, factum ex omnibus ordinatis in Semi-
circulo, ductis in respectivos arcus ipsis & vertice interceptos.

Quippe,

PROP. XX. De Calculo Centri Gravitatis. 387

Quippe, si ex Momento Semicycloidis, respectu rectæ Aa , (§ H. invento,) $\frac{1}{10}RP^2 - \frac{1}{3}R^3$; auferamus tum $\frac{1}{6}Rl^2 - 2R^3$, tum $\frac{1}{3}R^3$, (hoc est, summam *omn.* $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}l^2$;) Quod restat, $\frac{1}{10}RP^2$, est summa *omn.* as .

Similiter; Si ex Momento Segmenti Semicycloidis bVA , respectu Aa , (§ K. invento,) $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{10}l^2R - \frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v - \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}l^2v$; auferamus, tum $-\frac{1}{2}a^2R - asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, tum $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}l^2R + \frac{1}{6}l^2v$; (hoc est summam *omn.* $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}l^2$, eo spectantium;) Quod restat, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{10}l^2R - \frac{1}{2}asv$, est summa *omn.* as , eo spectantium.

Sivero Momentum illud integrum sive Semicycloidis, sive Segmenti ejus bVA , nondum ut inventum assumatur: Eadem summa *omnium* as , per se habetur, per § K, L. prop. 18. (Compleatur utique Solidum $AbBV$, ibidem descriptum, ex ductu rectarum $bB=a$, in $BV=s$, respective.) Nempe, quæ totam Semicycloidem spectant $\frac{1}{10}RP^2$; Quæque ipsius Segmentum bVA , $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{10}l^2R - \frac{1}{2}asv$.

Additis igitur, pro tota Semicycloide, tum $\frac{1}{10}RP^2 - 2R^3 = \text{Omn.}$ Fig. 166, $\frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{1}{3}R^3 = \text{Omn.}$ $\frac{1}{2}l^2$; tum $\frac{1}{10}RP^2 = \text{Omn.}$ as : Habentur, 168. quatenus totam Semicycloidem spectant, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}l^2 - \frac{1}{2}l^2$: Hoc est Momentum Semicycloidis respectu Aa , $\frac{1}{10}RP^2 - \frac{1}{3}R^3$. Ut supra § K.

Additisque, pro Semicycloidis Segmento bVA , tum $-\frac{1}{4}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v = \text{Omn.}$ $\frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}l^2R - \frac{1}{6}l^2v = \text{Omn.}$ $\frac{1}{2}l^2$; tum $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{10}l^2R - \frac{1}{2}asv = \text{Omn.}$ as : Habentur *Omn.* $\frac{1}{2}a^2 - as + \frac{1}{2}l^2$, eo spectantia; Hoc est, Momentum Segmenti Semicycloidis bVA , respectu Aa , $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{10}l^2R - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{2}a^2v - \frac{1}{2}asv - \frac{1}{6}l^2v$; ut prius § K. Unde Centra gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Item, Si Momento Segmenti bVA respectu Aa , sic invento; addatur Momentum Trapezii $b\beta aV$ (§ K. traditum,) Habebitur portiois $b\beta aV$ Momentum respectu Aa ; idem nempe quod alia methodo prius exhibitum est § I. Unde ejusdem Centrum gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Exhibuimus itaque tum ipsius Semicycloidis (adeoque & Cycloidis totius) ejusque partium expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; earumque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias: Et propterea ipsa earundem Centra gravitatis. Datis enim Centri gravitatis distantis à duabus in eodem plano rectis (non invicem parallelis;) datur ipsum gravitatis Centrum, per prop. 26. cap. præced.

D d d

Atque

M.

Atque his quidem ita traditis; non erit difficile in aliis item Cycloidis Segmentis, variis modis abscissis, tum Magnitudines, tum Momenta, adeoque & Centra gravitatis determinare: Additionibus scilicet, & Subductionibus factis prout res postulaverit.

Eademque Segmenta quæ nos ad aliquot rectas comparavimus, eorundem respectu illarum Momenta determinando, ipsaque Centra gravitatis (per distantias suas à duabus saltem non parallelis rectis) designando: Poterit quilibet ad alias quasvis datas rectas (propter tum Magnitudines tum distantias Centrorum. datas) similiter comparare: Idemque & in aliis Segmentis (horum ope) præstare.

Ex Momentis autem, Ungularum Magnitudines, & Solidorum conversione (perfectâ aut imperfectâ) descriptorum, obtineri posse; in præcedentibus sæpe dictum est. Sunt utique Ungulæ Semiquadrantales, ipsis Momentis (ut à nobis designatis) æquales, (aliæque Ungulæ, ad has, in altitudinum ratione:) Solidaque integra conversione facta, ad correspondentes Ungulas Semiquadrantales, ut P , ad R ; & semisolidæ, eorum dimidia: Et similiter de aliis imperfectis conversionibus, servatâ ratione, judicandum. Ut ad hanc aliasque propositiones sæpius insinuatum est.

N. Denique; quæ de Cycloide primariâ jam tradidimus omnia; eadem ad Secundarias facile transferuntur, quas *Protractas Contractasque* appellant.

Cycloidem vero *Primariam* illam dicunt quam hætenus descripsimus; Quam scilicet volventis circuli Punctum aliquod in peripheria describit, dum ipsa sibi Peripheria commensurat in subiecto plano æqualem rectam $\tau a \tau$; Ejusve Centrum rectam describit $c C c$, peripheriæ æqualem. Puta $\tau A \tau$, fig. 166. 175. 176.

Si verò recta $c C c$, quam Centrum describit dum circulus unam conversionem facit, seu quæ huic subest in plano $\tau a \tau$, quam Cycloidis Basem dicimus, Major fuerit quam Circuli Genitoris Peripheria, *Protractam* dicimus Cycloidem; ut $\tau I \tau$ fig. 175. si Minor *Contractam*, ut $\tau E \tau$.

Dumque Circulus $A D a$, aliquo peripheriæ suæ puncto, describit Cycloidem *primariam*, ut τA ; Fig. 166. 176. eodem tempore, Circuli Concentrici cujusque Minoris correspondens punctum describit Cycloidem *Protractam* ut τI , fig. 176. Concentrici vero *Majoris* cujusque punctum correspondens, *Contractam* describit ut τE . Quarum quidem Cycloidum *Protracta Contractaque* Genitores, sunt illi *Minor, Majorque* Circulus.

Quæ

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 389

Quæ autem de Cycloide Primaria traduntur omnia ; eadem Secun-
dariis accommodantur ; cum hoc discrimine, Quod, cum in *Primaria*
rectæ b B sint ipsi Genitoris sui arcubus B A Æquales ; in *Protractis*,
Majores sunt ; in *Contractis* Minores ; quam suorum respective Geni-
torum Correspondentes arcus B A ; & quidem in ea ratione Majores
Minoresve, qua recta $\tau\alpha$, major est vel minor quam $\frac{1}{2}P$, Genitoris
Circuli sui Semicircumferentia: Adeoque, quoties in calculum veni-
unt rectæ b B ; pro α , substituenda erit quantitas quæ ad hanc sit in ea
ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$. Et similiter, mutatis mutandis, in earun-
dem Quadratis Cubis, reliquisque potestatibus: Ut in præcedentibus
aliquot propositionibus monitum fuit.

PROP. XXI.

Ungula Semicycloidi A $\tau\alpha$ insitens aciem habens $\tau\alpha$, A.
est *Dupla-sesquialtera*, correspondentis Ungulæ Semi- Fig. 166.
circulo A D α insistentis ; seu ut 5 ad 2.

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ, est *Duplum-sesqui-
tertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo A D α
insistentis, eandem aciem habentis, respectu aciei suæ ;
seu ut 7 ad 3.

Idemque in respectivis portionibus obtinet : Puta Ungula
Quadrilineo b $\beta\alpha$ A in Semicycloide insitens, aciem
habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera* respectivæ Ungulæ
Sectori B α A insistentis ; seu ut 5 ad 2.

Ejusque *Momentum* est *Duplum sesquitertium* momenti re-
spectivæ Ungulæ insistentis Sectori B α A ; respectu aciei
suæ $\tau\alpha$; seu ut 7 ad 3.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quoad
Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Semicycloi-
di, ejusve portionibus, insistentibus ; atque in illis
quæ

D d d 2

Fig. 166. quæ Semicirculo, ejusque portionibus respectivis insunt.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,)

- B. Semiquadrantis Ungulæ, Semicycloidis $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo est $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\frac{1}{8}R^3P$; respectu TA , $\frac{1}{4}\frac{1}{8}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R$; à TA , $\frac{1}{6}R$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.
- B. Aciemque habentis TA ; Magnitudo, $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\frac{1}{8}R^3P$; respectu TA , $\frac{1}{4}\frac{1}{8}R^3P$; Distantia Centri grav. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R$; à TA , $\frac{1}{6}R$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$; $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.
- H. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{1}{3}R^3$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; respectu TA , $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA , $\frac{1}{6}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$.
- M. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{8}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}$.
- G. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{12}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\frac{1}{4}fR^3 + \frac{1}{12}shR^2 - \frac{1}{36}s^3R$; respectu TA , $\frac{1}{4}\frac{1}{4}fR^3 - \frac{1}{4}\frac{1}{4}shR^2 + \frac{1}{36}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R + \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$; à TA , $\frac{1}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}4^2R^2 + \frac{1}{12}shR^2 - \frac{1}{12}4s^3R - \frac{1}{9}vR^3$.

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 391

$+ \frac{1}{72} v^2 R^2 - \frac{1}{36} s^2 v R$; Distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$, Fig. 166.

$$a = \frac{45 a^2 R + 64 v R^2 - 41 s^2 R - 14 s^2 v}{90 a R - 150 s R - 30 s v}.$$

Acicmque habentis TA ; Mag. $\frac{1}{4} f R^2 - \frac{1}{2} s h R$; Momentum C.

resp. $\tau \alpha$, $\frac{1}{24} f R^3 - \frac{1}{4} s h R^2 + \frac{1}{36} s^3 R$; resp. TA , $\frac{1}{24} f R^3 - \frac{1}{4} s h R^2$

$- \frac{1}{36} s^3 R$; Dist. Cen. grav. à $\tau \alpha$, $\frac{1}{4} R - \frac{52 s h R + 49 s^3}{441 f R - 105 s h}$; à

TA , $\frac{1}{42} R - \frac{52 s h R + 49 s^3}{441 f R - 105 s h}$; Momentum respectu G.

$A \alpha$, $\frac{7}{8} a^2 R^2 + \frac{1}{12} a s R^2 - \frac{4}{9} v R^3 + \frac{1}{72} s^2 R^2 + \frac{1}{12} a s v R$

$+ \frac{1}{36} s^2 v R$; Distantia Centri gravitatis ab $A \alpha$, $a - \frac{32 v R^2 + 63 a^2 R - 19 s^2 R - 14 s^2 v}{126 a R - 66 s R - 30 s v}$.

Acicmque habentis $A \alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4} a^2 R + \frac{1}{2} a s R$ G.

$- \frac{1}{2} v R^2 + \frac{1}{12} s^2 R$; Momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{8} a^2 R^2$

$+ \frac{1}{12} a s R^2 - \frac{1}{12} a s v R - \frac{4}{9} v R^3 + \frac{1}{72} s^2 R^2 - \frac{1}{36} s^2 v R$; respec-

tu TA , $\frac{1}{8} a^2 R^2 + \frac{1}{12} a s R^2 - \frac{4}{9} v R^3 + \frac{1}{72} s^2 R^2$

$+ \frac{1}{12} a s v R + \frac{1}{36} s^2 v R$; Distantia Centri gravitatis

à $\tau \alpha$, $\frac{1}{6} R - \frac{12 v R^2 - 30 a s R - 8 s^2 R - 15 a s v - 7 s^2 v}{27 a^2 - 54 a s - 24 v R - 15 s^2}$; à

TA , $\frac{1}{6} R + \frac{12 v R^2 - 30 a s R - 8 s^2 R - 15 a s v - 7 s^2 v}{27 a^2 - 54 a s - 24 v R - 15 s^2}$; Mo. M.

mentum respectu $A \alpha$, $\frac{1}{24} a^2 R^3 - \frac{1}{3} a v R^2 - \frac{1}{8} s v R^2 + \frac{1}{2} a^3 R$

$+ \frac{1}{2} a^2 s R + \frac{1}{6} a s^2 R + \frac{1}{36} s^3 R$; Distantia Centri grav. ab $A \alpha$,

$\frac{87 v R^2 - 96 a v R - 9 s v R + 36 a^3 - 108 a^2 s - 60 a s^2 + 14 s^3}{54 a^2 + 108 a s - 48 v R + 30 s^2}$.

Ungula portionis Semicycloidis b $\beta \tau$, aciem habentis $\tau \alpha$; D.

Magnitudo $\frac{1}{4} \alpha R^2 - \frac{1}{4} v R^2 - \frac{1}{2} s h R$; Momentum re-

spectu $\tau \alpha$, $\frac{1}{24} \alpha R^3 - \frac{1}{24} s R^3 - \frac{1}{8} s h R^2 + \frac{1}{36} s^3 R$; respectu

TA , $\frac{1}{24} \alpha R^3 - \frac{1}{24} s R^3 + \frac{1}{24} s h R^2 - \frac{1}{36} s^3 R$; Distantia

Centri gravitatis à $\tau \alpha$, $\frac{1}{2} R - \frac{7 s h^2}{45 a R - 45 s R - 15 s h}$; à TA ,

$\frac{1}{2} R + \frac{7 s h^2}{45 a R - 45 s R - 15 s h}$; Momentum respectu $A \alpha$, I.

$$\frac{1}{3} R^2 P^2.$$

Fig. 166. $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4 - \frac{1}{3}a^2R^2 + \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{12}asR^2 - \frac{1}{72}s^2R^2$
 $+ \frac{1}{12}asvR + \frac{1}{36}s^2vR$; Distantia Centri grav. ab $A\alpha$; $a +$
 $\frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{18cRP - 360aR - 600sR - 120sv}$.

D. Aciemque habentis TA ; Magnitudo $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2$
 $+ \frac{1}{12}sR^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}\alpha R^3 - \frac{1}{24}sR^3$
 $+ \frac{1}{24}sR^2 - \frac{1}{36}s^2R$; respectu TA , $\frac{1}{24}\alpha R^3 - \frac{1}{24}sR^3$
 $+ \frac{1}{24}sR^2 + \frac{1}{36}s^2R$; Distantia Centri gravitatis à
 $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}R - \frac{52shR + 49s^3}{441aR - 441sR + 105sh}$; à TA , $\frac{1}{24}R +$
 $\frac{52shR + 49s^3}{441aR - 441sR + 105sh}$.

I. $\frac{52shR + 49s^3}{441aR - 441sR + 105sh}$: Momentum respectu $A\alpha$,
 $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4 + \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{3}a^2R^2 - \frac{1}{12}asR^2 - \frac{1}{12}s^2R^2$
 $- \frac{1}{12}asvR - \frac{1}{36}s^2vR$; Distantia Centri grav. ab $A\alpha$, $a +$
 $\frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}$.

I. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{4}vR^2$
 $- \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}asR - \frac{1}{12}s^2R$; Momentum respectu $\tau\alpha$,
 $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4 + \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{3}a^2R^2 - \frac{1}{12}asR^2 - \frac{1}{12}s^2R^2$
 $+ \frac{1}{12}asvR + \frac{1}{36}s^2vR$; respectu TA , $\frac{1}{32}R^2P^2$
 $- \frac{1}{9}R^4 + \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{3}a^2R^2 - \frac{1}{12}asR^2 - \frac{1}{12}s^2R^2 - \frac{1}{12}asvR$
 $- \frac{1}{36}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R -$
 $\frac{192R^3 - 96vR^2 - 140asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54R^2 - 304R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$; à TA ,
 $\frac{1}{16}R + \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54R^2 - 304R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$.

N. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{1}{48}R^3P - \frac{1}{24}cR^3$
 $+ \frac{1}{4}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{1}{2}a^2sR - \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{36}s^3R$;
Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
 $\frac{9P^3 - 105R^2P - 174cR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s}{-120as^2 - 28s^3}$
 $\frac{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}{-120as^2 - 28s^3}$.

F. Ungulæ Trapezii $b\beta\alpha V$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magni-
tudo, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{2}sh^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$
 $+$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 393

$-\frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $ab^2R - \frac{1}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}sh^3$; Fig. 166.

Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+2s}{6a+4s}b$; à TA,

$2R - \frac{4a+3s}{6a+4s}b$: Momentum respectu A α , $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2$ K.

$+\frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{1}{4}a +$

$\frac{4as+3s^2}{12a+8s} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a+24s}$.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $2abR - shR - \frac{1}{2}ab^2$ F.

$-\frac{1}{3}sb^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $ab^2R - \frac{1}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ab^3$

$-\frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $4abR^2 + 2shR^2 - 2a^2b^2R$

$-\frac{4}{3}s^2b^2R - \frac{1}{3}ab^3 + sh^3$; Distantia Centri gravitatis

à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b + \frac{2Rsh - fb^2}{24aR - 12sR - 6ab - 4sh}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b -$

$\frac{2shR - fb^2}{24aR - 12sR - 6ab - 4sh}$: Momentum respectu A α , $fabR$ K.

$+\frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$; Dist. Cen. grav. ab A α ,

$\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s + \frac{2s^2R - fsh}{48aR - 24sR - 12ab - 8sh}$

Aciemque habentis A α ; Magnitudo, $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b$; Mo- K.

mentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{3}asb^2 + \frac{1}{8}s^2b^2$; respectu

TA, $fabR - \frac{1}{3}s^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{3}asb^2 - \frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia

Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b + \frac{2ash + s^2b}{12fa - 4s^2}$; à TA, $2R - \frac{1}{2}b$

$-\frac{2ash + s^2b}{12fa - 4s^2}$: Momentum respectu A α , $\frac{1}{3}asb + \frac{1}{2}a^2sb$ O.

$+\frac{1}{3}as^2b + \frac{1}{12}s^3b$; Distantia Centri gravitatis ab A α ,

$\frac{4a^3 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$.

Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis E.

TA; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$

Momentum respectu TA, $-\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2$

$-\frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{24}eR^3$

$+$

Fig. 166. $+ \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$;
 respectu b V, $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R$;
 $-\frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à TA,
 $\frac{1}{6}R + \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 - 12avR - 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R -$
 $\frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 - 12avR - 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à bV, $v - \frac{1}{6}R (= \frac{1}{6}R - b)$.
 K. $\frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 - 12avR - 9svR - 6as^2 - 4s^3}$: Momen-
 tum respectu A α , $-\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{72}s^2R^2 - \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR$
 $+ \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{12}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; Distantia Centri
 gravitatis ab A α , $\frac{1}{2}a +$
 $\frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 22vR^3 + 27asvR - 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-18eR^2 - 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$.
 E. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR$
 $+ \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu TA, $-\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2$
 $+ \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$,
 $-\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$;
 respectu b V, $\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R$
 $+ \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à TA,
 $-\frac{21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R}{-54eR^2 + 72avR - 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;
 $-\frac{87eR^3 + 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R}{-24as^2v - 18s^3v}$;
 à $\tau\alpha$, $-\frac{54eR^2 + 72avR - 18svR - 36as^2 + 24s^3}{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R}$;
 à bV, $-\frac{54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$;
 K. Momentum respectu A α , $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{72}s^2R^2$
 $-\frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$;
 Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{1}{2}a +$
 $\frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 - 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}$.
 Aciemque

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 395

Acicmque habentis b V ; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR$ K. Fig. 166.

— $\frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; Momentum respectu TA, $\frac{1}{24}eR^3$;
 $+\frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$;
 respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R$
 $+\frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; respectu b V, $-\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{6}avR^2$
 $+\frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia

Centri grav. à TA, $\frac{1}{6}R - \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$;

à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R - \frac{2as^2v - s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$; à b V,

$\frac{1}{6}R - b (=v - \frac{1}{6}R) + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$;

Momentum respectu A α , $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{12}s^2R^2$ K, L.

— $\frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{3}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3$
 $-\frac{1}{24}s^4$; Distantia Centri gravitatis ab A α , $\frac{1}{2}a +$
 $\frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR - 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 - 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$;

Acicmque habentis A α ; Magnitudo, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR$ K, L.

— $+\frac{1}{12}s^2R - \frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; Momentum re-
 spectu $\tau\alpha$, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{12}s^2R^2 - \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR$
 $+\frac{1}{4}asvR + \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; respectu TA,
 $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{12}s^2R^2 - \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR$
 $+\frac{1}{12}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; respectu b V, $\frac{1}{8}a^2R^2$
 $-\frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{12}s^2R^2 - \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{12}s^2vR$
 $-\frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$,
 $\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv - 12s^2v}$;

$\frac{1}{2}R - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv - 12s^2v}$;

à TA, $\frac{1}{2}R + \frac{-18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv - 12s^2v}$;

Ecc

à b V,

$$\begin{aligned} & 4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR \\ & - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4 \\ & \text{à } bV, \frac{1}{2}R - b - \frac{-18a^2R - 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v}{+36asv + 12s^2v}; \end{aligned}$$

O, P. Momentum respectu A α , $\frac{5}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2$
 $-\frac{1}{6}asR - \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R - \frac{1}{3}a^3v - \frac{1}{2}a^2sv - \frac{1}{3}as^2v$
 $+ \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis ab A α ,
 $87eR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R - 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R$
 $+ 24a^3v - 36a^2sv + 24as^2v - 5s^3v$
 $- 48vR^2 - 18a^2R - 36asR - 6s^2R - 36a^2v - 36asv + 12s^2v.$

Adeoque exhibuimus, in expositis Ungulis, tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa Gravitatis Centra. Quæque de Ungulis tradita sunt; ad Solida conversione facta facile transferentur. Quæque de expositis dicta sunt; facile est ad alia, calculo rite adhibito, accommodare: Puta, Ungulas Trilinei A b K; aliasve ejusmodi.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam spectantibus tradita sunt; eadem omnia ad Ungulas Solidaque, Semicycloides Secundarias (sive Protractas sive Contractas) spectantia facile transferentur.

A. **D**istributis, (ut ad propositionem præcedentem) Tum Semicir-
 Fig. 166, culo A D α , in minuta Triangula, numero infinita: Tum Semicycloide A τ α , in totidem Trapezia correspondentia: Intelligatur
 168, ntrique insistere Semiquadrantalibus Ungula, aciem habens τ α .
 170.

Quæ autem vel toti Semicirculo, vel ipsius Sectori, ut B α A, insistit Ungula; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis, seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P,) incumbentibus: Quarum communis vertex sit α punctum; Basisque super Triangulorum illorum Basibus (ut Y P, &c.) erectæ, altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Semicycloidi sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α V A (quæ Sectori B α A respondet,) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Trapeziiis β b, seu y δ ξ p, &c. incumbant; acies habentibus

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 397

bentibus in τa rectâ continuè jacentes, altitudines verò super ipsis *Fig. 166,*
 $y b p$ Trapeziorum basibus (pro Semicircularis Ungulæ ratione) 170.
 ipsis $V a$ (respective) earundem à τa distantis, æquales.

Quæ quidem Minutis illis Trapeziis insistentes Ungulæ (propter Trapezia illa æqualia, respectivis tum Semicirculi Triangulis, tum Trilinei Restituti *fig. 170.* Parallelogrammis simul sumptis,) æquales erunt respectivis Pyramidulis Cuneisque simul sumptis, quæ respectivis Semicirculi Triangulis Trilineique restituti Parallelogrammis, incumbunt, adeoque ad pyramidulas illas, ut 5 ad 2, (ut ad prop. præced. ostensum est.) Suntque in eisdem respective sive à τa , sive $T A$, (aut hisce parallelis,) distantis (ut patet.) Adeoque & Momenta Momentis æqualia habebunt, sive respectu rectæ τa , sive $T A$, sive cujusvis hisce parallelæ rectæ.

Cumque hoc in singulis respective obtineat, (adeoque in simul omnibus :) Illius, quæ ex Ungulis hisce, minutis Trapeziis incumbentibus, componitur, (sive toti $A \tau a$ Semicycloidi, sive ipsius portioni, ut $b \beta a A$, vel $b \beta d d$, vel $b \beta \tau$, &c. *fig. 166.* insistentis,) Ungulæ Momentum, æquale est Momentis, simul sumptis, tum illius quæ ex Pyramidulis componitur Ungulæ, (sive toti Semicirculo $A D a$, sive ipsius portioni respectivæ, ut $B a A$, $B a D$, $B a B$, &c. insistentis,) tum illius quæ ex Cuneis componitur, (sive toti Trilineo restituto, sive ipsius portioni respectivæ, ut $b \beta a A$, $b \beta d d$, $b \beta \tau$, &c. *fig. 170.* insistentis,) simul sumptis.

Est autem illius quæ ex Cuneis, ad illius quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ momentum, respectu rectæ τa , ut 4, ad 3, (per § A. prop. 19.) Est itaque illius quæ ex Ungulis Trapeziorum componitur (sive Toti Semicycloidi $A \tau a$, sive ipsius Portioni, ut $b \beta a A$, $b \beta d d$, $b \beta \tau$, &c. insistentis) momentum (utpote utrisque illis æquale) ad momentum illius quæ ex pyramidulis componitur (sive Toti Semicirculo $A D a$, sive ipsius respectivæ portioni $B a A$, $B a D$, $B a B$, &c. insistentis;) ut 7 ad 3.

Et quidem, ea quæ Trilineo restituto $A \tau a$, *fig. 170.* insistit Ungula sive aciem habeat τa , sive $T A$, sive aliam quamvis rectam hisce parallelam; alia non est quam quæ Trilineo distorto $A \tau a D$ (cycloidis curvæ, & Semicirculi convexæ interjecto) insistit, in situm debitum restituta: Et Ungularum Momenta, respectu rectarum τa , $T A$, aut hisce parallelarum, (propter tum Magnitudines tum Distantias æquales,) sunt æqualia. Quod & in partibus respective comparatis, perinde obtinet: Puta, quæ curvæ rectæque $A b$, $A B$, *fig. 170.* & quæ curvis $A b$, $A B$, *fig. 166.* interjacet; item quæ

E e e 2

rectis

Fig. 166,
170.

rectis $B\alpha$, $b\beta$, fig. 170. quæque duabus sive rectis sive curvis $B\alpha$, $b\beta$, fig. 166. interjacet; (& similiter alibi;) propter tum Magnitudines tum Distantias utrobique æquales. (Si vero vel Ungularum acies, vel rectæ ad quas momenta æstimantur, sint $A\alpha$; aliæque quæ ipsis $\tau\alpha$, TA , parallela non sit; secus erit: Propter vel Magnitudines, vel Distantias, vel utraque variatas. Ut post dicendum erit.)

B. Est autem, toti Semicirculo insistentis, Semiquadrantis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu ejusdem $\tau\alpha$ rectæ, $\frac{1}{6}R^3P$; & respectu rectæ TA , $\frac{1}{6}R^3P$; per § T. prop. 16. Totique Trilineo insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{1}{12}R^3P$; respectu TA , $\frac{1}{12}R^3P$; per § B. prop. 19.

Ergo Semicycloidi insistentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^3P$; & respectu TA , $\frac{1}{8}R^3P$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{2}{3}R^2P$, per § C. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R$; à TA , $\frac{2}{3}R$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, Magnitudo (quippe ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R , seu P ad $2R$), $\frac{1}{6}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ (quippe ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P), $\frac{1}{3}R^2$; Semisolidique momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ ut 2 ad 1 ; (propter magnitudinem ut P ad $2R$; & distantiam ut $4R$ ad P ; per prop. 12. & 14. estque $\frac{P}{2R} \times \frac{4R}{P} = \frac{2}{1}$;) hoc est, $\frac{1}{24}R^3P$.

Similiter; Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis TA , Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R^3P$; & respectu TA , $\frac{1}{6}R^3P$; (per § T. prop. 16.) Trilineoque Restituto insistentis, aciem habentis TA , momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3P$; (idem utrique atque aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu TA , propter magnitudines & distantias reciprocatas,) & respectu TA , $\frac{1}{12}R^3P$; per § B. prop. 19.

Ergo, Semicycloidi insistentis, aciem habentis TA , momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^3P$; & respectu TA , $\frac{1}{8}R^3P$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{2}{3}R^2P$, per § C. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R$; & à TA , $\frac{2}{3}R$. Semisolidique circa TA , magnitudo, $\frac{1}{6}R^2P$; Distantia Centri gravitatis ab axe conversionis TA , $\frac{11}{21}R^2$; Momentum respectu ejusdem TA , $\frac{1}{24}R^3P$.

Item

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 399

Item Ungulæ Sectoris $B\alpha A$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum C. respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA , $\frac{1}{6}fR^3$ Fig. 166, $-\frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulæque portionis Trilinei restituti $b\beta\alpha BA$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA , $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{8}shR^2$; per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{24}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu TA , $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR - 15sh}$; & à TA , $\frac{1}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR - 15sh}$. Semicolidique circa $\tau\alpha$, magnitudo $\frac{1}{2}fRP + \frac{1}{24}shP$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}fR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia $\frac{14R^2}{3P} + \frac{56shR^2 - 28s^3R}{45fRP + 15shP}$.

Similiter, Ungulæ Sectoris $B\alpha A$, aciem habentis TA ; Momentum respectu TA , est $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulæque in Trilineo correspondentis $b\beta\alpha BA$, $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, aciem habentis TA , momentum respectu ipsius TA , $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{24}aR^3 - \frac{1}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA ; propter magnitudines & distantias reciprocatas,) $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA , $\frac{1}{6}R - \frac{52shR + 49s^3}{441fR - 105sh}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R - \frac{52shR + 49s^3}{441fR - 105sh}$. Semicolidique circa TA , magnitudo $\frac{1}{2}fRP - \frac{1}{24}shP$; momentum respectu TA , $\frac{1}{12}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Centrique gravitatis inde distantia $\frac{118R^2}{21P} - \frac{208shR^2 + 196s^3}{441fRP - 105shP}$.

Item, Ungulæ Segmenti $\alpha B\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est $\frac{1}{6}aR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, & respectu TA , $\frac{1}{6}aR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque respectivæ in Trilineo Restituto $b\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}aR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; & respectu TA , $\frac{1}{6}aR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § D. prop. 19.

Fig. 166, 170.

D.

Fig. 166, Ergo, Ungulae portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$,
17c. momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R = \frac{1}{3}sh^3R$

respectu TA , $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$; respectu TA , $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$.
Adeoquē (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$, per § E.
prop. præced.) Dist. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{105aR^2 - 105shR^2 - 63shR + 14s^3}{90aR - 90sR - 30sh}$

$$= \frac{1}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45aR - 45sR - 15sh} = \frac{1}{6}R - \frac{14shR - 7shv}{45aR - 45sR - 15sh}$$

$$= \frac{1}{6}R - \frac{7sh^2}{45aR - 45sR - 15sh}; \text{ à } TA, \frac{75aR^2 - 75sR^2 + 3shR - 14s^3}{90aR - 90sR - 30sh}$$

$= \frac{1}{6}R - \frac{45aR - 45sR - 15sh}{7sh^2}$. Semisolidique correspondentis
circa $\tau\alpha$, magnitudo, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{2}sRP - \frac{1}{2}shP$; ejusque respectu
 $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$; indeque Distantia
Centri gravitatis, $\frac{14R^2}{3P} - \frac{28sh^2R}{45aRP - 45sRP - 15shP}$.

Similiter; Ungulae segmenti $\alpha B\alpha$, aciem habentis TA ; mo-
mentum respectu TA est $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$; per § Y.
prop. 16. Ungulaeque correspondentis in Trilineo Restituito $b\beta\tau$,
 $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$; per § D. prop. 19.

Ergo, Ungulae $b\beta\tau$ in Semicycloide, aciem habentis TA , mo-
mentum respectu TA , $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$; & re-
spectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu
 TA), $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$. Adeoque (propter mag-
nitudinem $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}shR$, per § E. prop. præced.) Di-
stantia Centri gravitatis à TA , $\frac{177aR^2 - 177sR^2 - 57shR + 14s^3}{126aR - 126sR - 30sh}$

$$= \frac{1}{2}R + \frac{52shR - 49s^3}{441aR - 441sR + 105sh}; \text{ à } \tau\alpha, \frac{75aR^2 - 75sR^2 + 3shR - 14s^3}{126aR - 126sR - 30sh}$$

$$= \frac{1}{2}R - \frac{52shR + 49s^3}{441aR - 441sR + 105sh}$$

Semisolidique correspon-
dentis circa TA , magnitudo $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{2}sRP - \frac{1}{2}shP$; Momentum re-
spectu TA , $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 + \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$; Centrique gravitatis
à TA distantia, $\frac{118R^2}{21P} - \frac{208shR^2 + 196s^3R}{441aRP - 441sRP - 105shP}$.

Item, Ungulae Segmenti Semicirculi, BVA , aciem habentis
 TA ; momentum respectu TA , est, $\frac{1}{2}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{3}sh^3R$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 401

$-\frac{1}{4}sv$; & respectu τa , $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & re-Fig. 166, respectu b BV, $-\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; per § T. 17c. prop. 16.

Et Ungulæ Trilinei b B A aciem item habentis T A, momentum respectu T A, est $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; & respectu τa , $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; & respectu b B V, $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; per § E prop. 19.

Ergo Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis T A, momentum respectu T A, est $-\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; & respectu τa , $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; & respectu b B V, $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR - \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{4}s^3$; per § F, G. ptop. præced.) Distantia Centri gravitatis à T A,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{18}eR^2 + \frac{1}{72}avR - \frac{1}{54}svR - \frac{1}{36}s^2 - \frac{1}{24}s^3; \\ & = \frac{1}{6}R + \frac{6fvR^2 - 3f^2R (= 3fv^2R) - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}; \text{ à } \tau a, \\ & -\frac{1}{18}eR^2 + \frac{1}{72}avR - \frac{1}{54}svR - \frac{1}{36}s^2 - \frac{1}{24}s^3; \\ & = \frac{1}{6}R - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}; \text{ à b B V,} \\ & \frac{1}{18}eR^2 - \frac{1}{72}avR - \frac{1}{54}svR - \frac{1}{36}s^2 - \frac{1}{24}s^3; \\ & = v - \frac{1}{6}R - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3} - \frac{1}{6}R - h - \\ & \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}. \end{aligned}$$

Semisolidique correspondentis circa T A, magnitudo ad illud Ungulæ aciem habentis T A, ut $\frac{1}{2}P$ ad R. Momentum Semisolidi ad Momentum Ungulæ, ut 1 ad 1; Centrique gravitatis distantia in semisolido, ad illam Ungulæ, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi B V A, aciem habentis τa , momentum respectu τa , est $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $-\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{8}s^3R - \frac{1}{8}s^3v$; per § T. prop. 16.

Ungulæque Trilinei b B A, aciem habentis τa , momentum respectu

Fig. 166. spectu τa , $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ab^3 = -\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2$
 170. $-\frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu b BV, $\frac{1}{6}fR^3 - \frac{1}{4}abR^2$
 $-\frac{1}{4}bR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{4}sb^2R - \frac{1}{6}ab^3 = \frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R$
 $+\frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Adeoque Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis τa , momentum respectu τa , $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b BV, $\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{2}s^3v$; & respectu TA, (idem quod aciem habentis TA, momentum respectu τa ,) $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{2}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{4}s^3$; per § F. G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à τa $-87eR^3 - 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R$
 $-24as^2v - 18s^3v$

$$\frac{-54eR^2 + 72avR - 18svR - 36as^2 + 24s^3}{21eR^3 + 42avR^2 - 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R - 12as^2v + 6s^3v}$$

à b BV, $\frac{-54eR^2 + 72avR - 18svR + 36as^2 + 24s^3}{-21eR^3 - 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v - 18s^3v}$

à TA, $\frac{-54eR^2 - 72avR + 18svR - 36as^2 - 24s^3}{-54eR^2 - 72avR + 18svR - 36as^2 - 24s^3}$

Semisolidique correspondentis circa τa , Magnitudo ad illud Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R ; Momentum respectu axis sui τa , ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1; Distantia Centri gravitatis à τa , ad illam Ungulæ, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi BV A, aciem habentis b BV, momentum respectu b BV, est, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; per § V. prop. 16. Et Ungulæ Trilinei bBA, aciem habentis b BV, respectu b BV, est $-\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo, Ungulæ Segmenti Semicycloidis bVA, aciem habentis b BV, momentum respectu b BV, est $-\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{6}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; Ejusque momentum respectu TA (idem atque aciem habentis TA, respectu b BV,) $\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{6}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; & respectu τa (idem atque aciem habentis τa , momentum respectu b BV,) $\frac{1}{24}eR^3 + \frac{1}{6}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$. Ergo (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; per § F. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à b BV, $-15eR^3$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 403

$$\frac{-15eR^3 - 60avR^2 + 45svR^2 - 12as^2R - 38s^3R - 24as^2v - 6s^3v}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3} \text{ Fig. 166, } 170.$$

$$= \frac{2}{3}R - h(-v - \frac{1}{3}R) + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}; \text{ à TA,}$$

$$\frac{15eR^3 + 30avR^2 + 45svR^2 - 24as^2R - 16s^3R - 12as^2v - 6s^3v}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$$

$$= \frac{2}{3}R - \frac{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}{2as^2v + s^3v - es^2R}; \text{ à TA,}$$

$$\frac{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R + 12as^2v + 6s^3v}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$$

$$= \frac{2}{3}R + \frac{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}{2as^2v + s^3v - es^2R} \text{ Semisolidique corre-}$$

spondentis circa bV; magnitudo, ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}$ Pad R,

nempe $\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{4}avP + \frac{1}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{12R}$; Momentum, ad il-

lud Ungulæ, ut 2 ad 1, adeoque $-\frac{1}{12}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R$

$-\frac{1}{12}s^3R - \frac{2}{3}as^2v - \frac{1}{6}s^3v$: Distantia Centri gravitatis à bV (utpote

ad illam Ungulæ ut 2 R ad $\frac{1}{2}$ P,)

$$-30eR^4 + 120avR^3 + 90svR^3 - 24as^2R^2 - 76s^3R^2 - 48as^2vR$$

$$- 12s^3vR$$

$$9eR^2P + 18avRP + 27svRP - 18as^2P - 6s^3P.$$

Eademque habentur opè Trapezii bβaV, & Ungularum huic insistentium. Quippe subductis Ungulis Trapezii bβaV, ex respectivis Ungulis portionis bβaA; restant Ungulæ Segmenti bVA. Et de momentis similiter.

Est autem Ungulæ Trianguli BαV aciem habentis τα, momentum respectu τα, $\frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $\frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3$; per § W. prop. 16. Ungulæque correspondentis Parallelogrammi bβaB, momentum respectu τα, $\frac{1}{3}ah^3$; respectu TA, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii bβaV, aciem habentis τα, momentum respectu τα, $\frac{1}{3}ah^3 - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{2}sR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu TA $ah^2R + \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ah^3 - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}sh^2$, per § G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{4a + 3s}{6a + 4s}h$; atque à TA, $\frac{2}{3}R -$

$$\frac{4a + 3s}{6a + 4s}h.$$

fff

Eademque

F.

404 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 166, Eademque momenta, ex respectivis correspondentis Ungulæ por-
tionis $b\beta a V A$ momentis, $\frac{1}{24}aR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{6}sv^3R$, &
170. $\frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}svR^3 - \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{6}sv^3R$, (§ C. traditis,) subducta; re-
linquunt Ungulæ Segmenti bVA aciem habentis τa , momentum
respectu τa , $-\frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}svR^3$ ($= -\frac{1}{24}eR^3$) $+\frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{6}sv^3R$
 $+\frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{6}sv^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}sv^3$; & respectu TA , $-\frac{1}{24}aR^3$
 $+\frac{1}{24}svR^3$ ($= -\frac{1}{24}eR^3$) $+\frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{6}sv^3R - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}sv^3R$
 $+\frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}sv^3$; ut supra § E. Unde reliqua deducuntur ut
prius.

Similiter; Ungulæ Trianguli BaV , aciem habentis TA , Mo-
mentum respectu τa , (idem atque aciem habentis τa , respectu TA),
 $\frac{1}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}sv^3R - \frac{1}{4}sv^3$; respectu TA , $\frac{1}{3}shR^2$
 $-\frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}shR^2 + \frac{1}{6}sv^3R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}sv^3R$
 $+\frac{1}{4}sv^3$; per § W. prop. 16. Ungulæque correspondentis Paralle-
logrammi $b\beta aB$, aciem habentis TA , momentum respectu τa
(idem atque aciem habentis τa , respectu TA), $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$
 $= \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v$; respectu TA , $\frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$
 $= \frac{1}{3}ahR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2h = \frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$; per
§ E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii $b\beta aV$, aciem habentis TA , momentum
respectu τa (idem atque aciem habentis τa , respectu TA), ah^2R
 $+\frac{1}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}svR^3 - \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R$
 $+\frac{1}{3}sv^3R - \frac{1}{4}as^2v - \frac{1}{4}sv^3$; & respectu TA , $\frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}shR^2 - \frac{1}{3}sh^2R - \frac{1}{3}av^3$
 $+\frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}ahR^2 + \frac{1}{3}shR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{6}sv^3R - \frac{1}{3}as^2h - \frac{1}{4}sh^3 = 4ahR^2$
 $+\frac{1}{3}shR^2 - 2ah^2R - \frac{1}{3}sh^2R + \frac{1}{3}ah^3 + \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}svR^3 - \frac{1}{3}avR^2$
 $-\frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}sv^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}as^3v$. Adeoque (propter
magnitudinem $2ahR - shR - \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2 = 2aR^2 + \frac{1}{3}svR^2 - avR$
 $-\frac{1}{3}svR - \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}sv^3$; per § G. prop. preced.) Dist. Cen. grav. à τa ,
 $\frac{12aR + 8svR - 4ah - 3sh}{24aR + 12svR - 6ah - 4sh}h = \frac{1}{2}h + \frac{2svR - fh}{24aR + 12svR - 6ah - 4sh}h$; à
 TA , $2R - \frac{1}{2}h - \frac{2svR - fh}{24aR + 12svR - 6ah - 4sh}h$.

Eademque Momenta, ex respectivis Momentis correspondentis
Ungulæ portionis $b\beta aV A$, $\frac{1}{24}aR^3 - \frac{1}{24}svR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{6}sv^3R$, &
 $\frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}svR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{1}{6}sv^3R$, (§ C. traditis,) subducta; Relin-
quunt Ungulæ Segmenti bVA , aciem habentis TA , momentum
respectu τa , $-\frac{1}{24}aR^3 + \frac{1}{24}svR^3$ ($= -\frac{1}{24}eR^3$) $+\frac{1}{6}svR^2 + \frac{1}{6}sv^3R$
 $-\frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}sv^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}sv^3$; & respectu TA , $-\frac{1}{24}aR^3$
 $+\frac{1}{24}svR^3$ ($= -\frac{1}{24}eR^3$) $+\frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{6}sv^3R - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}sv^3R$
 $+\frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}sv^3$; Ut supra § E. Unde reliqua deducuntur ut prius.

Accedimus

Accedimus ad considerationem Momenti Ungularum Semicycloidis, G. ejusque partium, aciem habentium τa vel huic parallelam, respectu Fig. 166, rectæ $A a$, aut parallelæ huic: Adeoque & (propter distantias & 168, altitudines reciprocatas,) aciem habentium $A a$ aut huic parallelam, 170. momenti respectu τa , aut parallelæ huic: Eorumque quæ hinc dependent.

Distributis itaque (ut ad § H. prop. præced. & alibi,) tum Semicirculo in sua minuta Triangula $a B$, seu $Y a P$; tum Semicycloide in respectiva Trapezia βb , seu $y \delta \xi p$, fig. 168. quæ respective æqualia sint ipsis $Y a P$ Triangulis, & parallelogrammis $y \delta \xi p$ fig. 170. simul sumptis: Erigi intelligantur, ut prius, Ungulæ Semicirculares aciem habentes τa ; quas compleant iisdem Triangulis, Trapeziiisque minutis, insistentes minutæ Ungulæ. Quæ itaque Trapeziorum Ungulæ, æquales erunt respectivis Triangulorum & Parallelogrammorum Ungulis simul sumptis: Ut ad § C jam ostensum est.

Ungulæ Trianguli $Y a P$ (Pyramis cum sit) adeoque & huic æquales similiterque positæ Trianguli (in Trapezio intermedi) $u \beta \pi$, Centrum gravitatis (illic in $a B$, hic in βb , positis,) à τa distabit Dodrante altitudinis, (per prop. 6. hujus,) hoc est, $\frac{1}{4} V a = \frac{1}{4} h$. Adeoque ipsius $Y a P$ pyramidis (sed non & ipsius $u \beta \pi$) distantia ab $A a$, $\frac{1}{4} B V = \frac{1}{4} s$.

Ungulæque parallelogrammi $y \delta \xi p$ fig. 170. (utpote Prismatis, duabus basibus Triangularibus interjecti,) centrum gravitatis à τa distat, altitudinis Bessè, (quantum scilicet inde distat Trianguli centrum,) per prop. 5, 6. hujus, hoc est, $\frac{2}{3} V a = \frac{2}{3} h$. Atque tantundem inde distat bipartitæ Ungulæ, parallelogrammi $u \delta$, $\pi \xi$, (utrinque à $b \beta$ æqualiter remotis,) fig. 168. Centrum gravitatis, in ipsa $b \beta$ positum. Ejusque Centri, à Centro Ungulæ $u \beta \pi$ modo indicati in eadem $b \beta$, distantia, (altitudinem quod spectat, seu distantiam à τa ,) est $\frac{1}{4} h - \frac{2}{3} h = -\frac{5}{12} h$. Adeoque, propter Prismatis magnitudinem ad magnitudinem Pyramidis, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Prisma dimidium correspondentis Parallelepipedum, & Pyramis ejusdem Triens,) altitudini centri Prismatis additis duabus quintis differentiæ altitudinum, hoc est $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} h = \frac{1}{3} h$, habetur Ungulæ Trapezii $y \delta \xi p$ (ex utrisque constantis) altitudo Centri gravitatis, seu distantia à τa , $\frac{1}{4} h - \frac{5}{12} h + \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} h$. Adeoque ejusdem ab $A a$ distantia, $b B - \frac{1}{6} B V = s - \frac{1}{6} s$.

Cum itaque Ungula Trapezii cujusque $y \delta \xi p$, ad respectivam Trianguli $Y a P$ Ungulam sit, magnitudine, ut 5 ad 2, (ut ad § A. ostensum

F f f 2

Fig. 166,
168,
170.

ostensum est :) Sitque illius Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, ad hujus distantiam, ut $a - \frac{1}{2}s$ ad $\frac{1}{2}s$; erit Ungula Trapezii cujusque $y\delta\xi p$ momentum ad momentum correspondentis Ungulae Trianguli $Y\alpha P$, respectu ejusdem $A\alpha$, ut $5a - \frac{1}{2}s$ ad $\frac{1}{2}s$.

Cumque hoc ubique obtineat; (sitque eadem ubique magnitudinis Ungulae Trapezii ad magnitudinem Ungulae Trianguli ratio, ut 5 ad 2 :) Erit momentum Ungulae Totius Semicycloidis, ejusve portionis $Ab\beta\alpha$, aut $b\beta\delta d$, aut $b\beta r$, &c. (nam in partibus perinde procedit demonstratio atque in toris,) ad correspondens Momentum Ungulae Semicirculi, ejusve sectoris $B\alpha A$, aut $B\alpha D$, aut $\alpha D\alpha$ segmenti, &c. (quarum acies sint $r\alpha$), respectu rectae $A\alpha$: Ut omnes illae Trianguli Ungulae, Pyramidisve, eo spectantes, in distantias respective $5a - \frac{1}{2}s$; ad easdem in $\frac{1}{2}s$, ductas; seu ut omnia quadrata $V\alpha$ (quibus, propter YP ubique aequales, proportionales sunt illae pyramides) in $5a - \frac{1}{2}s$, ad eadem quadrata $V\alpha$ in $\frac{1}{2}s$: Hoc est, ut *Omnia* $5ah^2 - \frac{1}{2}sh^2$ eo spectantia, ad *omnia* $\frac{1}{2}sh^2$ respectiva; seu, ut *omnia* $10ah^2 + 7sh^2$, ad *omnia* $3sh^2$, eo spectantia: Hoc est, ut 7 ad 3, atque insuper ut *omnia* $10ah^2$, ad *omnia* $3sh^2$, eo spectantia; sumptis a acubus arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro $Ab\beta\alpha$ portione) *omnia* ah^2 (sumptis a arithmetice proportionalibus;) hoc est, Omnes a arcus arithmetice proportionales, in quadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum; idem atque *Duplum* Momenti correspondentis Ungulae $Ab\beta\alpha$ fig. 170. aciem habentis $r\alpha$, respectu rectae $A\alpha$; (propter Triangula singulis $b\beta$ rectis ibidem insistentia, $\frac{1}{2}h^2$; eorumque ab $A\alpha$ distantiam, a ; adeoque momenta, $\frac{1}{2}ah^2$;) Hoc est, Duplum ipsius $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; per § F. prop. 19. Adeoque earundem Decuplum, seu *Omn.* $10ah^2$; est hujus Momenti Vigecuplum; hoc est, $\frac{1}{2}a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2$.

Suntque *Omnia* sh^2 , eo spectantia; hoc est, earundem arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, in Sinuum versorum, arcuum ad semicirculum residuorum, quadrata: Idem atque Duplum Momenti Solidi, quadrilineo $Ab\beta\alpha$ fig. 170. incumbentis, ex ductu rectarum $b\beta$, in βv facti, respectu rectae $r\alpha$: Hoc est, Duplum ipsius, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{2}{3}s^2vR$ per § E. prop. 18. Adeoque eorundem Triplum, seu *Omn.* $3sh^2$; est hujus momenti sextuplum, hoc est, $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Ergo *Omn.* $10ah^2$: ad *Omn.* $3sh^2$: (portionem $Ab\beta\alpha$ spectantia;) sunt, ut $\frac{1}{2}a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - 20vR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2$, ad $4vR^3$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 407

$4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Cui si adjungatur, prius memorata, ratio Fig. 166, 7 ad 3 seu $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{2}{3}s^2vR$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: 168, Habetur ratio momenti ungułæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, ad 170. momentum Ungulæ Sectoris $B\alpha A$, (quarum acies $\tau\alpha$) respectu ipsius $A\alpha$; $\frac{1}{2}s^2R^2 + 2s^2sR^2 - 5s^2vR - \frac{2}{3}vR^3 + \frac{4}{3}s^2R^2 - \frac{2}{3}s^2vR$, ad $4vR^2 + 4s^2R^2 - s^2vR$.

Cum itaque momentum illud Ungulæ Sectoris $B\alpha A$ sit (consequentis subduodecuplum) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{3}s^2v$, (per § L. prop. 16.) erit, Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu $A\alpha$, (subduodecuplum antecedentis,) $\frac{1}{2}s^2R^2 + \frac{2}{3}s^2sR^2 - \frac{1}{3}s^2vR - \frac{2}{3}vR^3 + \frac{4}{3}s^2R^2 - \frac{2}{3}s^2vR$. Idemque est, Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$.

Quod quidem Momentum, divisum per Ungulæ illius $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}s^2hR = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR$, (per § D. prop. præced.) exhibet Distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{64vR^2 - 75sR - 41s^2R - 15s^2v + 14s^2v}{90aR - 150sR - 30sv}$
 $= a - \frac{45a^2R + 64vR^2 - 41s^2R - 14s^2v}{90aR - 150sR - 30sv}$.

Idemque Momentum, divisum per Ungulæ ejusdem $Ab\beta\alpha$ portionis Semicycloidis, aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}sR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{3}s^2R$, per § L. prop. præced. exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}R - \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R - 15asv + 7s^2v}{27a^2 - 54as - 24vR + 15s^2}$; à TA , $\frac{1}{6}R + \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R - 15asv + 7s^2v}{27a^2 - 54as - 24vR + 15s^2}$. Adeoque ejusdem respectu TA , momentum, $\frac{2}{3}a^2R^2 + \frac{1}{3}s^2sR^2 - \frac{2}{3}vR^3 + \frac{4}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2asvR - \frac{1}{3}s^2vR$.

Quod ipsum, est etiam Momentum Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis TA , respectu $A\alpha$. Adeoque, si per hujus Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}s^2hR = \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$ (per § D. prop. præced.) dividatur: Habetur ejusdem Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{33asR - 19s^2R - 32vR^2 + 15asv + 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv}$
 $= a - \frac{63a^2R - 10s^2R + 32vR^2 - 14s^2v}{126aR - 66sR - 30sv}$.

Si igitur totius Semicycloidis $A\tau\alpha$, Ungulas spectemus: Quoniam hoc casu

H.

Fig. 166, casu est $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$; erit Ungulæ $A\tau a$, aciem habentis
168, τa , momentum respectu $A a$, $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{1}{6}R^2P$;

170. Centrique gravitatis ab $A a$ distantia, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.

Aciemque habentis $A a$, momentum respectu τa , $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{1}{12}R^2P^2 - \frac{1}{3}R^3$; Centrique gravitatis distantia
à τa , $\frac{1}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA , $\frac{1}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; Momen-
tum respectu TA , $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$.

Aciemque habentis TA , momentum respectu $A a$, $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{1}{3}R^2P$; Distantia Centri gravitatis, ab $A a$,
 $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.

I. Si autem ex Ungularum Totius Semicycloidis $A\tau a$ Magnitudi-
nibus & Momentis; auferantur respectivè Magnitudines & Momen-
ta Ungularum $Ab\beta a$: Habentur Ungularum $b\beta\tau$, Magnitudines &
Momenta.

Putat, si ex Ungulæ $A\tau a$, aciem habentis τa , Magnitudine
 $\frac{1}{6}R^2P$; & Momento respectu $A a$, $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; modo exhibitis:
Auferantur respectivè Ungulæ $Ab\beta a$, magnitudo, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{12}hR$
 $= \frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{12}vR^2 - \frac{1}{12}vR$; & momentum respectu $A a$, $\frac{1}{8}a^2R^2$
 $+ \frac{1}{12}avR^2 - \frac{1}{12}avR - \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{72}v^2R^2 - \frac{1}{36}v^2vR$; supra tradita
§ G. Habetur Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem ha-
bentis τa , Magnitudo, $\frac{1}{6}R^2P - \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{12}vR^2 + \frac{1}{12}vR$, seu (prop-
ter $a = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}vR^2 - \frac{1}{12}hR$; ejusque,
respectu $A a$, momentum, $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{9}vR^4 + \frac{1}{9}vR^3$
 $- \frac{1}{12}avR^2 - \frac{1}{12}avR - \frac{1}{36}v^2R^2 + \frac{1}{36}v^2vR$: Adeoque Centri gravitatis
ab $A a$ distantia, $a +$
 $45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164v^2R$
 $+ 56v^2v$

$$180KP - 360aR - 600vR + 120sv.$$

Si ex Ungulæ $A\tau a$, aciem habentis TA , magnitudine, $\frac{1}{3}R^2P$;
& momento respectu $A a$, $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$, modo traditis: Aufe-
rantur respectivè Ungulæ $Ab\beta a$, magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{12}hR = \frac{1}{4}aR^2$
 $+ \frac{1}{12}vR^2 + \frac{1}{12}vR$; & momentum respectu $A a$, $\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{12}avR^2$
 $- \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{72}v^2R^2 + \frac{1}{12}avR + \frac{1}{36}v^2vR$; supra tradita § G. Habe-
tur Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis TA , magnitudo, $\frac{1}{3}R^2P - \frac{1}{4}aR^2$
 $- \frac{1}{12}vR^2 - \frac{1}{12}vR = \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{12}hR$; ejusque momentum re-
spectu $A a$, $\frac{1}{3}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4 - \frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{12}avR^2 - \frac{1}{36}v^2R^2$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 409

— $\frac{1}{2}asvR$ — $\frac{1}{3}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab Aa distantia, a — Fig. 166,
 $63RP^2$ — $252aRP$ — $256R^3$ — $128vR^2$ + $252a^2R$ — $76s^2R$ ^{168,}
 $-56s^2v$ ^{170.}

$$252RP - 504aR - 264sR - 120sv.$$

Si ex Ungulæ $A\tau a$, aciem habentis Aa , magnitudine, $\frac{1}{16}RP^2$
 $-\frac{4}{3}R^3$; Momento respectu τa , $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4$; & respectu TA ,
 $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; modo traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ
 $Ab\beta a$, Magnitudo $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$; momentum re-
 spectu τa , $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{3}s^2vR$;
 & respectu TA , $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 + \frac{1}{2}asvR$
 $-\frac{1}{3}s^2vR$: Habetur Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis Aa , magnitudo,
 $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 - \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$; Momentum re-
 spectu τa , $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{1}{9}R^4 - \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2$
 $-\frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}s^2vR$; respectu TA , $\frac{1}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{1}{8}a^2R^2$
 $-\frac{1}{2}asR^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}s^2vR$: Adeoque Di-
 stantia Centri gravitatis à τa , $\frac{1}{6}R$ —

$$\frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR - 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2} \quad 5$$

$$\frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv}{-56s^2v}$$

$$\text{à } TA, \frac{1}{6}R - \frac{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}{-120s^2}.$$

Atque hinc facile derivabitur, Ungulæ $b\beta\tau$ aciem habentis $T\tau$,
 Momentum respectu τa , vel TA , Centrique gravitatis inde di-
 stantia.

Sed & hæc omnia quæ Ungulæ $b\beta\tau$ in Semicycloide (fig. 165.)
 spectant, possunt etiam per se exquiri, sine ope Ungularum $Ab\beta a$.
 Nam & hic etiam perinde valet, quod § G. demonstratur: Nempe
 Momentum Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis τa , respectu Aa ; ad
 momentum respectivæ Ungulæ segmenti aBa , aciem habentis τa ,
 respectu Aa ; esse ut 7 ad 3, atque insuper ut *Omne* $10ab^2$, ad
Omne $3sb^2$, seu, ut 7 ad 3, atque insuper ut *Vigecuplum* Momenti
 Ungulæ $b\beta\tau$ in figura Sinuum verforum fig. 170. aciem habentis
 τa , respectu Aa ; ad *Sextuplum* Momenti Ungulæ Segmenti cir-
 cularis aBa fig. 169. aciem habentis τa , respectu Aa . Idemque
 erit, Ungulæ $b\beta\tau$ fig. 166, 168. aciem habentis Aa , momentum
 respectu τa . Unde & cætera eo spectantia derivari poterunt; eadem
 quæ prius.

Deinde;

K. Deinde; Si ex Momentis Ungularum $A b \beta a$, auferantur respecti-
Fig. 166, va Momenta Ungularum Trapezii $b \beta a V$; restabunt respectiva Un-
170. gularum $A b V$ Momenta.

Constat autem Ungula Trapezii $b \beta a V$, fig. 166. aciem habentis τa ; ex duabus Ungulis; Nempè Trianguli $B a V$, & Parallelogrammi $b \beta a B$.

Est autem Ungulae Trianguli $B a V$, aciem habentis τa ; Momentum respectu $A a$, $\frac{1}{8} s^2 h^2$, per § M. prop. 16.

Ungulaeque Parallelogrammi $b \beta a B$, magnitudo (quippe eadem quæ respectiva Ungulae $b \beta a B$ fig. 170.) $\frac{1}{4} a h^2$, per § F. prop. 17. Centricque gravitatis a τa distantia, $\frac{2}{3} h$, (per § C. prop. 5.) adeoque ab $A a$, $\frac{1}{2} a - \frac{2}{3} s$, (ut ex schematis aspectu facile colligitur:) Et propterea, ejusdem respectu $A a$, momentum, $\frac{1}{4} a^2 h^2 + \frac{1}{3} a s h^2$.

Ergo; Ungulae Totius Trapezii $b \beta a V$, aciem habentis τa , momentum respectu $A a$, est $\frac{1}{4} a^2 h^2 + \frac{1}{3} a s h^2 + \frac{1}{8} s^2 h^2$, seu (propter $h = 2R - v$, adeoque $h^2 = 4R^2 - 4vR - v^2 = 4R^2 - 2vR - s^2$) $\frac{1}{4} a^2 R^2 - \frac{1}{2} a^2 vR - \frac{1}{4} a^2 s^2 + \frac{2}{3} a s R^2 - \frac{2}{3} a s vR - \frac{1}{3} a s^2 - \frac{1}{8} s^2 R^2 - \frac{1}{4} s^2 vR - \frac{1}{8} s^4$. Idemque est Ungulae $b \beta a V$, aciem habentis $A a$, momentum respectu τa ; propter Distantias & Altitudines reciprocatas.

Quod itaque momentum, per Ungulae aciem habentis τa magnitudinem $\frac{1}{2} a h^2 + \frac{1}{3} s h^2$ (ut § E. ostensum est) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab $A a$ distantiam, $\frac{1}{2} a + \frac{4as - 3s^2}{12a + 8s} = \frac{1}{2} a - \frac{4a + 3s}{12a + 8s} s = \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} s - \frac{s^2}{36a + 24s}$.

Idemque momentum, per Ungulae aciem habentis $A a$, magnitudinem $\frac{1}{2} f a h - \frac{1}{6} s^2 h = \frac{1}{2} a^2 h + \frac{1}{2} a s h + \frac{1}{6} s^2 h$ (per § K. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Ungulae Distantiam Centri gravitatis a τa , $\frac{6a^2 + 8as - 3s^2}{12a^2 + 12as + 4s^2} h = \frac{1}{2} h + \frac{2as + s^2}{12fa - 4s^2} h$: Adeoque à TA , $2R$

$-\frac{1}{2} h (=R - \frac{1}{2} v) - \frac{2a - s}{12fa - 4s^2} s h$. Et propterea ejusdem respectu

TA , momentum, $f a h R + \frac{1}{3} s^2 h R - \frac{1}{4} a^2 h^2 - \frac{1}{3} a s h^2 - \frac{1}{8} s^2 h^2$. Quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est momentum Ungulae $b \beta a V$, aciem habentis TA , respectu $A a$: Adeoque per Ungulae $b \beta a V$ aciem habentis TA , magnitudinem $2 a h R - \frac{1}{2} s h R - \frac{1}{2} a h^2 - \frac{1}{3} s h^2$ (per § G. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab $A a$, $\frac{1}{2} a + \frac{1}{4} s - \frac{2s^2}{25^2} R$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 411

$2s^2R - fsh = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s - \frac{fsv - 2asR}{24aR + 8sR + 12av + 8sv}$
 $48aR - 24sR - 12ah - 8sh = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s - \frac{fsv - 2asR}{24aR + 8sR + 12av + 8sv}$

Si itaque ex Ungulæ portionis Semicycloidis $Ab\beta\alpha$, aciem habentis $A\alpha$, momento

respectu $\tau\alpha$, Momento respectu $A\alpha$; seu, aciem habentis $A\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{7}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{36}s^2vR$ (per § G.) auferatur respectivum Ungulæ $b\beta\alpha V$ momentum modò traditum, $a^2R^2 + \frac{2}{3}asR^2 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{2}{3}asvR - \frac{1}{2}s^2vR - \frac{1}{4}a^2v^2 - \frac{1}{3}asv^2 - \frac{1}{8}s^2v^2$: Habetur Ungulæ AbV , aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{7}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{7}s^2vR + \frac{1}{4}a^2v^2 + \frac{1}{3}asv^2 + \frac{1}{8}s^2v^2$.

Quod per Ungulæ AbV , aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem; $-\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + avR - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$, (per § F, G. prop. præced.) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$,

$$\frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s - \frac{54aR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}{-54aR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}}$$

Idemque momentum per Ungulæ AbV , aciem habentis $A\alpha$, magnitudinem, $-\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{2}{3}vR^3 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R -$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R^2 + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$$

Fig. 166. $+\frac{1}{7}\frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{3}\frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}s^4$. Quæ duo, sunt etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) momenta, respectu $A\alpha$, Ungularum AbV , acies habentium TA , & bV : Adeoque per harum respectivè magnitudines, $-\frac{1}{4}eR^2 (= -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2) + avR - \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2 (= \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2) - \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, (per § E, G. prop. præced.) divisa; exhibent earum distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$: Nempe, Ungulæ AbV , aciem habentis TA , distantiam ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e$
$$\frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR - 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-1eR^2 - 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3};$$
 aciemque habentis bV , ab eadem $A\alpha$ distantiam $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}e$
$$\frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 - 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 - 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}.$$

L. Eadem Momenta, Ungulas AbV spectantia (& quæ hinc dependent,) sic adhuc alias investigantur, absque ope Ungularum $Ab\beta\alpha$.

Ungulam AbV , aciem habentem bV , (si planis ipsi AbV plano parallelis, æqualibus ab invicem distantis remotis, sectam intelligamus,) constituent, omnia AbV plana, eo spectantia; sumptis AV , hoc est v , arithmetice proportionalibus, usque ad AV , seu V , maximum. Adeoque eorum momenta respectu $A\alpha$, hoc est (per § K, L. prop. præced.) $Omn. -\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{4}\frac{1}{2}s^2R - \frac{1}{4}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: (sumptis v arithmetice proportionalibus,) complent ejusdem AbV Ungulæ, aciem habentis bV , momentum respectu $A\alpha$; seu (propter altitudines & distantias reciprocatas) aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu bV .

Sunt autem, $Omnia \frac{1}{2}a^2$ eo spectantia, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) hoc est, momentum ipsius AbB fig. 170 plani, respectu $A\alpha$; (per § I. prop. 17.) $-\frac{1}{2}a^2R - asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Adeoque, $Omn. -\frac{1}{4}a^2R = -\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}a^2vR$.

Item, $Omnia as$, eo spectantia; hoc est Solidum AbB fig. 170. ex ductu rectarum bB , in BV (fig. 169.) respectivè; (per § L. prop. 18.) $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$. Adeoque $Omn. \frac{1}{4}asR = \frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$.

Item $Omnia \frac{1}{2}s^2$, eo spectantia; hoc est, Momentum Segmenti Semicirculi ABV fig. 169. respectu $A\alpha$; (per § R. prop. 15.) $\frac{1}{3}vR^2$

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 413

$\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}R^2 - \frac{1}{6}v^2$. Adeoque $Omn. \frac{1}{2}R^2 : = \frac{1}{6}vR^2 - \frac{1}{6}R^2$ Fig. 166.

Item, $Omn. v$ (arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}v^2$, (per prop. 1. hujus.) Adeoque $Omn. \frac{1}{3}vR^2 : = \frac{1}{3}v^2R^2 = \frac{1}{3}vR^2$

Item, $Omn. \frac{1}{2}a^2v$; hoc est, Momentum Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A a, respectu T A, (per § I. prop. 19.) $-\frac{1}{6}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^2 - \frac{1}{8}R^2 - \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2v^2$.

Item, $Omn. \frac{1}{2}asv$; hoc est, Semimomentum, respectu T A, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in b V fig. 169. (per § M. prop. 18.) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{8}as^2vR - \frac{1}{6}as^3$.

Item, $Omn. \frac{1}{2}v^2$; hoc est, Momentum Ungulæ A b V fig. 169. aciem habentis A a, respectu T A: (per § E. prop. 16.) $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}R^2 - \frac{1}{6}v^2R - \frac{1}{8}R^2$. Adeoque $Omn. \frac{1}{6}v^2 : = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{8}R^2$

Ergo, $Omn. -\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}R^2 - \frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv - \frac{1}{6}as^2v$: Hoc est, Ungulæ A b V, aciem habentis b V, momentum respectu A a; aciemve habentis A a, momentum respectu b V; $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{72}R^2 - \frac{1}{2}vR^2 + \frac{1}{4}a^2vR - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{36}as^2vR - \frac{1}{4}a^2v^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}R^4$. Idem quod prius.

Atque hoc momentum divisum per Ungulæ aciem habentis b V magnitudinem: Exhibet distantiam centri gravitatis ab A a.

Idemque per Ungulæ aciem habentis A a divisum; exhibet hujus distantiam Centri gravitatis a b V; & consequenter, a T A, & τa ; ejusque propterea momentum respectu T A, & τa : Quæ eadem etiam sunt Momenta, respectu A a, aciem habentium T A, & τa : Quæ per magnitudines divisa, exhibebunt & harum distantias centri gravitatis ab A a. Eadem quæ prius.

Atque, his demum Momentis, si addantur respectiva Ungularum b β a B momenta: Habentur Ungularum A b β a momenta respectiva; eadem quæ superius aliâ methodo inventa sunt. Atque hinc, distantia centrorum gravitatis; ut prius.

Supereft tandem, ut Ungularum aciem habentium A a, momenta respectu ejusdem A a, investigemus; & quæ hinc dependent. M.

Distributis igitur, ut prius, tum Semicirculo in minuta Triangula Y a P, tum Semicycloide in Minuta Trapezia y δ ξ p: Semicircularalem Ungulam, Semicycloidi insistentem, aciem habentem A a, complebunt Solida his Minutis Trapezis insistentia; sicut & Ungulam

Ggg 2

Fig. 166,
168.

Ungulam Semicirculo insistentem, eandem aciem habentem, complent Solida Triangulis illis insistentia.

Triangulo $Y\alpha P$ insistens solidum, Pyramis est, cujus centrum gravitatis in αB positum, abscindit inde, versus α , $\frac{3}{4}\alpha B$, (per prop. 6. hujus;) adeoque ipsius ab $A\alpha$ distantia erit $\frac{1}{4}BV - \frac{1}{4}\alpha$.

Trapezio $y\delta\xi p$ insistens solidum; Componitur ex Truncato Cuneo, seu Prismate duobus similibus Trapezis $y\delta\xi p$ interjecto, altitudinem habente ipsi $\alpha\beta = \alpha$ æqualem: Arque, ex Cuneo ei superimposito altitudinem habente, in β , nullam; sed, in b , ipsi $BV = s$ æqualem; tantum scilicet quanto altius est solidum illud in b , quam in β ; hoc est, quanto longior est bV , quam $\beta\alpha$.

(Nec quemquam interim morari debeat, quod (propter aciem $A\alpha$;) altitudo in Y , y , δ , major sit; atque in P , p , ξ , minor; quam in B , b , β , respective. Quamquam enim illud omnino verum sit; atque, in sectione determinatâ, alicujus sit Momenti: Continuatâ tamen in infinitum sectione, (quod supponimus,) differentia evanescit in datâ quâvis minorem: Quæ non modo in methodo indivisibilium, sed in omni per figurarum inscriptionem & circumscriptionem demonstrandi methodo, negligenda erit. Neque enim aliud producit, quam quod centrum gravitatis quod in $B\alpha$, $b\beta$, rectis supponimus; promovendum erit ultra illas, intervallo quod dato quovis minus sit. Quod autem ab alio, differentia quæ datâ quâvis minor sit, differre demonstratur; pro æquali habendam erit. Dûmque easdem supponimus, tum in Y , y , δ , tum in P , p , ξ , altitudines quæ in B , b , β : Solidum ex minutis adscriptum (partim inscriptum, partim circumscriptum,) pro vero Solido substituimus, quod ab illo differat, non nisi differentia quæ datâ minor sit.)

Cuneus autem Truncatus ille, quem diximus; seu Prisma parallelis Trapezis interjectum: Constat ex Cuneo intermedio, seu Prismate Triangulo $\nu\beta\pi$ insistente; & bipartito Parallelepipedo, parallelogrammis $\nu\beta\delta y$ & $\pi\beta\xi p$ insistente.

Qui quidem Cuneus intermedius, propter formam, est, ad Pyramidem æque altam ejusdem baseos, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Cuneus illæ parallelepipedii illius Semis, cujus Pyramis Triens est:) Cumque porro altitudo Cunei, in β vel b , sit ad altitudinem baseos Pyramidis in B ; ut $\beta\alpha$ seu bB , ad BV ; hoc est, ut α ad s : Erit Cunei Triangulo $\nu\beta\pi$ insistentis, ad Pyramidem simili & æquali Triangulo $Y\alpha P$ incumbentem, ratio, (ex illis composita) ut 3 ad 2 s. Cûmque Cunei centrum gravitatis sit in βb , abscindens, versus β , $\frac{2}{3}\beta b$, (per prop. 5, 6.) adeoque ipsius ab $A\alpha$ distantia

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 415

distantia sit, $bB - \frac{2}{3} BV$, seu $a - \frac{2}{3}s$, (ut ex schematis inspectu Fig. 166, facile colligitur;) Centrique gravitatis Pyramidis $Y\alpha P$ (ut dictum 168. est) inde distantia sit $\frac{1}{4}s$: Adeoque distantiarum ratio, ut $a + \frac{2}{3}s$, ad $\frac{1}{4}s$: Ratio hac, cum ratione magnitudinum ($3a$ ad $2s$) composita; exhibet rationem Momenti Cunei illius, ad Momentum Pyramidis (respectu ejusdem $A\alpha$), ut $3a^2 - 2as$, ad $\frac{1}{4}s^2$, seu $6a^2 - 4as$ ad $3s^2$.

Et Parallelepipedum (bipartitum) cum sit, propter formam, ad Pyramidem æquealtam, ejusdem basis, ut 3 ad 1 : Sitque bases in β vel b altitudo, ad altitudinem in B , ut a ad s : Erit Parallelepipedum ad Pyramidem ratio $3a$ ad s . Cumque Parallelepipedum (ut bipartitum) commune centrum gravitatis sit in medio βb : Adeoque ejusdem ab $A\alpha$ distantia, $a + \frac{1}{2}s$: (Sitque centri gravitatis Pyramidis, ut dictum est, distantia $\frac{1}{4}s$;) Distantiarum ratio, $a - \frac{1}{2}s$ ad $\frac{1}{4}s$; cum ratione magnitudinum, $3a$ ad s , composita; exhibet rationem Momentorum, $3a^2 - \frac{3}{2}as$ ad $\frac{1}{4}s^2$, seu $12a^2 - 6as$ ad $3s^2$.

Cuneusque, Truncato illi Cuneo superimpositus; Componitur ex Pyramide intermediâ, triangulo $\nu\beta\pi$ supereminente, (pyramidi in $Y\alpha P$ simili & æquali;) & Cuneo bipartito, parallelogrammis $\nu\beta\delta y$, $\pi\theta\xi p$, supereminente.

Pyramidisque Trianguli $\nu\beta\pi$ centrum gravitatis, cum intelligatur in $b\beta$ situm, (saltem in plano super hanc erecto,) abscindens; versus β , $\frac{1}{4}\beta b$, adeoque ipsius ab $A\alpha$ distantia (ut ex schematis inspectu facile colligitur,) $a + \frac{1}{4}s$: Erit (propter magnitudines æquales) momenti ejus ratio, ad momentum Pyramidis $Y\alpha P$, (respectu ejusdem $A\alpha$), eadem quæ distantiarum; hoc est, ut $a + \frac{1}{4}s$ ad $\frac{1}{4}s$; seu ut $4a + 3s$, ad $3s$; hoc est, ut $4as + 3s^2$, ad $3s^2$.

Cuneique bipartiti, cum (propter æquales bases & altitudines,) sit ad Pyramidem, ut 3 ad 2 ; Centrique distantia illius, ad centri hujus distantiam, ut $a - \frac{2}{3}s$ ad $\frac{1}{4}s$: Erit momentum bipartiti Cunei, ad momentum Pyramidis $Y\alpha P$, (respectu ejusdem $A\alpha$), ut $3a - 2s$ ad $\frac{1}{4}s$; seu $6as + 4s^2$ ad $3s^2$.

Ergo, Solidi totius, minuto Trapezio $y\delta\xi p$ incumbens, (quod ex partibus jam expositis componitur,) ad momentum Pyramidis correspondentis, incumbens Triangulo $Y\alpha P$, (respectu ejusdem $A\alpha$), est ut $6a^2 + 4as$ plus $12a^2 + 6as$ plus $4as + 3s^2$ plus $6as + 4s^2$, ad $3s^2$: Hoc est, ut $18a^2 + 20as + 7s^2$, ad $3s^2$. Vel (ductis omnibus in communem altitudinem $V\alpha = h$;) ut $18a^2h + 20ash + 7s^2h$, ad $3s^2h$. Et sic ubique. Adeoque momentum

Fig. 166, mentum Solidi ex illis conflati (sive quod totum $A\tau a$, sive quod
168. ipsius partem ut $A b \beta a$, spectat;) ad momentum correspondens
solidi ex his conflati, (quod vel totum $AD =$, vel ipsius partem
 $B a A$, spectat;) ut *Omnia*, $18a^2b - 20ab - 7s^2b$: ad *Omnia*,
 $3s^2b$: eo spectantia.

Eademque ratio, sic alias colligitur: ad methodum nostram *Arith-*
metica nstantorum.

Sunt rectae complementes $Y a P$ Triangulum (utpote arithmetice
proportionales,) $b, 2b, 3b$, &c. usque ad maximam $YP = B$.
Quarum puncta media, seu gravitatis Centra, in $a B$ posita, ha-
bebunt (in Ungulâ Semiquadrantali aciem habente $A a$) altitudines
distantis suis ab $A a$ aequales, puta $s, 2s, 3s$, &c. usque ad maxi-
mam $BV = S$. Quae distantiae, in rectas illas respective ductae,
exhibent seriem magnitudinum rectis illis insistentium (ungulam com-
plementum,) $bs, 4bs, 9bs$, &c. usque ad maximam BS . Quae qui-
dem series Magnitudinum, Pyramidem $Y a P$ complementum, (ut-
pote Series Secundanorum;) erit ad Seriem totidem maximae aequa-
lium, (hoc est, ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut
 1 ad $2-1$; (per prop. 1. hujus;) Hoc est ut 1 ad 3 . Puta,
 $\frac{1}{3} h BS$.

$b. 2b. 3b. \&c.$ usque ad B .

$s. 2s. 3s. \&c.$ usque ad S .

$bs. 4bs. 9bs. \&c.$ usque ad BS . $= \frac{1}{3} h BS$.

Eademque Series magnitudinum (quarum omnium Centra gra-
vitatibus sunt in $a B$, planove super hanc erecto; saltem inde distant
intervallo quod dato quovis minus sit;) in suas iterum distantias,
 $s, 2s, 3s$, &c. ductae; exhibent momentorum earundem, respectu
ipsius $A a$, seriem $bs^2, 8bs^2, 27bs^2$, &c. usque ad BS^2 maximum.
Quae quidem series, (utpote Tertianorum,) est ad seriem totidem
maximo aequalium; puta hBS^2 : (Hoc est, ad Parallelepipedum Mo-
mentum in B suspensi;) ut 1 ad $3+1$; hoc est, ut 1 ad 4 : (per
prop. 1. hujus.) Adeoque $\frac{1}{4} h BS^2$.

$bs. 4bs. 9bs. \&c.$ usque ad BS .

$s. 2s. 3s. \&c.$ usque ad S .

$bs^2. 8bs^2. 27bs^2. \&c.$ usque ad BS^2 . $= \frac{1}{4} h BS^2$.

Tra-

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 417

Trapezium verò complentes rectæ, (quarum minima $\delta \xi = YP$ Fig. 166, $= B$,) erunt $B+1b$, $B+2b$, $B+3b$, &c. usque ad $F+1B$, seu 168. $2B$. Quarum itaque summa, æquabit $hB+\frac{1}{2}hB=\frac{3}{2}hB$, per prop. 1.

$$\begin{array}{rcl} B. & B. & B. & \&c. & = hB \\ \text{plus } b. & 2b. & 3b. & \&c. \text{ usque ad } B. & = \frac{1}{2}hB \end{array} \Bigg\} = \frac{3}{2}hB.$$

Eademque series in distantias suas ab $A\alpha$ ductæ; hoc est (propter gravitatis centra singulorum in βb ,) in $A+1s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$: Exhibent Seriem Magnitudinum eisdem insistentium (solidum complementum) $BA+bA+1sE+1sb$, $BA+2bA+2sB+2sb$, $BA+3bA+3sB+3sb$, &c. Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $hBA+\frac{1}{2}hBA+\frac{1}{2}hSB+\frac{1}{3}hSB$, seu $\frac{3}{2}hBA+\frac{1}{6}hSB$.

$$\begin{array}{l} B+1b, \text{ in } A+1s, = BA+bA+1sB+1sb. \\ B+2b, \text{ in } A+2s, = BA+2bA+2sB+2sb. \\ B+3b, \text{ in } A+3s, = BA+3bA+3sB+3sb. \\ \&c. \text{ usque ad,} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} B+1B, \text{ in } A+S, = BA+bA+S^2B+SB. \\ \hline hBA+\frac{1}{2}hBA+\frac{1}{2}hSB+\frac{1}{3}hSB. \\ \text{seu } \frac{3}{2}hBA+\frac{1}{6}hSB. \end{array}$$

Eademque Magnitudinum series, in distantias iterum ducta; hoc est, in $A+1s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. exhibet seriem Momentorum, (respectu ejusdem $A\alpha$.) Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $hBA^2+\frac{1}{2}hBA^2+\frac{1}{2}hSBA+\frac{1}{3}hSBA+\frac{1}{3}hS^2B+\frac{1}{4}hS^2B$, seu $\frac{3}{2}hBA^2+\frac{1}{3}hSBA+\frac{1}{12}hS^2B$.

$$\begin{array}{l} BA^2+1bA^2+2sBA+2sbA+1s^2B+1s^2b. \\ BA^2+2bA^2+4sBA+8sbA+4s^2B+8s^2b. \\ BA^2+3bA^2+6sBA+18sbA+9s^2B+27s^2b. \\ \&c. \text{ usque ad,} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} BA^2+1BA^2+SBA+SBA+S^2B+S^2B. \\ \hline hBA^2+\frac{1}{2}hBA^2+\frac{1}{2}hSBA+\frac{1}{3}hSBA+\frac{1}{3}hS^2B+\frac{1}{4}hS^2B. \\ \text{seu } \frac{3}{2}hBA^2+\frac{1}{3}hSBA+\frac{1}{12}hS^2B. \end{array}$$

Adeoque Solidi Trapezio $y\delta\xi p$ incumbentis magnitudo, ad mag-

Fig. 156,
168.

magnitudinem Pyramidis Triangulo $Y\alpha P$ incumbens, est ut, $\frac{1}{2}hBA - \frac{1}{6}hSB$, ad $\frac{1}{3}hBS$. Atque momentum illius, ad momentum huius, (respectu ejusdem $A\alpha$), ut $\frac{1}{2}hBA^2 - \frac{1}{3}hSBA - \frac{1}{6}hS^2B$, ad $\frac{1}{3}hS^2B$. Seu, extrito B ubique, (utpote infinite exiguo, & ubique æquali,) ductisque omnibus in 6 (pro magnitudinibus,) seu (pro momentis) in 12, (quò fractiones tollantur:) Magnitudo ad magnitudinem erit, ut $9hA - 5hS$, ad $2hS$: Et Momentum illius, ad Momentum huius, ut $18hA^2 - 20hAS - 7hS^2$, ad $3hS^2$. Seu (restitutis minuscularum valoribus) Magnitudo ad Magnitudinem, ut $9ab - 5sh$, ad $2sh$: Et momentum ad momentum, ut $18a^2h - 20ash - 7s^2h$, ad $3s^2h$.

Cumque hoc ubique obtineat; erit Solidorum omnium Trapeziis $Y\delta\xi$ insistentium, (sive quæ totam Semicycloidem spectant, sive quæ spectant ipsius portionem, $Ab\beta\alpha$, $b\beta\tau$, $b\beta\delta$, &c.) magnitudo; ad magnitudinem omnium Triangulis $Y\alpha P$ insistentium, (sive quæ totam spectant Semicirculum, sive ipsius respectivam portionem, ut $B\alpha A$, $\alpha B\alpha$, $B\alpha D$, &c.) ut *Omnia* $9ab + 5sh$: ad *Omn.* $2sh$: eo spectantia. (De quo non ultra solliciti sumus, utpote quod in capite præcedente tractavimus.) Eorumque omnium Momentum, ad Momentum horum; ut *Omn.* $18a^2h - 20ash + 7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: eo spectantia. (Quod & supra inventum erat.)

Hoc est, ut *Omn.* $7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: (seu 7 ad 3:) atque insuper ut *Omn.* $18a^2h - 20ash$: ad *Omn.* $3s^2h$. Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a^2h : (puta, quæ portionem $Ab\beta\alpha$ spectant,) hoc est, Ungulæ $Ab\beta\alpha$ fig. 170. aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, (per § K. prop. 19.) $\frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{2}a^2sR$. Adeoque *Omn.* $18a^2h = 36eR^3 - 36avR^2 + 6a^3R - 18a^2sR$.

Item, *Omn.* ash : eo spectantia; hoc est, Solidi $Ab\beta\alpha$ fig. 170. ex ductu rectarum $b\beta$ in $\beta\alpha$ facti, momentum respectu $A\alpha$, (per § H. prop. 18.) $-\frac{1}{4}eR^3 - avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$. Adeoque *Omn.* $20ash = -25eR^3 - 20avR^2 - 5svR^2 + 10as^2R$.

Ergo, *Omn.* $18a^2h - 20ash = 11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R - 18a^2sR - 10as^2R$.

Similiter; *Omn.* $\frac{1}{2}s^2h$: hoc est; Solidi $Ab\beta\alpha$, fig. 170. ex ductu rectarum $b\beta$ in $\beta\alpha$ facti, momentum respectu plani $A\tau\alpha$, (per § C. prop. 18.) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Adeoque *Omn.* $3s^2h = \frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R$.

Momen-

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 419

Momentum igitur Ungulæ portionis Semicycloidis $A b \beta \alpha$, aciem Fig. 166, habentis $A \alpha$, respectu ejusdem $A \alpha$, est ad Momentum respectivæ 168. Ungulæ portionis Semicirculi $B \alpha A$, aciem habentis $A \alpha$, respectu ejusdem $A \alpha$: ut $11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 - 6a^3R - 18a^2sR - 10as^2R$ ad $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - s^3R$; atque insuper (ut modo dictum) ut 7 ad 3; hoc est, ut $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{2}s^3R$, ad $\frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - s^3R$: Adeoque omnino, ut $\frac{1}{2}eR^3 - 16avR^2 - \frac{1}{2}svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR - 10as^2R + \frac{1}{2}s^3R$, ad $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - s^3R$. Cumque hoc posterius sit (per § R. prop. 16.) duodecuplum Momenti Ungulæ $B \alpha A$, aciem habentis $A \alpha$, respectu ipsius $A \alpha$: Erit & prius illud, duodecuplum momenti Ungulæ $A b \beta \alpha$ (portionis Semicycloidis) aciem habentis $A \alpha$, respectu ejusdem $A \alpha$: Adeoque ipsum illius momentum, $\frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{2}a^3R - \frac{1}{2}a^2sR - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{2}s^3R$: (Hujusque Duplum, est Semisolidi circa $A \alpha$ conversione facti, Momentum respectu ipsius axis $A \alpha$: ut supra sæpius ostensum est.)

Illudque Ungulæ Momentum, per magnitudinem suam, $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$, (per § I prop. 20.) divisum; exhibet ipsius $A b \beta \alpha$ Ungulæ, aciem habentis $A \alpha$, distantiam centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{87eR^2 - 96avR - 9svR + 36a^3 - 108a^2s - 60as^2 - 14s^3}{54a^2 + 108as - 48vR - 30s^2}$. (Semisolidique correspondentis, distantia centri gravitatis ab axe $A \alpha$, est ad hanc Ungulæ; ut 2 R ad $\frac{1}{2} P$.)

Speciatim vero, Ungulæ totius Semicycloidis $A \tau \alpha$, aciem habentis $A \alpha$, Momentum respectu $A \alpha$, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$.) $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{3}{4}R^3P$. Centrique gravitatis ab $A \alpha$ distantia, est $\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}$.

Similiter ostendetur, Ungulæ Segmenti Semicycloidis $b \beta \tau$, aciem habentis $A \alpha$, Momentum respectu $A \alpha$; ad momentum Ungulæ segmenti semicirculi $\alpha B \alpha$, aciem habentis $A \alpha$, respectu ejusdem $A \alpha$; esse, ut 7 ad 3; atque insuper, ut *Omn.* $18a^2b - 20asb$: ad *Omn.* $3s^2b$: eo spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus. Quæ similiter, mutatis mutandis, ad calculum reducentur. Cumque Ungulæ Segmenti Semicirculi Momentum illud per § S. prop. 16. innotescat: Habebitur & correspondens Ungulæ Segmenti Semicycloidis Momentum; & quæ hinc dependent.

Vel etiam; ex totius $A \tau \alpha$ Ungulæ momento, (modo tradito,) N.

H h h

Fig. 166, si auferatur (modo traditum) momentum Ungulæ $A b \beta \alpha$: Restabit
168, $\frac{1}{6} R P^3 - \frac{1}{4} R^3 P - \frac{2}{3} R^2 P + \frac{1}{3} a v R^2 - \frac{1}{8} s v R^2 - \frac{1}{2} a^3 R - \frac{1}{2} a^2 s R - \frac{1}{6} a s^2 R$
 $-\frac{1}{3} s^3 R$, Momentum Ungulæ $b \beta \tau$ aciem habentis $A \alpha$, respectu
ipsius $A \alpha$.

Atque hoc, per ipsius magnitudinem (§ I. traditam) $\frac{1}{6} R P^2 - \frac{1}{3} R^3 + \frac{1}{3} v R^2 - \frac{1}{4} a^3 R - \frac{1}{2} a s R - \frac{1}{2} s^3 R$, divisum; exhibet ejusdem,
ab $A \alpha$, distantiam centri gravitatis,

$$\frac{9 P^3 - 105 R^2 P - 174 R^3 + 192 a v R + 18 s v R - 72 a^3 - 216 a^2 s - 120 a s^2 - 28 s^3}{27 P^2 - 192 R^2 + 96 v R - 108 a^2 - 216 a s - 60 s^2}.$$

O. Si vero ex Ungulæ $A b \beta \alpha$ (portionis Semicycloidis) momento illo, modo reperto; auferatur Momentum Ungulæ $b \beta \alpha V$, (aciem habentis $A \alpha$,) respectu $A \alpha$: Relinquitur Ungulæ $A b V$ (aciem habentis $A \alpha$) momentum respectu $A \alpha$.

Componitur autem Ungula illa $b \beta \alpha V$, ex Pyramide Triangulo $B \alpha V$ incumbente, & solido incumbente Parallelogrammo $b \beta \alpha B$.

Pyramidis istius momentum (per § R. prop. 16.) est, $\frac{1}{6} a^3 R - \frac{1}{2} a^2 s v$.

Solidum Parallelogrammo $b \beta \alpha B$ incumbens, altitudinem habet, in α , nullam; in β , $\alpha \beta = a$; in B , $B V = s$; in b , $b V = s - a$. Adeoque componitur ex prismate, triangulares bases habente, $\alpha \beta$, vel $B b$, $= \frac{1}{2} a^2$; (quarum itaque centra gravitatis à B , & α , sunt $\frac{2}{3} a$; & propter altitudinem $V \alpha = h$, magnitudo prismatis $\frac{1}{2} a^2 h$; centrique gravitatis ab $A \alpha$ distantia $\frac{2}{3} a + \frac{1}{2} s$, propter centrum prismatis in medio rectæ centra basium conjungente; adeoque momentum ejus respectu $A \alpha$, $\frac{1}{3} a^3 h + \frac{1}{4} a^2 s h$: Atque ex cuneo, altitudinem habente in $\alpha \beta$, nullam; in $b B$, æqualem ipsi $B V = s$: Adeoque (propter $b B = a$, & $V \alpha = h$) magnitudinem habebit $\frac{1}{2} a s h$, (semissem prismatis, ejusdem basis & altitudinis:) Centrique gravitatis ab $A \alpha$ distantiam, $\frac{1}{2} a + \frac{2}{3} s$: Ejusque propterea respectu $A \alpha$ momentum, $\frac{1}{4} a^2 s h + \frac{1}{3} a s^2 h$. Solidique propterea totius parallelogrammo incumbentis momentum, respectu $A \alpha$, $\frac{1}{3} a^3 h - \frac{1}{2} a^2 s h + \frac{1}{3} a s^2 h$.

Adeoque Solidi Trapezio $b \beta \alpha V$ incumbentis, momentum respectu $A \alpha$, $\frac{1}{3} a^3 h - \frac{1}{2} a^2 s h + \frac{1}{3} a s^2 h - \frac{1}{2} a^2 s h$. Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2} f a h - \frac{1}{6} s^2 h$ (per § K. prop. 20.) divisum; exhibet ipsius $b \beta \alpha V$ Ungulæ, aciem habentis $A \alpha$, distantiam centri gravitatis ab $A \alpha$, $\frac{4 a^3 + 6 a^2 s - 4 a s^2 + s^3}{6 f a - 2 s^2}$.

Vel

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 421

Vel etiam sic colligitur, ejusdem $b\beta\alpha V$ Ungulæ, aciem habentis $A\alpha$, respectu ipsius $A\alpha$, Momentum. Fig. 166,
168.

Rectæ Trapezium complentes, ab $\alpha\beta$ incipiendo, usque ad bV ; sunt A , $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}s$, $A + \frac{1}{2}s$, $A + \frac{3}{2}s$, &c. usque ad $A + S$. Earumque puncta media, seu gravitatis centra, distantias habent, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A + \frac{1}{4}s$, $\frac{1}{2}A + \frac{3}{4}s$, $\frac{1}{2}A + \frac{5}{4}s$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}S$. Quæ in rectas illas ductæ, exhibent earundem momenta, seu Triangula rectis illis insistentia Ungulam complementia, $\frac{1}{2}A^2$, $\frac{1}{2}A^2 + sA + \frac{1}{4}s^2$, $\frac{1}{2}A^2 + 2sA + \frac{9}{4}s^2$, $\frac{1}{2}A^2 + 3sA + \frac{25}{4}s^2$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A^2 + SA + \frac{1}{2}S^2$. Eademque Triangula, ducta in earundem respective distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, nempe $\frac{1}{3}A$, $\frac{1}{3}A + \frac{1}{6}s$, $\frac{1}{3}A + \frac{2}{6}s$, $\frac{1}{3}A + \frac{3}{6}s$, &c. usque ad $\frac{1}{3}A + \frac{1}{2}S$, exhibent seriem Momentorum, eorundem Triangulorum, respectu $A\alpha$; $\frac{1}{6}A^3$, $\frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s$, $\frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s + \frac{1}{2}As^2$, $\frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s + \frac{3}{2}As^2 + \frac{1}{6}s^3$, &c. usque ad $\frac{1}{6}A^3 + SA^2 + \frac{1}{2}SA^2 + \frac{1}{6}S^3$. Quarum omnium aggregatum (per prop. 1.) propter $V\alpha = h$, est, $\frac{1}{6}hA^3 + \frac{1}{2}hSA^2 + \frac{1}{6}hS^3$. Seu (restituto valore minuscularum,) $\frac{1}{6}a^3h + \frac{1}{2}a^2sh + \frac{1}{6}as^2h + \frac{1}{6}h^3$. Ut prius.

$$A + s, \text{ in } \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}s, = \frac{1}{2}A^2 + sA + \frac{1}{2}s^2.$$

$$A + 2s, \text{ in } \frac{1}{2}A + \frac{3}{2}s, = \frac{1}{2}A^2 + 2sA + \frac{9}{2}s^2.$$

$$A + 3s, \text{ in } \frac{1}{2}A + \frac{5}{2}s, = \frac{1}{2}A^2 + 3sA + \frac{25}{2}s^2.$$

&c. usque ad

$$A + S, \text{ in } \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}S, = \frac{1}{2}A^2 + SA + \frac{1}{2}S^2.$$

$$\frac{1}{6}hA^3 + \frac{1}{2}hSA^2 + \frac{1}{6}hS^3.$$

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}s, \text{ in } \frac{1}{2}A^2 + sA + \frac{1}{2}s^2, = \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s + \frac{1}{6}As^2 + \frac{1}{6}s^3.$$

$$\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}s, \text{ in } \frac{1}{2}A^2 + 2sA + \frac{9}{2}s^2, = \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s + \frac{2}{3}As^2 + \frac{1}{6}s^3.$$

$$\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}s, \text{ in } \frac{1}{2}A^2 + 3sA + \frac{25}{2}s^2, = \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s + \frac{4}{3}As^2 + \frac{1}{6}s^3.$$

&c. usque ad

$$\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}S, \text{ in } \frac{1}{2}A^2 + SA + \frac{1}{2}S^2, = \frac{1}{6}A^3 + \frac{1}{2}A^2s + \frac{1}{3}AS^2 + \frac{1}{6}S^3.$$

$$\frac{1}{6}hA^3 + \frac{1}{2}hSA^2 + \frac{1}{6}hS^3.$$

Quod quidem Ungulæ $b\beta\alpha V$ momentum, $\frac{1}{6}a^3h + \frac{1}{2}a^2sh + \frac{1}{6}as^2h + \frac{1}{6}h^3$, seu (propter $h = 2R - v$), $\frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sR - \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{6}h^3$.
H h h 2
+

422 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 166,
168.

$+\frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; ex Ungulæ $Ab\beta\alpha$ momento, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{3}s^3R$, (modo tradito,) subductum; Relinquit Ungulæ AbV , aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{2}as^2v + \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$.

Atque hoc, per hujus Ungulæ magnitudinem, $-\frac{2}{3}vK^2 - \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR - \frac{1}{12}s^2R - \frac{1}{2}a^2v - \frac{1}{2}asv - \frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum; exhibet Ungulæ AbV , aciem habentis $A\alpha$, distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$,

$$\frac{87eR^3 - 96avK^2 - 9svR^2 - 12a^3R - 36a^2sR - 12as^2R + 2s^3R + 24a^2v - 36a^2sv - 24as^2v - 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R - 36asK - 6s^2K - 36a^2v - 36asv - 12s^2v}.$$

Semisolidique correspondentis Momentum respectu axis conversionis suæ, duplum est Momenti Ungulæ respectu aciei suæ: Illiusque distantia centri gravitatis ab axe, ad hujus distantiam ab acie; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$. Ut sæpius ostensum est.

P. Eademque Momenta & Distantiæ, sic adhuc aliàs investigantur. Nempe, Momento Ungulæ AbV per se invento, sine ope Ungulæ $Ab\beta\alpha$: Hinc ipsius $Ab\beta\alpha$ Ungulæ Momentum, reliquaque deducuntur.

Divisâ rectâ $A\alpha$ in partes infinite exiguas, invicem æquales, in punctis S, C, Σ , &c. hoc est, sumptis v arithmetice proportionalibus: Quæ Semicycloidem $A\tau\alpha$, ejusve segmentum AbV , complent rectæ bV , sunt *Omnēs* $a + \frac{1}{2}s$, eo spectantes. Quæque Semiquadrantalem Ungulam eidem insistentem, aciem habentem $A\alpha$, complent plana, easdem rectis insistentia; sunt Triangula Isoscelia, earundem rectarum semiquadrata: hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}as - \frac{1}{2}s^2$: eo spectantia. Horumque Triangulorum centra gravitatis, ab $A\alpha$ distant earundem rectarum bV besse, hoc est $\frac{2}{3}bV = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}s$. Adeoque Triangulorum illorum Momenta, (ductis magnitudinibus in respectivas distantias,) sunt *Omn.* $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2s - \frac{1}{6}as^2 + \frac{1}{3}s^3$: (seu, Triens cuborum omnium bV), sumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$: (sumptis v arithmetice proportionalibus,) hoc est, Ungulæ AbB fig. 170. aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, (per § M. prop. 19.) $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{2}as^2v$.

Et *Omn.* a^2s : (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti respectu $A\alpha$, Solidi AbB fig. 170. ex ductu rectarum bB in bV respective, (per § N. prop. 18.) $-\frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{2}as^2R - \frac{1}{2}a^2sv$.

Item

PROP. XXI. De Calculo Centri Gravitatis. 423

Item *Omn.* as^2 : (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti ejus- Fig. 166,
dem A b B Solidi, respectu plani A $\tau \alpha$, (per § O. prop. 18.) $-\frac{2}{3}eR^3$ 168.
 $+\frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$.

Et *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$; (eo spectantia,) hoc est, Momentum Ungulæ A b V
aciem habentis A α , respectu A α ; $\frac{1}{6}eR^3 + \frac{1}{6}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$:
per § Q. prop. 16.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{6}as^2s - \frac{1}{6}as^2 - \frac{1}{6}s^3$: $= \frac{2}{3}eR^3 - \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{6}svR^2$
 $-\frac{1}{6}as^3R + \frac{1}{2}a^2sR - \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v$
 $-\frac{1}{12}s^3v$. Quod igitur est Momentum Ungulæ segmenti semicycloi-
dis A b V, aciem habentis A α , respectu ipsius A α . (Idem quod
prius inventum erat.) Quod itaque per magnitudinem divisum, ex-
hibebit distantiam centri gravitatis ab A α : ut prius.

Atque huic quidem Momento, si addatur Momentum Ungulæ
b $\beta \alpha$ V, (modo traditum,) habebitur Ungulæ A b $\beta \alpha$, aciem haben-
tis A α , Momentum respectu A α : ut prius.

Exhibuimus igitur in expositis Ungulis Semicycloidis, ejusque parti-
um, tum Magnitudines, & Momenta; tum centri gravitatis in singulis
distantias à duobus saltem planis non sibi invicem parallelis; atque in
quo tertio per aciem plano constitutum sit, ex § G. prop. 12. constat,
(eo nempe quod Ungulæ altitudinem bifecat;) Adeoque (per prop. 26.
cap. præced.) ipsa gravitatis centra determinavimus.

Quæque de Ungulis dicta sunt; eadem ad solida conversione facta
facile transferuntur, ope prop. 12. & 14. ut suis locis sæpius ostensum.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia, calculo rite administrato, fa-
cile applicantur: Ut ad præcedentes aliquot propositiones admonuimus.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam (hactenus
traditam) dicta sunt; eadem omnia ad Ungulas, Solidaque, Secunda- Fig. 175,
rias (sive Protractas sive Contractas) similiter spectantia, facile transfe- 176.
rentur. Nempe, quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a , substi-
tuenda erit alia quantitas, quæ, ad illam, eam habet rationem, quam
habet recta $\tau \alpha$, ad $\frac{1}{2}P$, semiperipheriam circuli generantis. Et si-
militer, mutatis mutandis, de earundem Quadratis Cubis, cæterisque
potestatibus; ut ad calcem propositionis præcedentis ostensum est.

PROP.

Fig. 177.

PROP. XXII.

- A. Quæ Cycloidem contingit recta, est correspondenti Circuli genitoris (circa cycloidis axem positi) Chordæ, ad verticem terminatæ, parallela.
- B. Curvæ Semicycloidis, est Dupla Diametri circuli Genitoris.
- C. Ejusque portio quævis (ad verticem terminata) Dupla subtensæ correspondentis Arcûs circuli genitoris. Adeoque secabitur Cycloidis curva, in ratione data.

Atque hinc Momenta & Magnitudines, ipsæque gravitatis centra, exhibentur; Tum Curvæ Cycloidis, partiumque ejusdem; tum superficierum, earundem conversione, factarum.

Nempe (retentis symbolis ut in propositionibus præcedentibus, positoque $\chi = \sqrt{4R^2 - c^2} = \alpha B$.)

- B, D, F. Curvæ Semicycloidis $A\tau$, magnitudo $4R$: Momentum respectu TA , $\frac{8}{3}R^2$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{16}{3}R^2$; Distantia Centri gravitatis, à TA , $\frac{4}{3}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $2RP - \frac{16}{3}R^2$; respectu $T\tau$, $\frac{16}{3}R^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$; à $T\tau$, $\frac{4}{3}R$.
- C. Curvæ Ab ; magnitudo, $2c$: Momentum respectu TA , $\frac{4}{3}cv$; respectu bV , $\frac{4}{3}cv$; respectu $\tau\alpha$, $2cb + \frac{4}{3}cv = 4cR - \frac{4}{3}cv$: Distantia Centri gravitatis à TA , $\frac{1}{3}v$; à bV , $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$: Momentum respectu $A\alpha$, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi$; Distantia

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 425

Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a = \frac{8R^2 - l\chi - 6\chi R}{3c}$ Fig. 177.

Ungulæ Superficialis (Semiquadrantis) ipsi $A\tau$ curvæ D, F.
 insistentis, aciem habentis TA , Magnitudo, $\frac{1}{3}R^2$:
 Momentum respectu TA , $\frac{1}{3}R^3$; respectu $\tau\alpha$, E, F.
 $\frac{1}{3}R^3$: Distantia Centri gravitatis à TA , $\frac{1}{3}R$; à $\tau\alpha$,
 $\frac{1}{3}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}R^2P - \frac{1}{3}R^3$; re- H, L.
 spectu $T\tau$, $\frac{1}{3}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
 $\frac{1}{3}P - \frac{1}{3}R$; à $T\tau$, $\frac{1}{3}R$.

Acieque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{3}R^2$: Momentum D, F.
 respectu TA , $\frac{1}{3}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3$; Distantia E, F.
 Centri gravitatis à TA , $\frac{1}{3}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R$: A $T\tau$, H, L.
 $\frac{1}{3}R$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}P - \frac{1}{3}R$; Momentum respectu $T\tau$,
 $\frac{1}{3}R^3$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}R^2P - \frac{1}{3}R^3$.

Acieque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $2RP - \frac{1}{3}R^2$: Mo- G, K.
 mentum respectu TA , $\frac{1}{3}R^2P - \frac{1}{3}R^3$; respectu $\tau\alpha$, H, L.
 $\frac{1}{3}R^2P - \frac{1}{3}R^3$; Distantia Centri gravitatis à TA ,
 $\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$: Momentum I, M.
 respectu $A\alpha$, $RP^2 - \frac{1}{3}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{3}R^3$
 $-\frac{1}{3}R^2P$; Distantia Centri grav. ab $A\alpha$, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$
 à $T\tau$, $\frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$.

Acieque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{1}{3}R^2$: Momen- G, K.
 tum respectu TA , $\frac{1}{3}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3$; H, L.
 Distantia Centri gravitatis à TA , $\frac{1}{3}R$; à $\tau\alpha$,
 $\frac{1}{3}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{1}{3}R^2P$; I, M.
 respectu $T\tau$, $\frac{1}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$; Distantia Centri gra-
 vitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}R - \frac{1}{2}P$; à $T\tau$, $P - \frac{1}{3}R$.

Ungulæ Superficialis Ab , aciem habentis TA ; Magni- D, F.
 tudo $\frac{1}{3}c^2v$: Momentum respectu TA , $\frac{1}{3}c^2v^2$; respectu E, F.
 bV

Fig. 177. b V, $\frac{1}{3}cv^2$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}vR - \frac{2}{3}cv^2$; Distantia
 Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{3}v$; à b V, $\frac{2}{3}v$;
 H, L. à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$: Momentum respectu A α ,
 $\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2}$; Distantia

Centri gravitatis ab A α ,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{60cvR^2 = 30c^3R}$$

D, F. Aciemque habentis b V; Magnitudo, $\frac{4}{3}cv$: Momentum
 E, F. respectu T A, $\frac{1}{3}cv^2$; respectu b V, $\frac{1}{3}cv^2$; respectu
 $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cvR - \frac{1}{3}cv^2$; Distantia Centri gravitatis
 à T A, $\frac{1}{3}v$; à b V, $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$:
 H, L. Momentum respectu A α ,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 - 128R^5}{90R^2}$$

Distantia Centri gravitatis ab A α ,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 - 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R}$$

D, F. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $2cb + \frac{4}{3}cv = 4cR$
 E, F. $-\frac{2}{3}cv$: Momentum respectu T A, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{3}cv^2$; re-
 spectu $\tau\alpha$, $8cR^2 - \frac{4}{3}cvR + \frac{2}{3}cv^2$; respectu b V, $\frac{4}{3}cvR$
 $-\frac{2}{3}cv^2$; Distantia Centri grav. à T A, $\frac{10vR - 3v^2}{30R - 5v}$;

H, L. à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2 - 20vR + 3v^2}{30R - 5v}$; à b V, $\frac{20vR - 2v^2}{30R - 5v}$: Mo-
 mentum respectu A α ,
 $\frac{360ac^3R^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 - 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2}$;

Distantia Centri gravitatis ab A α ,

$$360acR^3$$

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 427

$$\frac{360acR^3 - 30ac^2R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =) 30c^3R.}$$

Aciemque habentis A α ; Magnitudo, $2ac - \frac{1}{3}R^2 + (4\chi R$ G,K.
 $-\frac{1}{3}b\chi =) \frac{1}{3}\chi R + \frac{1}{3}v\chi$: Momentum respectu T A, H,L.

$$\frac{30ac^2R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2}; \text{ respectu } \tau\alpha,$$

$$\frac{360acR^3 - 30ac^2R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2};$$

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2};$$

respectu bV, Distantia Centri gravitatis à T A,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =) 30c^2\chi R};$$

$$\frac{360acR^3 - 30ac^2R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R};$$

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R};$$

Momentum respectu A α , $2a^2c + \frac{1}{3}c^3 - \frac{11}{9}cR^2$ I, M.

$$+ \frac{1}{3}c\chi^2 + 8a\chi R - \frac{2a\chi^3}{3R} - \frac{c^5}{10R^2}; \text{ Distantia Cen-}$$

tri gravitatis ab A α .

$$\frac{180a^2cR^2 + 60c^3R^2 - 1120cR^4 + 40c\chi^2R^2 + 720a\chi R^3 - 60a\chi^3R - 9c^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}.$$

Iii

Adeoque

N. Adeoque exhibuimus, tum rectas Cycloidem (Primariam) tangentes; tum ipsius curvæ, partiumque ejusdem, longitudines, & Centra gravitatis; earumque Momenta respectu expositarum rectarum; Ungularum item superficialium, (adeoque & superficierum conversione factarum,) magnitudines, momenta, & Centra gravitatis. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia facile transferentur.

O. Possunt etiam & Cycloidum Secundariarum (Contractarum scilicet & Protractarum) Tangentes exhiberi; earumque Curvis Semiellipses æquales; & partes partibus respective sumptis.

A. Sumpto, in Semicycloidis curva $A\tau$, puncto quovis b , duci Sintelligatur basi $\tau\alpha$, parallela bB ; Circulo genitori, circa Cycloidis axem $A\alpha$ constituto, occurrens in B : Junctæque Chordæ AB ; ducatur huic parallela, per punctum b , recta gbh . Dico rectam gbh , Semicycloidem in b contingere.

Sumptis in recta gbh , supra b , puncto g ; & infra, puncto h : ducantur, ipsi bB parallelæ, rectæ $gxXG$, $hdHD$, Semicycloidi occurrentes in x , d ; Semicirculo in X , D ; chordæque AB (productæ) in G , H .

Ostensum est (§ A. prop. 20.) arcui BA , æqualem esse rectam bB ; adeoque & (propter parallelas) gG , & hH . Item arcui XA , rectam xX ; & arcui DA , rectam dD .

Cumque ibidem demonstratum sit rectas BP , (fig. 167, 168, 169.) arcubus BX , ubique minores esse; rectasque BY , arcubus BD majores: Similiter ostenderur, (fig. 177.) rectam XG minorem arcui BX ; rectamque HD , majorem esse arcui BD . (Nam similiter, hic, ducitur AB , ab A ; atque illic, αB , ab α .)

Adeoque; propter totam gG rectam, toti BA curvæ æqualem; & ablatam XG , ablatâ XB minorem: Erit reliqua Xg recta, major quam reliqua XA curva, seu recta xX . Et, propterea, punctum g , extra cycloidem cader.

Item; propter hH rectam, ipsi BA curvæ æqualem; & HD adjectam, majorem adjectâ BD : Erit tota Dh recta, major quam

tota

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 429

tota curva D A, seu D d recta. Et, propterea, punctum h est extra Fig. 177.
Cycloidem.

Cuius itaque, tum g (punctum quodvis supra b,) tum h (punctum quodvis infra b,) sit extra Cycloidem; (adeoque unicum b punctum cycloidi commune;) recta g b h Cycloidem in b tangit.

Estque (propter parallelas) $bg = BG, bh = BH, gh = GH$; B.
& (producta bg, donec tangenti verticis AT occurrat in T,) $bT = BA = c = \sqrt{2vR}$; (propter AV, AB, Aa, hoc est, $v, c, 2R$. continue proportionales; ut saepe dictum est.) Item, (ductis g XO, b BV, h DC, ipsi TA parallelis, Axi Aa occurrentibus in O, V, C, rectam VO, vel CO, intercipientibus, quam dicamus B;) erit, ut $AV = v$, ad $AB = \sqrt{2vR}$; sic VO , vel $CO = B$; ad BG, vel HG; hoc est, ad bg, vel hg, $= \frac{B\sqrt{2vR}}{v} = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$.

Si itaque intelligatur recta Aa = 2R, in partes aequales nume- Fig. 177.
ro infinitas, dividi, quarum una intelligatur VO, vel OC; adeo- 178.
que omnes AV, hoc est omnes v, eo spectantes, arithmetice proportionales: Quae his respondent subtensa totidem AB, hoc est, totidem $\sqrt{2vR}$ correspondentes; (series utique subsecundanorum;) sunt ut totidem rectae Vp semiparabolam Appa (fig. 178.) complentes; cuius tum Axis Aa, tum basis aP, (adeoque & latus rectum,) sit = 2R.

Rectaeque bg, seu gh, tangentes; hoc est, (in partibus infinite exiguis) ipsae bx, seu xd, curvae; sunt totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, correspondentes; (hoc est, series seriei subsecundanorum reciproca.)

Adeoquae, si rectae VO, vel OC, singulae; hoc est, totidem B; intelligantur ipsis aO seu VO, totidem, fig. 177, 178. rectangulum AaOO complentibus, aequales; & sumantur ubique, ut Vp, ad aP, seu VP; sic aO, seu VO, ad Va: hoc est, ut $\sqrt{2vR}$, ad 2R; sic B, ad $\frac{2BR}{\sqrt{2vR}} = \frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}} = Va$: Erunt omnes illae bg, seu gh, hoc est, (in partibus infinite exiguis,) omnes illae bx, seu xd, curvam Aa complentes; ad omnes illas VO, seu OC, complentes rectam Aa, hoc est, ipsa Aa curva, ad rectam Aa: ut omnes.

Iii 2

Fig. 177, omnes illæ $V\omega$ figuram interminabilem $A\alpha O\omega$ complentes, ad
 178. omnes illas VO complentes Rectangulum $A\alpha O O$; Hoc est, ut
 figura illa interminabilis, ad inscriptum parallelogrammum; Hoc
 est, ut Reciproca Secundanorum Series, cujus index est $-\frac{1}{2}$; ad
 congruam Aequalium seriem, cujus Index est $\frac{1}{2}$, (per det. 1, 2.
 hujus.) hoc est (per prop. 1. hujus) ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ seu ut 2 ad 1.
 Adeoque $A\tau$ curva, est dupla rectæ $A\alpha$.

Fig. 179. Vel etiam, eâdem Parabolâ inverso situ positâ, ut $\alpha\pi\Pi$, fig. 179.
 ductoque ad eandem diametrum Semicirculo $AB\alpha$: Si sumatur, ubi-
 que, ut VB ad $V\pi$, sic VO seu αO ad $V\omega$; (hoc est, ut
 $v = \sqrt{vh}$ ad $\sqrt{2hR}$, sic B ad $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$;) habebitur eadem quæ pri-
 us figura interminabilis $A\alpha O\omega$: Reliquaque consequentur ut
 prius.

C. Similiter ostendetur (in partibus.) curvam Ab , ad AV rectam,
 Fig. 177, esse, ut est figura $AV\omega\omega$ interminabilis ad $AVOO$ rectangulum.
 178. Et, consequenter, si intelligatur $A\alpha O\omega$ (figura interminabilis)
 179. rectâ $V\omega$ secari in ratione datâ: in eâdem ratione secabitur, in b ,
 curva $A\tau$.

Quo autem secetur $A\alpha O\omega$ in ratione datâ; secanda erit $A\alpha$
 recta in ejusdem ratione duplicatâ. Intellige, si ratio data sit r ad R ;
 sitque AV ad $A\alpha$, ut r^2 ad R^2 ; erit $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque
 Ab curva, ad curvam $A\tau$;) in data ratione r ad R . Esto enim

$$AV (=v) = \frac{2r^2}{R}, \text{ (hoc est, ad } A\alpha = 2R, \text{ in ratione } r^2 \text{ ad } R^2:)$$

$$\text{Erit propterea } VP (=AB = \sqrt{2vR}) = \sqrt{4r^2} = 2r: \text{ Et}$$

$$V\omega (=B\sqrt{\frac{2R}{v}}) = B\sqrt{\frac{R^2}{r^2}} = \frac{BR}{r}. \text{ Adeoque Rectangulum } AV\omega\omega$$

$$(=vB\sqrt{\frac{2R}{v}}) = 2rB. \text{ Hujus itaque duplum } 4rB, \text{ erit ipsa}$$

$AV\omega\omega$ interminabilis. (Nam, qua ratione $A\alpha O\omega$ est dupla inscripti
 parallelogrammi $A\alpha OO$; eâdem est $AV\omega\omega$ interminabilis, dupla huic
 inscripti parallelogrammi $AV\omega$; nempe per prop. 1. hujus.) Est autem
 (propter $A\alpha = 2R$, & $\alpha O = B$;) Rectangulum $A\alpha OO$
 $= 2RB$; hujusque propterea duplum $A\alpha O\omega = 4RB$. Ergo
 $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque & Ab , ad $A\tau$;) ut $4rB$, ad
 $4RB$; hoc est, ut r ad R .

Cum itaque Sinus versi AV ad $A\alpha$, (hoc est v ad $2R$;) sint
 in duplicata ratione subtensarum AB ad $A\alpha$; (hoc est, $\sqrt{2vR}$
 ad

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitationis. 431

ad $2R$ seu $\sqrt{4R^2}$; vel \sqrt{v} ad $\sqrt{2R}$:) Sintque item eadem AV ad $A\alpha$ in duplicata ratione curvarum Ab ad $A\tau$, (ut modo demonstratum est:) Eadem erit ratio Ab curvæ ad curvam $A\tau$, quæ est rectæ AB ad $A\alpha$ rectam. Adeoque, ut $A\tau$ curva ad rectam $A\alpha$, sic curva Ab ad AB rectam. Est autem (uti jam demonstravimus) curva $A\tau$ dupla rectæ $A\alpha$; ergo & Ab curva, dupla est rectæ AB . Et sic ubique. Hoc est, $A\tau = 2A\alpha = 4R$; & $Ab = 2AB - 2c = 2\sqrt{2vR} = \sqrt{8vR}$.

Vel etiam; sic habetur, curvæ $A\tau$ divisio in ratione datâ. Di-
visâ scilicet $A\alpha$ in ratione datâ, in γ ; aptetur $AB = A\gamma$: Ductæ
 Bb rectæ AT parallelâ, in eâdem ratione dividetur $A\tau$ in b . Ut
ex dictis patet. Nempe $R:r::A\alpha:A\gamma = AB::A\tau:Ab$. Fig. 177, 178, 179.

Porro; rectarum $V\omega$, hoc est, BG , bg , vel GH , gh , hoc
est, (in partibus infinite exiguis) bx , vel xd ; à Tangente verticis
 TA , distantia, sunt ipsæ $AV = v$, respectivæ. Quæ itaque in Fig. 177.

magnitudines $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$ (modo inventas) ductæ; exhibent earundem
respectu TA momenta, $B\sqrt{2vR}$ (seu cB). Adeoque (sumpris
 v arithmetice proportionalibus) curvæ $A\tau$, vel Ab , momentum
respectu AT ; vel Semiquadrantis Ungula superficialis ipsi $A\tau$ vel
 Ab curvæ insistent, aciem habens TA ; est aggregatum omnium
 $B\sqrt{2vR}$ eo spectantium; vel (omissis B) omnium $\sqrt{2vR}$, hoc
est, omnium Vp rectarum, Semiparabolam $A\alpha P$, vel AVp , fig.
178. complementum: (est enim B , ut ex ipsius origine pater, nihil
aliud quam ipsius $A\alpha$ vel AV pars infinitesima; quæ omnes simul
sumptæ ipsam $A\alpha$ vel AV conficiunt; atque hic nihil innuit aliud quam
rectarum illarum, planum complementum, crassitiem.) Et propterea,
superficialis Ungula ipsi $A\tau$ vel Ab curvæ insistent, (aciem habens
 AT), æquatur ipsi $A\alpha P$, vel AVp , semiparabolæ; hoc est
(propter latus rectum $2R$, axemque $A\alpha = 2R$, vel $AV = v$.)
erit Ungula $A\tau = A\alpha P = \frac{2}{3}R^2$; & Ungula $Ab = AVp$
 $= \frac{2}{3}v\sqrt{2vR} = \frac{2}{3}vc$. per prop. 1, vel 6. hujus. Adeoque
quæ conversione curvæ $A\tau$ vel Ab circa TA , describitur super-
ficies; est $\frac{2}{3}RP$, vel $\frac{2P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{2vcP}{3R}$; & semiconversione,
 $\frac{4}{3}RP$, vel $\frac{P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{vcP}{3R}$.

Illudque

Fig. 17.

Illudque momentum, $\frac{8}{3} R^2$, vel $\frac{8}{3} v \sqrt{2} v R = \frac{8}{3} c v$, per ipsius curvæ $A \tau$ vel $A b$ magnitudinem, $4 R$ vel $2 \sqrt{2} v R = 2 c$ (modò inventum,) divisum; exhibet, centri gravitatis à $T A$, distantiam; nempe, ipsius $A \tau$, $\frac{2}{3} R$; ipsiusque $A b$, $\frac{1}{3} v$.

Adeoque, ipsius $A \tau$ distantia centri gravitatis à $\tau \alpha$, erit $\frac{4}{3} R$; ejusque propterea respectu $\tau \alpha$ momentum, seu semiquadrantalís Ungula, $\frac{16}{3} R^2$: Ipsiusque $A b$, Distantia Centri gravitatis à $b V$, $\frac{2}{3} v$; & à $\tau \alpha$, $h + \frac{2}{3} v = 2 R - \frac{1}{3} v$; adeoque ejusdem momentum (vel Semiquadrantalís Ungula) respectu $b V$, $\frac{4}{3} v \sqrt{2} v R = \frac{4}{3} v c$; & respectu $\tau \alpha$, $2 h \sqrt{2} v R - \frac{4}{3} v \sqrt{2} v R = 2 h c - \frac{4}{3} v c$, vel $4 R \sqrt{2} v R - \frac{4}{3} v \sqrt{2} v R = 4 c R - \frac{4}{3} c v$. Et superficies conversione vel semiconversione factæ, ad hæc momenta; ut P vel $\frac{1}{2} P$ ad R .

E. Deinde: Eorundem omnium $\sqrt{2} v R$ (Ungulam $A \tau$ vel $A b$, aciem habentem $T A$, complementum,) distantia à $T A$, sunt $AV = v$ respectivè: Adeoque eorundem respectu $T A$ momenta, sunt omnia $v \sqrt{2} v R$ seu $\sqrt{2} v^2 R$ (vel $v c$;) hoc est, ipsa rectarum $V p$ semiparabolam $A \alpha P$ vel $AV p$ constituentium momenta respectu $T A$. Hoc est, (per prop. 1. vel 6. hujus,) Semiquadrantalís Ungulæ superficialis, ipsi $A \tau$, vel $A b$, insistentis, aciem habentis $T A$, respectu ejusdem $T A$, momentum, est $\frac{16}{3} R^3$, vel $\frac{8}{3} v^2 \sqrt{2} v R = \frac{8}{3} c v^2$. Adeoque, superficiæ semiconversione circa $T A$ factæ momentum respectu ipsius $T A$, (quippe duplum momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalís, propter magnitudinum rationem, ut $\frac{1}{2} P$ ad R , seu P ad $2 R$, & distantiarum ut $2 R$ ad $\frac{1}{2} P$, seu $4 R$ ad P ; ut sæpe ostensum est;) $\frac{16}{3} R^3$, vel $\frac{8}{3} c v^2 = \frac{8}{3} v^2 \sqrt{2} v R$, prout de tota $A \tau$, parteve $A b$, intelligitur.

Illudque Ungulæ Momentum $\frac{16}{3} R^3$ vel $\frac{8}{3} c v^2$, per magnitudinem $\frac{8}{3} R^2$ vel $\frac{8}{3} c v$ divisum; exhibet distantiam centri gravitatis istius $A \tau$ vel $A b$ superficialis Ungulæ (aciem habentis $T A$) ab ipsa $T A$, $\frac{2}{3} R$ vel $\frac{1}{3} v$; (adeoque correspondentis Superficiæ Semiconversione factæ, centri inde distantiam, $\frac{24 R^2}{5 P}$, vel $\frac{12 v R}{5 P}$; nempe, ad illam Ungulæ, ut $2 R$ ad $\frac{1}{2} P$, seu $4 R$ ad P .) Et propterea, distantiam centri gravitatis ejusdem Ungulæ $A \tau$ (aciem habentis $T A$) à $\tau \alpha$, $\frac{4}{3} R$ (ejusque igitur respectu $\tau \alpha$ momentum $\frac{16}{3} R^3$;) Ungulæque $A b$ (aciem item habentis $T A$) distantiam centri gravitatis à $b V$, $\frac{2}{3} v$; à $\tau \alpha$, $h - \frac{2}{3} v = 2 R - \frac{1}{3} v$; adeoque ipsius, respectu $b V$, momentum, $\frac{4}{3} v^2 \sqrt{2} v R = \frac{4}{3} c v^2$; & respectu $\tau \alpha$, $\frac{2}{3} v h \sqrt{2} v R - \frac{4}{3} v^2 \sqrt{2} v R = \frac{2}{3} v^2 c - \frac{4}{3} c v^2$, vel $\frac{2}{3} v R \sqrt{2} v R - \frac{2}{3} v^2 \sqrt{2} v R = \frac{2}{3} c v R - \frac{2}{3} c v^2$. Sed

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 433

Sed & idem $\frac{1}{15}R^3$ (propter magnitudinum & distantiarum reciproca-
tionem) est etiam Ungulæ superficialis A r, aciem habentis
r a momentum respectu T A; quod itaque per magnitudinem $\frac{1}{15}R^3$
(modo inventam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à
T A, $\frac{2}{5}R$; adeoque, à τa , $\frac{3}{5}R$, ejusque propterea respectu aciei
sux τa momentum, $\frac{1}{15}R^3$: Superficie vero semiconversione circa
 τa descriptæ, respectu ipsius τa , Momentum, (utpote Momenti
Ungulæ duplum,) $\frac{2}{15}R^3$; Centrique gravitatis à τa distantiam, (ut-
pote ad illam Ungulæ ut 4 R ad P,) $\frac{32}{5}P$.

Item (propter eandem magnitudinum & distantiarum reciproca-
tionem) $\frac{1}{15}v^2\sqrt{2vR} = \frac{1}{15}cv^2$, momentum etiam erit Ungulæ A b
aciem habentis b V, respectu ipsius T A: Quod itaque per magni-
tudinem modo inventam $\frac{1}{15}v^2\sqrt{2vR} = \frac{1}{15}cv^2$ divisum, exhibet distantiam
centri gravitatis à T A, $\frac{1}{5}v$; adeoque à b V, $\frac{4}{5}v$; à τa , $h - \frac{1}{5}v$
 $= 2R - \frac{1}{5}v$; ejusque propterea respectu ipsius b V (aciei suæ) mo-
mentum $\frac{1}{15}v^2\sqrt{2vR} = \frac{1}{15}cv^2$; & respectu τa , $\frac{4}{5}cv - \frac{1}{15}cv^2$
 $= \frac{4}{5}vR - \frac{1}{15}cv^2$: Superficie vero semiconversione circa b V factæ,
momentum respectu ipsius b V, $\frac{1}{15}cv^2$; ejusque inde distantiam centri
gravitatis $\frac{16vR}{5P}$.

Itemque (ob eandem causam) $\frac{4}{5}cvR - \frac{1}{5}cv^2$, est etiam Momentum
Ungulæ superficialis A b, aciem habentis τa , respectu T A: Quod
itaque per magnitudinem modo inventam $4cR - \frac{1}{5}cv$ divisum, exhi-
bet illius à T A distantiam centri gravitatis $\frac{10R - 3v}{30R - 5v}$: Adeoque,
à τa , $\frac{60R^2 - 20vR - 3v^2}{30R - 5v}$; à b V, $\frac{20vR - 2v^2}{30R - 5v}$: Ejusque prop-
terea momentum respectu τa , $8cR^2 - \frac{4}{5}cvR - \frac{1}{15}cv^2$; & respectu
b V, $\frac{4}{5}cvR - \frac{1}{15}cv^2$: Superficie vero semiconversione ip-
sius A b circa τa descriptæ, momentum respectu ipsius τa ,
 $16cR^2 - \frac{16}{5}cvR + \frac{4}{15}cv^2$; centrique gravitatis inde distantiam
 $\frac{240R^2 - 80vR^2 + 12v^2R}{30RP - 5P}$.

Eadem etiam sic habentur. Sumptis Subtensis AB = c (adeoque &
curvis Ab = 2c) arithmetice proportionalibus; adeoque (per § C.)
divisâ A r. curva in partes æquales; erit singulorum b punctorum
F.
Fig. 177,
181.

Fig. 177, à T A distantia AV ($=v$) $= \frac{c^2}{2R}$; (hoc est, ut series secundarum, seu ordinatim-applicatarum in semiparabolæ complemento;)

eorumque à τa distantia $V a = 2R - \frac{c^2}{2R}$. Adeoque si intelligatur A b τ curva fig. 177. in rectam expandi, vel huic æqualem rectam sumi A b τ , vel $a \beta P$, fig. 181; Ejusque b punctis, æqualiter ab invicem distantibus, insistentes rectæ b p ipsi AV respectivis æquales, figuram A P τ complentes: Exhibebunt hæ rectæ singulorum b punctorum, seu particularum minutarum, momenta respectu ipsius T A fig. 177. (sicut & residuæ p β , earundem momenta respectu τa ; nam propter b p = AV, erit p β = V a.) Et propterea, tum planum A τ P, totius A τ curvæ; tum planum A b p, curvæ A b, momentum respectu T A: Et similiter planum A P a , curvæ A τ ; & A p βa , curvæ A b momentum exhibebit, respectu τa ; & A p V, ejusdem A b momentum respectu b V. Est autem, (propter ordinatas b p = $\frac{c^2}{2R}$, in duplicatâ ratione diametrorum A b = 2 c,) Triligneum A P τ semiparabolæ complementum; ipsumque A P a , Parabola: Adeoque (propter A τ = 4 R, & τP = 2 R,) A P τ = $\frac{8}{3} R^2$; & A P a = $\frac{16}{3} R^2$; (per prop. 6. hujus:) Quæ itaque sunt curvæ A τ momenta respectu T A & τa . Similiter; propter A b = 2 c, & b p = $\frac{c^2}{2R}$; erit curvæ A b momentum respectu T A, $\frac{c^3}{3R}$; & respectu b V, $\frac{2c^3}{3R}$; & A p βa (= A b βa - A p b) = $4cR - \frac{c^3}{3R}$ ejusdem, respectu τa , momentum. Hoc est, (propter $c^2 = 2vR$) $\frac{2}{3}cv$, & $\frac{4}{3}cv$, & $4cR - \frac{2}{3}cv$. Ut prius. Quæ quidem momenta, eadem sunt atque correspondentes Ungulæ; ut sæpius dictum est.

Cumque quæ has superficiales Ungulas constituunt rectæ, sunt ipsarum ab aciebus suis distantis æquales; adeoque momenta, ut ipsarum quadrata: Erit superficialis Ungulæ A τ aciem habentis T A, momentum respectu T A, omnia rectarum b p quadrata, hoc est omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ usque ad eorum maximum, hoc est quadratum τP = $\frac{16R^4}{4R^2} = 4R^2$; adeoque ad maximum toties sumptum, ut 1 ad 5:

hoc

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 435

hoc est (propter $A\tau = 4R$), $\frac{1}{4} \times 4R \times 4R^2 = \frac{16}{3}R^3$ per prop. 1. Fig. 177, hujus. 181.

Et similiter, Superficialis Ungulæ Ab , aciem item habentis TA , (fig. 177.) respectu ejusdem TA momentum; erunt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ usque ad eorum maximum, puta $\frac{C^4}{4R^2}$; adeoque (propter $Ab = 2C$), momentum illud erit $\frac{1}{2} \times 2C \times \frac{C^4}{4R^2} = \frac{C^5}{10R^2}$; vel (restituendo c minusculam) $\frac{c^5}{10R^2}$; hoc est, (propter $c^2 = 2vR$, adeoque $c^4 = 4v^2R^2$), $\frac{2}{5}cv^2$.

Similiter, Superficialis Ungulæ Ab , aciem habentis bV , fig. 177. momentum respectu ejusdem bV ; erunt omnia quadrata rectorum, ipsi AV parallelarum, semiparabolam ApV complementium; hoc est, quadrata rectorum $\frac{C^2}{2R} - \frac{c^2}{2R}$; hoc est, omnia $\frac{C^4 - 2c^2C^2 + c^4}{4R^2}$; hoc est, per prop. 1. hujus, (propter $Ab = 2C$, & quadratum bp , $= \frac{C^4}{4R^2}$), $\frac{2C^4 - \frac{4}{3}C^3 + \frac{2}{3}C^3}{4R^2} = \frac{\frac{16}{15}C^5}{4R^2}$; vel (restituto valore c minusculæ) $\frac{4c^5}{15R^2}$; hoc est, (propter $c^4 = 4v^2R^2$), $\frac{16cv^2}{15}$; ut prius.

Item; Superficialis Ungulæ Ab aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, sunt omnia quadrata $p\beta$ eo spectantia; hoc est, quadrata rectorum $p\beta$, parabolæ portionem $Ap\beta\alpha$ complementium; hoc est, omnium $b\beta - bp$; h.e. omn. $2R - \frac{c^2}{2R}$, seu $\frac{4R^2 - c^2}{2R}$; hoc est, omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{4R^2}$; hoc est, per prop. 1. hujus (propter $Ab = \alpha\beta = 2C$), $\frac{32CR^4 - \frac{16}{3}c^2R^2 - \frac{2}{3}C^3}{4R^2}$; hoc est, (propter $c^2 = 2vR$, & $c^4 = 4v^2R^2$; item, restituta c minuscula;) $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{3}cv^2$: Ut prius.

Atque hinc, centrorum gravitatis à TA , bV , $\tau\alpha$, distantia; reliquaue deducuntur; eadem quæ prius.

K k k

Porro;

G. Porro, si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in minutas partes α -
Fig. 177, quales (ut prius) dividi; Erit singulorum b punctorum, seu par-
182, tium minutarum, ab $A\alpha$, distantia $bV = bB + BV = \alpha + s$;
183. Sumptis $AB = c$ (adeoque & $Ab = 2c$) arithmetice proportiona-
libus.

Adeoque, si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in rectam $A\tau$ fig.
182. expandi; cui ordinatim applicentur, (in singulis b punctis,) ex una parte, rectæ bB (trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. complentes) ipsi bB fig. 177. æquales; & ex altera parte, rectæ bV (com-
plentes bilineum $A\tau v$) æquales ipsi BV fig. 177. singulæ Rectæ Bb fig. 182. singulorum b punctorum, seu minutarum partium, momenta respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; adeoque & omnes omnium; siue quæ totam $A\tau$, siue quæ ipsius partem Ab spectant. Hoc est, Tota $A\alpha\tau v$, totius $A\tau$ curvæ; ejusque pars $ABb v$, partis Ab ; momentum respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; vel correspondentem Ungulam Semiquadrantalem.

Sunt utique rectæ Bb , trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. complentes; hoc est, rectæ Bb fig. 177. ut arcus chordarum in semicirculo, vel sinuum rectorum in Quadrante, arithmetice proportionalium; hoc est, ut rectæ γo fig. 170, complentes trilineum $\alpha\kappa\Gamma$; (quod est, figuræ sinuum rectorum unius quadrantis $\alpha\kappa\delta$, complementum ad parallelogrammum).

Quippe sumptis $\alpha\gamma$, seu ξo , sinibus rectis arithmetice proportionalibus; erunt, quæ his respondent, γo , seu $\alpha\xi$, eorundem arcibus æquales: quorum duplis, æquantur, chordarum in semicirculo respondentium arcus; seu rectæ Bb , fig. 182. Puta, rectis γo complentibus $A\kappa\alpha$ trilineum fig. 183. ipsi $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170. simile. Neque aliter differt trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. ab $A\alpha\kappa$ fig. 183. quam quod (retentis eisdem latitudinibus $bB = \gamma o$) altitudinem duplum habeat, nempe $A\tau = 2A\alpha$. Adeoque cum trilineo $\alpha\kappa\Gamma$, fig. 170. comparatum, latitudinem habet duplam ($bB = 2\gamma o$) altitudinem quadruplam, $A\tau = 4\alpha\Gamma$. Cum itaque Latitudo Dupla sit, & Altitudo Quadrupla; Figura figuræ est Octupla: Nempe $A\tau\alpha$ fig. 182. = $8\alpha\Gamma\kappa$ fig. 170. Et $ABb = 8\alpha o\gamma$; similiter divisus $A\tau$ in b , & $\alpha\Gamma$ in γ .

Est autem $\alpha\delta\kappa\Gamma = \frac{1}{4}R\mathcal{P}$ (propter $\alpha\delta = \frac{1}{4}P$, & $\alpha\Gamma = R$;) & $\alpha\kappa\delta = R^2$, (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha\kappa\Gamma = \frac{1}{4}RP - R^2$. Adeoque $A\tau\alpha$ (fig. 182.) = $2RP - 8R^2$.

Similiter, (in partibus,) $\alpha\xi o\gamma = \alpha s$, (positis $\alpha\xi = \alpha$; & ξo

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 437

$\xi o = s;$) & $ao\xi = vR$ (per § Q. prop. 17.) ergo $ao\gamma = as$ Fig. 177,
 $-vR$. Adeoque ABb (fig. 182.) $= 8as - 8vR$, Hoc est, Octu- 182,
 plum facti ex s semisubtensa, seu sinu semiarcus, in ejusdem sinu 183.
 arcum, seu semiarcum subtensa; minus, octuplo sinu versi ejusdem
 semiarcus, in Radium ducti. Hoc est (fig. 179.) $8AN \times AM$
 $- 8MN \times NC$: Hoc est, $2ANB \times AMB - 8MN \times NC$:
 Hoc est (propter $MN = CN - \frac{1}{2}AB$) $2ANB \times AMB -$
 $8NC \times NC - 4AB \times NC$: Hoc est (positis $ANB = a$,
 $AMB = c$, $AB = \chi$, & $NC = R$), $2ac - 8R^2 - 4\chi R$.

Deinde, recta bv fig. 182. (Bilineum $A\tau v$ complementes,) hoc est
 BV fig. 177. (sumptis $AB = c$, adeoque & $Ab = 2c$, arithmetice
 proportionalibus,) sunt sinus recti Arcuum quorum subtensa sunt
 arithmetice proportionales. Est autem (propter similia Triangula
 fig. 177.) ut $Aa = 2R$ ad $AB = c$; sic $aB = \sqrt{4R^2 - c^2}$:
 $= \chi$, ad $BV = s = \frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R} = \frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omnes bv
 complementes vel totam $A\tau v$, vel ipsius partem Abv , sunt Omnia
 $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ vel $\frac{c\chi}{2R}$, eo spectantia; sumptis c arithmetice pro-
 portionalibus. Quarum aggregatum sic colligitur.

Si intelligatur AaQ (fig. 183.) Circuli quadrans; qui Radium
 habeat $Aa = 2R$ aequalem circuli genitoris Diametro; in quo
 sumantur $A\gamma = c$ arithmetice proportionales; rectaque γq , ipsi
 AQ parallelæ. Erit ubique $\gamma q = \sqrt{4R^2 - c^2} = \chi$. (Nam
 quadratum qA , hoc est Aa , dempto quadrato $A\gamma$, æquatur qua-
 drato γq .) Adeoque Omnes γq , sive quæ totam AaQ quadran-
 tem, sive quæ ipsius partem $A\gamma qQ$ complement, sunt Omnes $\sqrt{4R^2 - c^2}$:
 (seu omnes χ .) eo spectantes. Cumque harum ab AQ
 distantia sit $A\gamma = c$ respective: Erunt Omnia $c\sqrt{4R^2 - c^2}$:
 (seu Omn. $c\chi$.) idem atque istius AaQ quadrantis, ejusve $A\gamma qQ$
 segmenti, momentum respectu AQ rectæ.

Quadrantis autem AaQ , si poneretur radius $= R$, momentum
 respectu AQ , esset $\frac{1}{3}R^3$ (per § Q. prop. 15.) ergo, posito radio
 $Aa = 2R$, erit $\frac{8}{3}R^3$: Quod itaque est aggregatum omnium $c\sqrt{4R^2 - c^2}$
 $- c^2$: eo spectantium. Adeoque $\frac{8}{3}R^2 = Omn. \frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ ip-
 sum Aa Bilineum fig. 183. (sumptis ubique, ut Aa ad $A\gamma$, sic
 γq ad γv .) Ejusque duplum (propter duplam altitudinem) $\frac{16}{3}R^2$,
 est Bilineum $A\tau v$ fig. 182. Quod ab Aa fig. 183. non aliter
 differt,

K k k 2

438 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 177,
182,
183.

differt, quam quod (retentis eisdem latitudinibus respectivis
b_v = v_v) altitudinem duplam habeat, A_r = 2 A_a.

Item, Sectoris q A Q, momentum respectu A Q, posito Radio
= R, effert (per § Q. prop. 15.) $\frac{1}{3}v\bar{k}^2$; hoc est, Triens facti
ex arcus sinu verso in quadratum Radii; hoc est, in presenti casu,
ex Q V = A Q - v q = 2 R - $\sqrt{4 R^2 - c^2}$ = 2 R - χ , in
quadratum A_a, = 4 \bar{k}^2 : Hoc est, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{4 R^2 - c^2}$
= $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2$. Cui si addatur Momentum (respectu ejusdem
A Q) Trianguli A q v; hoc est (propter v q = $\sqrt{4 R^2 - c^2}$ = χ ,
& A v = c; centrique gravitatis ab A Q distantiam $\frac{2}{3}c$;) $\frac{1}{3}c^2\sqrt{4 R^2 - c^2}$ = $\frac{1}{3}c^2\chi$. Habetur totius A v q Q momentum re-
spectu A Q, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2 + \frac{1}{3}c^2\sqrt{4 R^2 - c^2}$ = $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2 + \frac{1}{3}\chi^3$.
Quod itaque est Omnium $c\sqrt{4 R^2 - c^2}$ eo spectantium aggre-
gatum: Adeoque $\frac{4}{3}R^3 - \frac{\chi^3}{6R} = \text{Omn.} \frac{c\sqrt{4 R^2 - c^2}}{2R}$ est ip-

sum A v v fig. 183. Ejusque duplum $\frac{8}{3}R^3 - \frac{\chi^3}{3R}$, (propter du-
plam altitudinem) est ipsum A b v fig. 182.

Est itaque (propter A a r = 2 R P - 8 \bar{k}^2 , & A r v = $\frac{4}{3}\bar{k}^2$)
totum A a r v fig. 182. = 2 R P - $\frac{16}{3}\bar{k}^2$. Quod itaque est curvæ
Semicycloidis A r fig. 177. momentum respectu rectæ A a; vel Se-
miquadrantis Ungula eidem insistenti aciem habens A a. (Adec-
que superficies curva ejusdem circa A a conversione descripta, 2 P²
= $\frac{16}{3}R P$; & semiconversione, P² = $\frac{8}{3}R P$.) Illudque curvæ
A r momentum, per magnitudinem ($\frac{4}{3}R$) divisum; exhibet ejus-
dem A r curvæ distantiam centri gravitatis ab A a, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$: A-
deoque à T r, $\frac{4}{3}R$, tantundem scilicet quantum à r a (§ D.) at-
que tantundem est ejusdem respectu utriusvis Momentum, nempe
 $\frac{16}{3}\bar{k}^2$; & æquales utrobique superficies conversione exhibet, $\frac{16}{3}R P$;
& semiconversione $\frac{8}{3}R P$.

Item (propter A b B = 2 a c - 8 R² + 4 χR ; & A b v = $\frac{8}{3}R^3$
- $\frac{\chi^3}{3R}$), totum A B b v fig. 182. = 2 a c - $\frac{16}{3}R^2$ + 4 χR
- $\frac{\chi^3}{3R}$; vel (propter $\chi^2 = 2 b R$; cum sint a A, a B, a V;
hoc est, 2 R, χ , b, continue proportionales;) 2 a c - $\frac{16}{3}R^2$ + 4 χR
- $\frac{2}{3}b\chi = 2 a c - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R - \frac{2}{3}v\chi$. Quod itaque, est ipsius A b
curvæ momentum respectu A a; vel Semiquadrantis Ungula eidem
insistens,

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 439

inistens, aciem habens $A\alpha$. (Adeoquæ superficies curva ejusdem circa Fig. 177,

$A\alpha$ conversione facta, $\frac{2acP}{R} - \frac{1}{3}RP + (\frac{1}{3}\chi P + \frac{2v\chi P}{3R}) =$ 182, 183.

$\frac{1}{3}\chi P - \frac{2b\chi P}{3R}$: Et, semiconversione facta, hujus semissis.) Illudque momentum, per magnitudinem $(2c)$ divisum, exhibet, ejusdem Ab curvæ, distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, $a - \frac{8R^2}{3c} + \frac{2\chi R}{c} - \frac{b\chi}{3c} = a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

Deinde; (Divisâ ut prius $A\tau$, curvâ fig. 177, 180. in minutas partes æquales:) Cum quæ singulis b punctis (seu minutis particulis) inistunt, semiquadrantalem unguam, cujus acies TA , com- H. Fig. 177, 180.

plentes, sint (per § F.) $\frac{c^2}{2R}$; sintque illarum ab $A\alpha$ distantia (per

§ G.) $a + s$; erunt singularum momenta $\frac{a+s}{2R}c^2 = \frac{f}{2R}c^2$, (sumptis c arithmetice proportionalibus.) Adeoque momentum simul omnium, (sive quæ totam $A\tau$, sive quæ partem Ab spectant,) est Aggregatum omnium $\frac{f}{2R}c^2$ eo spectantium; hoc est, $Omn.$

$$\frac{ac^2}{2R} + \frac{sc^2}{2R}$$

Sunt autem *Omn. a* (sumptis c arithmetice proportionalibus) æquales respectivis rectis b B fig. 182. vel γ fig. 183. (ut § G. ostensum est) harumque ab $A\delta$ distantia sunt ipsæ $A\gamma = c$ respectivæ; adeoque quæ illis inistunt plana Ungulam Semiquadrantalem completia (aciem habentem $A\delta$) sunt *Omn. ac*: Horumque planorum ab $A\delta$ distantia sunt iidem $A\gamma = c$: Ergo eorum omnium momenta sunt *Omn. ac^2*. Fig. 170, 182, 183.

Sunt itaque *Omn. ac^2* eo spectantia, idem atque Momentum Ungulæ Semiquadrantis $A\alpha\alpha$, vel $A\alpha\gamma$, (aciem habentis $A\delta$,) respectu ipsius $A\delta$. Hoc est, *Sextuplum* momenti similis Ungulæ $\alpha\alpha\gamma$, vel $\alpha\alpha\gamma$, fig. 170. (aciem habentis $\alpha\delta$,) respectu ipsius $\alpha\delta$. Nempe in ratione *Quadruplicata* laterum homologorum, $A\alpha$ ad $\alpha\gamma$, (quæ dupla est,) propter tum singulas trium solidi dimensionum, tum distantiam ab axe conversionis; Duplas in $A\alpha\alpha$, earum quæ in $\alpha\alpha\gamma$. Est

Fig. 170, 182, 183. Est autem Momentum Ungulæ $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha\delta$, idem atque Momentum Ungulæ $\alpha\delta\kappa\Gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha\kappa\delta$ respectu communis aciei $\alpha\delta$. Hoc est, $\frac{1}{12}R^3P$ (propter $\alpha\Gamma = R$, & $\alpha\delta = \frac{1}{2}P$), dempto $\frac{2}{9}R^4$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{12}R^3P - \frac{2}{9}R^4$. Adeoque Momentum similis Ungulæ $A\alpha$ fig. 183. respectu aciei $A\delta$, (utpote illius Sedecuplum) $\frac{1}{3}R^3P - \frac{2}{9}R^4$. Quod itaque est aggregatum omnium αc^2 totam $A\alpha$ fig. 183. spectantium. Adeoque $\frac{2}{3}R^2P - \frac{1}{9}R^3$, aggregatum $Omn. \frac{\alpha c^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter $A\tau$ fig. 182. = $2A\alpha$, fig. 183.) ejusdem duplum $\frac{4}{3}R^2P - \frac{2}{9}R^3$ est aggregatum $Omn. \frac{\alpha c^2}{2R}$, spectantium $A\tau$ rectam fig. 182. curvamve $A\tau$ fig. 177.

Item Momentum Ungulæ $\alpha\sigma\gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha\xi$; idem est atque Momentum Ungulæ $\alpha\xi\sigma\gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha\sigma\xi$, respectu communis aciei $\alpha\xi$. Hoc est, $\frac{1}{3}\alpha s^3$ (positis $\alpha\xi = \alpha$, & $\alpha\gamma = \xi\sigma = s$), dempto $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{3}\alpha s^3 - \frac{1}{9}v^2R^2 - \frac{1}{9}s^2vR$; (sumptis s , pro semisubtensa, seu sinu dimidii arcus; & α, v , pro illo arcu dimidio ejusque sinu verso; hoc est, $\alpha = AN$, $s = AM$, $v = MN$, fig. 179. Adeoque Momentum similis Ungulæ $A\sigma\gamma$ fig. 183. (utpote illius sexdecuplum,) $\frac{16}{3}\alpha s^3 - \frac{16}{9}v^2R^2 - \frac{16}{9}s^2vR$ (sumptis α, s, v , eodem sensu,) Hoc est (sumptis $\alpha = ANB$, $c = 2s = AMB$, $v = MN = CN - CM = CN - \frac{1}{2}\alpha B = R - \frac{1}{2}\chi$, adeoque & $v^2 = R^2 - \chi R - \frac{1}{4}\chi^2 = R^2 - \chi R - \frac{1}{4}c^2 = 2R^2 - \chi R - \frac{1}{4}c^2$;) $\frac{16}{3}\alpha c^3 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{8}{9}c^2R^2 - \frac{8}{9}c^2\chi R = \frac{16}{3}\alpha c^3 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{16}{9}\chi R^3 + \frac{8}{9}c^2R^2 - \frac{8}{9}c^2\chi R$. Quod itaque est aggregatum $Omnium \alpha c^2$ rectam $A\gamma$ spectantium. Adeoque $\frac{16}{6}R^3 - \frac{16}{9}R^3 - \frac{8}{9}\chi R^2 - \frac{8}{9}c^2\chi$,

aggregatum $Omn. \frac{\alpha c^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter $A\tau$ fig. 182. figuræ altitudinem, duplam altitudinis $A\alpha$ fig. 183.) ejusdem duplum, nempe $\frac{16}{3}R^3 - \frac{16}{9}R^3 - \frac{16}{9}\chi R^2 - \frac{8}{9}c^2\chi$, est aggregatum $Omnium \frac{\alpha c^2}{2R}$, rectam Ab fig. 183. curvamque Ab fig. 177. spectantium.

Insuper Omnes s (sumptis c arithmetice proportionalibus,) sunt idem atque omnes b γ fig. 182. seu duplum $Omnium s = \gamma$ γ fig. 183. (ut § G. ostensum

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 441

ostensum est.) Sed Omn. s (= Omn. γv) sunt Omn. $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ Fig. 177,
180,

seu Omn. $\frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omn. sc , (seu ipsius Aav , vel $A\gamma v$, 182,
183.

momentum respectu AQ , vel correspondens Ungula) sunt Omn.

$\frac{c^2\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ (Idem atque Ungulae $AQqa$ vel $AQq\gamma$, aciem

habentis AQ , momentum respectu AQ , per $2R$ divisum :) Et
Omn. sc^2 ; (hoc est, momentum Ungulae Aav , vel $A\gamma v$, fig.
183. aciem habentis AQ , respectu ejusdem AQ ,) sunt Omn.

$\frac{c^3\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$ seu Omn. $\frac{c^3\chi}{2R}$. Et propterea Omn. $\frac{sc^2}{2R}$, sunt

Omn. $\frac{c^3\sqrt{4R^2 - c^2}}{4R^2}$, seu Omn. $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Sunt autem Omnes $\sqrt{4R^2 - c^2}$: seu Omnes χ ; (sumptis c Fig. 184.

arithmetice proportionalibus,) sigillatim æquales rectis γq , com-

plentibus quadrantem AaQ fig. 183. (per § G.) Quibus æqua-

les intelligantur rectæ γq quadrantem AaQ fig. 184. similiter com-

plentes. Cui adjacere intelligatur Semiparaboloidis Cubicalis com-

plementum APa , quadrato AaP D inscriptum, verticem habens

A . Cujus itaque Paraboloides Latus rectum erit $4R^2$ (quod utique

in diametrum $AD = 2R$, ductum, efficiat $8R^3$ Cubum ordinatim

in Paraboloides applicatæ $DP = 2R$;) per quod itaque $4R^2$, si

dividatur rectæ $DP = Aa = 2R$, cubus $8R^3$; habebitur Diame-

ter in Paraboloides vel Ordinatum in Complemento applicatæ $AD = aP$

$= \frac{8R^3}{4R^2} = 2R$: Et similiter, si per idem $4R^2$, dividatur, rectæ

$pd = A\gamma = c$, Cubus c^3 , habebitur diameter in Paraboloides, vel or-

dinatum applicatæ in complemento $Ad = \gamma p = \frac{c^3}{4R^2}$; & sic ubi-

que. (Sunt utique Ordinatum-applicatæ in Semiparaboloidis hujus

complemento, in diametrorum interceptarum complementi ratione

triplicata, seu ut earum Cubi.)

Cum itaque quæ quadrantem AaQ fig. 184. complent rectæ γq ,

sint ipsæ, $\chi = \sqrt{4R^2 - c^2}$: quæque Semiparaboloides Cubi-

calis complementum AaP , complent rectæ γp , sint ipsæ $\frac{c^3}{4R^2}$; quæ ex

his sunt rectangula, sunt ipsa $\frac{c^3\sqrt{4R^2 - c^2}}{4R^2}$ seu $\frac{c^3\chi}{4R^2}$. Si

Fig. 177,
184.

Si itaque intelligatur ex hujusmodi rectangulis compleri Solidum, ipsi $A \alpha Q$ Quadranti incumbens, altitudinem habens, in singulis γq rectis, æqualem respectivis rectis γp ; Solidum hoc integrum $A \alpha Q$, ejusve segmentum $A \gamma q$; erit aggregatum omnium $\frac{c^3 \sqrt{4R^2 - c^2}}{4R^2}$:

quæ vel totam $A \alpha$, vel ipsius partem $A \gamma$, spectant. Vel etiam (quod eodem recidet) si intelligatur $A \alpha P$ complementi Semiparaboloidis planum, super circuli plano, in $A \alpha$, ad angulos rectos erectum, moveri (invariato angulo) ab $A \alpha$ ad $Q \tau$, motu suo describens solidum Prismaticum seu columnare, circuli plano incumbens, duobus Trilineis ipsi $A \alpha P$ similibus & æqualibus interjectum; quod fecit Cylindri recti superficies arcui $Q q \alpha$ insistent, solidum inde abscindens $A Q q \alpha$: Solidum sic abscissum, complebunt istiusmodi rectangula. Quippe γp recta, sic mora, super γq rectam describet $q \gamma p$ rectangulum. Et sic ubique.

Idemque Solidum, alia adhuc complebunt plana, rectis κq , (ipsi $A \alpha$ parallelis, & æqualiter ab invicem distitis,) insistentia; ipsis $A \chi p$ respectivis similia & æqualia. Quippe, dum $A \alpha P$, motu jam dicto latum, ad κq pervenit; ejusdem pars $A \chi p$, eidem κq , insistent, plano solidi sic descripti, eidem κq insistenti, congruit. Et sic ubique. Adeoque, Omnia $A \chi p$ plana, totidem κq rectis insistentia totum $A Q q \alpha$ solidum complent.

Sumptis autem in $A Q (= 2R)$ rectis $A \alpha (= c)$ arithmetice proportionalibus; quæ his respondent κq , sunt totidem $\sqrt{4R^2 - c^2}$: hoc est, totidem χ . Ductisque $q \chi p$ (ipsi $Q A$ parallelis,) rectæ in complemento Paraboloidis eidem κq , seu $A \chi$, respondent χp , sunt totidem $\frac{\chi^3}{4R^2}$; (sunt utique in Paraboloidis cubicalis complemento, Ordinatum-applicata, in triplicata ratione diametrorum; puta, χp recta, ad rectam αP , ut cubus $A \chi$ ad cubum $A \alpha$; & sic ubique.) Adeoque $A \chi p$ d rectangulum, (utpote factum ex $A \alpha = \kappa q = \chi$, in $\chi p = \frac{\chi^3}{4R^2}$) est $\frac{\chi^4}{4R^2}$; hoc est (propter $\chi = \sqrt{4R^2 - c^2}$;) $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 - c^4}{4R^2}$. Adeoque $A \chi p$ paraboloidis Cubicalis complementum (utpote ad circumscriptum parallelogrammum ut 1 ad 4, per prop. 6. hujus;) est $\frac{\chi^4}{16R^2} =$

16R⁴.

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 443

$\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2}$. Et sic ubique. Adeoque omnia $A\chi p$ Tri-
linea, hoc est, Omnia $\propto q$ plana, solidum complentia, sunt Omnia
 $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2}$ eo spectantia; sive totum AQq solidum spe-
ctemus, sive ipsius portionem aliquam ut AVq .

Sunt autem (per prop. 1. hujus) si totum AQq spectemus;
(propter $AQ=2R$.) $Omn. c^2 = \frac{8}{3}R^3$; & $Omn. c^4 = \frac{16}{5}R^5$. Adeoque
 $Omn. \frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} = \frac{16R^4 - 8(\frac{8}{3}R^3) + \frac{16}{5}R^5}{16R^2} = \frac{16R^4 - \frac{64}{3}R^3 + \frac{16}{5}R^5}{16R^2} =$
 $\frac{2\frac{2}{3}R^5}{16R^2}$, & $Omn. \frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} = \frac{2\frac{2}{3}R^5}{16R^2}$. Hoc est, Omnia
 $\frac{c^3\sqrt{4R^2 - c^2}}{4R^2}$ seu Omnia $\frac{sc^2}{2R}$, rectam Aa fig. 184. vel planum
 Au fig. 183. spectantia. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2Aa$
fig. 183.) hujus duplum, $\frac{1}{15}R^3$, erit Aggregatum Omnium
 $\frac{sc^2}{2R}$ spectantium planum $A\tau v$, vel rectam $A\tau$ fig. 182. vel curvam
 $A\tau$ fig. 177.

Si vero solidi portionem AVq spectemus; ut sit rectarum
 $Au=c$, maxima $AV=2q=X$; erunt (per eandem prop. 1.
hujus) $Omn. c^2 = \frac{1}{3}X^3$; & $Omn. c^4 = \frac{1}{5}X^5$: Adeoque $Omn.$
 $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} = \frac{16XR^4 - \frac{8}{3}X^3R^2 + \frac{1}{5}X^5}{16R^2} =$
 $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} = \frac{XR^2 - \frac{1}{6}X^3 + \frac{X^5}{80R^2}}$

Hoc autem AVq solidum, ex solido $AQq = \frac{1}{15}R^3$ (modo
reperito) subductum; relinquit solidum $VqQ = \frac{1}{15}R^3 - XR^2$
 $+ \frac{1}{6}X^3 - \frac{X^5}{80R^2}$.

Huic vero VqQ solido; si addatur solidum AVq ; hoc est
(propter planum $Vq = A\gamma p = \frac{C^4}{16R^2}$, & $AV=X$.) $\frac{XC^4}{16R^2}$
(posito $A\gamma = C$.) Habetur solidum $A\gamma qQ = \frac{1}{15}R^3 - XR^2$
 $+ \frac{1}{6}X^3 + \frac{XC^4}{16R^2} - \frac{X^5}{80R^2}$: Hoc est, (propter $X^2 = 4R^2 - C^2$,
adeoque $X^4 = 16R^4 - 8C^2R^2 + C^4$;) $\frac{1}{15}R^3 - XR^2 + \frac{1}{3}XR^2 - \frac{1}{6}XC^2$
 $+ \frac{XC^4}{16R^2} - \frac{1}{5}XR^2 + \frac{1}{16}XC^2 - \frac{XC^4}{80R^2} = \frac{1}{15}R^3 - \frac{1}{16}XR^2$
LII

Fig. 177,
184.

Fig. 177,
184.

$-\frac{1}{15} \chi C^2 + \frac{\chi C^4}{20 R^2}$: Vel (restituto valore minuscularum, $A \gamma = c$,
 & $AV = \gamma q = \chi = \sqrt{4 R^2 - c^2}$: $\frac{1}{15} R^3 - \frac{1}{15} \chi R^2 - \frac{1}{15} c^2 \chi$
 $+\frac{c^4 \chi}{20 R^2}$. Quod itaque est aggregatum Omnium $\frac{c^3 \chi}{4 R^2} - \frac{c^2}{4 R^2}$ seu
 Omnium $\frac{5 c^2}{2 R}$, rectam $A \gamma$ fig. 184. vel planum $A \gamma$ fig. 183.
 spectantium. Adeoque (propter $A \tau$ fig. 182. = $2 A \alpha$ fig. 183.
 & consequenter $Ab = 2 A \gamma$;) hujus duplum, $\frac{5}{15} R^3 - \frac{1}{15} \chi R^2$
 $-\frac{1}{15} c^2 \chi + \frac{c^4 \chi}{10 R^2}$; aggregatum Omnium $\frac{5 c^2}{2 R}$, spectantium pla-
 num Ab , vel rectam Ab fig. 182. vel curvam Ab fig. 177. vel
 (propter $c^2 = 4 R^2 - \chi^2$;) $\frac{1}{15} R^3 - \frac{1}{3} \chi^3 + \frac{\chi^5}{10 R^2}$.

Fig. 177. Cum itaque sint, quæ totam $A \tau$ spectant, $Omn. \frac{5 c^2}{2 R} = \frac{4}{3} R^2 P$

$-\frac{1}{9} R^3$, (ut modo ostensum erat;) & $Omn. \frac{5 c^2}{2 R} = \frac{1}{3} R^3$, (ut

jam ostensum est:) Erunt $Omn. \frac{4}{3} R^2 P - \frac{1}{9} R^3 = \frac{5}{9} R^3$.

Quod itaque (per modo demonstrata) est semiquadrantis Ungulæ
 superficialis, toti $A \tau$ fig. 177. insistentis, aciem habentis AT ,
 momentum respectu $A \alpha$; Aut etiam (propter Altitudinum & Di-
 stantiarum reciprocatationem,) aciem habentis $A \alpha$, momentum re-
 spectu TA .

Hoc itaque Momentum, per Ungulæ $A \tau$, aciem habentis TA ,
 magnitudinem $\frac{4}{3} R^2$ (§ D, F. ostensam,) divisum; exhibet ejusdem
 Centri gravitatis ab $A \alpha$ distantiam, $\frac{1}{2} P - \frac{1}{15} R$. (Eademque erit
 inde distantia centri gravitatis correspondentis superficiæ conversione
 vel semiconversione circa TA factæ; eadem utique quæ superficialis
 Ungulæ: Momentorum vero ratio, eadem quæ magnitudinum;
 nempe ad illud Ungulæ, ut P vel $\frac{1}{2} P$ ad R . Et sic alibi; nempe
 quoties axis libræ est, ad axem conversionis, ad angulos rectos:
 Ut sæpius insinuatum est:) Adeoque ejusdem à $T \tau$ distantia, est
 $\frac{1}{15} R$; Ejusque propterea, respectu $T \tau$, momentum, $\frac{4}{15} R^3$.

Quod itidem est Ungulæ $A \tau$, aciem habentis $T \tau$, momentum
 respectu TA . Hoc itaque per magnitudinem (§ G. traditam) $\frac{1}{3} R^2$,
 divisum; exhibet hujus, à TA , distantiam centri gravitatis $\frac{1}{15} R$:
 Adeoque

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 445

Adeoque à τa , $\frac{2}{3}R$; ipsiusque respectu τa momentum, $\frac{2}{3}R^2$. Fig. 177.
Atque hoc itidem est Ungulæ $A \tau$, aciem habentis τa momentum,
respectu $T \tau$. Quod itaque per hujus magnitudinem $\frac{1}{3}R^2$, divi-
sum; exhibet centri gravitatis à $T \tau$ distantiam, item $\frac{2}{3}R$: Adeo-
que ab $A a$, $\frac{1}{2}P - \frac{2}{3}R$; ejusque respectu $A a$ momentum $\frac{1}{3}R^2P$
 $-\frac{2}{3}R^3$.

Idemque (quod modo dictum est) momentum $\frac{2}{3}R^2P - \frac{2}{3}R^3$, per
Ungulæ $A \tau$ aciem habentis $A a$, magnitudinem, $2 R P - \frac{1}{3}R^2$,
(§ G. ostensum,) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri grav. a TA ,
 $\frac{30P - 32R}{45P - 120R} R$: Adeoque à τa , $\frac{60P - 208R}{45P - 120R} R$. Et propterea
ejusdem respectu τa Momentum $\frac{2}{3}R^2P - \frac{2}{3}R^3$.

Sed & hoc ipsum (propter Altitudinum & Distantiarum recipro-
cationem) est etiam Ungulæ $A \tau$, aciem habentis τa , momentum
respectu $A a$. Per hujus itaque magnitudinem $\frac{1}{3}R^2$ (§ D, E. inven-
tam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis ab $A a$,
 $\frac{1}{2}P - \frac{2}{3}R$. Ut modo dictum est.

Similiter; Cum quæ portionem Ab spectant, sint $Omn. \frac{ac^2}{2R} =$
 $\frac{ac^3}{3R} - \frac{2}{9}R^3 - \frac{1}{9}c^2R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$; & $Omn. \frac{sc^2}{2R} = \frac{1}{3}R^3 -$
 $\frac{1}{3}c^2R^2 - \frac{2}{9}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$; (ut modo ostensum est:) Erunt $Omn.$
 $\frac{a+s}{2R}c^2 = \frac{ac^3}{3R} - \frac{6}{45}R^3 - \frac{1}{45}c^2R^2 - \frac{1}{45}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2} =$
 $\frac{30ac^3R - 128R^3 - 64\chi R^2 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2}$. Quod itaque est

Momentum Ungulæ Ab , aciem habentis TA , respectu $A a$; vel
etiam (ob altitudinum & distantiarum reciprocationem) aciem ha-
bentis $A a$, Momentum respectu TA .

Hoc itaque Momentum; per Ungulæ Ab , aciem habentis TA ,
magnitudinem $\frac{2}{3}cv$ (§ D, E. inventam) divisum; exhibet ejusdem
ab $A a$ distantiam centri gravitatis $\frac{ac^2}{2vR} - \frac{32R^3}{15cv} + \frac{16\chi R^2}{15cv}$

$+ \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c^3\chi}{20vR^2}$; vel (propter $2vR = c^2$) $a - \frac{32R^3}{15cv} +$
 $\frac{16\chi R^2}{15cv} + \frac{2c\chi}{15v} + \frac{3c\chi}{10R}$: Hoc est, $\frac{30ac^3R - 128R^3 - 64\chi R^2 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{60cvR^2} = 30c^3R. 1.$
LII 2

446 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP.V.*

Fig. 177. Idemque Momentum, per Ungulæ Ab, aciem habentis A α , magnitudinem, $2ac - \frac{1}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{1}{3}R^2 + \frac{2}{3}\chi R - \frac{2}{3}v\chi$ (§ G. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à T A,

$$\frac{30ac^3R - 128R^3 + 64\chi R^2 - 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =) 30c^2\chi R.}$$

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^3 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 - 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

Adeoque à $\tau\alpha$,

$$\frac{180acvR^2 - 480vR^4 + 240v\chi R^3 + 30c^2v\chi R - 30ac^3R + 128R^3 - 64\chi R^2 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 - 240\chi R^3 + 30c^2\chi R,}$$

vel (propter $2vR = c^2$),

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^2 - 128R^3}{180acR^2 - 480R^4 - 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

Et consequenter, ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^3 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2.}$$

Quod etiam (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est momentum Ungulæ Ab aciem habentis $\tau\alpha$, respectu A α ; Adeoque (momentum illud per hujus magnitudinem dividendo; hoc est, per $4cR - \frac{2}{3}cv$, ut § D, F. ostenditur,) hujus distantia centri gravitatis ab A α , est

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^3 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =) 30c^3R.}$$

Similiter, ejusdem Ungulæ Ab aciem habentis A α , momentum respectu bV, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^2 - 128R^3}{90R^2.}$$

Quod itaque (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Momentum Ungulæ Ab aciem habentis bV, respectu A α .

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 447

A α . Adeoque (per magnitudinem $\frac{4}{3}cv$, § D, E. inventam, dividendo;) erit hujus distantia centri gravitatis ab A α ,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^2 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 - 128R^5}{120cvR^2} = 60c^3R.$$

Supereft tandem, ut superficialis Ungulæ A τ vel A b, aciem habentis A α , momentum respectu A α investigemus.

Divisâ itaque, ut prius, A τ in minutas partes æquales: Adeoque sumptis A b = 2 c fig. 177, 182. arithmetice proportionalibus: Erit cujusque b puncti, seu partis minutæ, ab A α distantia, b B v fig. 177. hoc est B b v fig. 182. Adeoque omnes rectæ punctis b insistentes, Ungulam complentes, sunt totidem B b v rectæ, trilineum A α v fig. 182. complentes; hoc est, bis Omnes α v fig. 183. hoc est, totidem α - $\frac{1}{2}s$, subtenlis c arithmetice proportionalibus respondententes. Quæ itidem in α - $\frac{1}{2}s$ distantiam ductæ, exhibent earum respectu A α momenta, totidem a^2 - $\frac{1}{2}as$ - s^2 .

Sunt autem, Omnia a^2 ; seu omnia quadrata γ o fig. 183. Duplum Semiquadrantalæ Ungulæ, seu momenti trilinei A α α , seu A α γ , (prout vel totum vel pars consideratur;) respectu A α fig. 183. Hoc est (propter figuras similes A α α fig. 183. & α α γ fig. 170.) Sexdecuplum momenti trilinei α α γ vel α α γ , fig. 170. respectu rectæ α γ , (nempe in triplicata ratione laterum Homologorum, A α = 2 R, ad α γ = R.)

Est autem, Momentum Trilinei α α γ , fig. 170. hoc est, α ξ α γ - ξ α α , (respectu α γ ,) $\frac{1}{2}a^2s$, minus, - $cR^2 + avR$; (per § O. prop. 19.) seu $\frac{1}{2}a^2s + cR^2 - avR$, hoc est $\frac{1}{2}a^2s - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}R^2 - avR$, (posito $a = \alpha$ ξ fig. 170. pro arcu AN fig. 179. semisse arcus AB; adeoque $s = AM$, & $v = MN = CN - \frac{1}{2}\alpha B = R - \frac{1}{2}\chi$;) Adeoque Momentum trilinei A α γ fig. 183. (utpote istius Octuplum,) $4a^2s + 8aR^2 - 8sR^2 - 8avR$, (sumptis a , s , v , eodem sensu;) Hoc est, (posito $a = AB$, = 2 AN; & $c = 2s$; & $R = \frac{1}{2}\chi = v$;) $\frac{1}{2}a^2c + 4aR^2 - 4cR^2 - 4aR^2 - 2a\chi R = \frac{1}{2}a^2c - 4cR^2 - 2a\chi R$: Adeoque Omnia a^2 eo spectantia (utpote momenti duplum) $a^2c - 8cR^2 + 4a\chi R$; hoc est Omnia quadrata γ o fig. 183. Adeoque (propter A τ fig. 182. = 2 A α fig. 183.) Omnia quadrata B b fig. 182. seu Omnia a^2 , (eo spectantia) = $2a^2c - 16cR^2 + 8a\chi R$. Et propterea, si totam A τ spectemus; (propter $a = \frac{1}{2}P$, $c = 2R$, & $\chi = 0$;) erit $RP^2 - 32R^3 = Omn. a^2$.

Item,

I.
Fig. 177,
182,
183,
170.

448 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 177, Item, omnia s^2 , hoc est, omnia quadrata $b v$ fig. 182. seu, bis
182, Omnia quadrata γv fig. 183. Idem sunt (propter $\gamma v = b v =$
183, $c \sqrt{4R^2 - c^2}$) atque totidem $\frac{4c^2 R^2 - c^4}{4R^2}$. Sunt autem (sum-
170. pris c arithmetice proportionalibus, usque ad maximam $C = AB$.)
 $Omn. c^2 = \frac{1}{3} C^3$; & $Omn. c^4 = \frac{1}{5} C^5$ (per prop. 1. hujus.) Ergo
 $Cmn. \frac{4c^2 R^2 - c^4}{4R^2} = Omn. c^2 - \frac{c^4}{4R^2} = \frac{1}{3} C^3 - \frac{C^5}{20R^2}$: Nem-
pe Omnia quadrata γv , seu $Omn. s^2$: fig. 183. Ergo (propter
 $A \tau = 2 A a$.) Omnia quadrata $b v$ fig. 182. $Omn. s^2 = \frac{1}{3} C^3 -$
 $\frac{C^5}{10R^2}$. Et propterea, si totam $A \tau$ spectemus, (propter $C = 2R$.)
 $Omn. s^2 = \frac{1}{3} R^3 - \frac{1}{5} R^3 = \frac{2}{15} R^3$.

Item, (propter $s = \frac{c \sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$.) Omnia as , sunt toti-

dem $\frac{ac \sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$: Adeoque (propter $o \gamma = a$, & $q \gamma = \sqrt{4R^2 - c^2}$: & $A \gamma = c$.) Omnia as , hoc est, Omnia Rectan-
gula $o \gamma v$ fig. 183. sunt Momentum, respectu $A d$, omnium $q \gamma v$
rectangulorum, (solidive ex his conflati,) per $2R$ divisum. Hoc
est (propter figuras similes $A a \tau$ fig. 183. & $a \tau \gamma$ seu $d \tau d$, fig.
170. item $A Q q$ fig. 183. & $C D E a$ fig. 169. rationemque la-
terum homologorum $A a$ ad $a \tau$, ut 2 ad 1;) Sexdecuplum Mo-
menti (per $2R$ divisi) solidi $a o \gamma$ vel $d e g$ fig. 170. altitudines ha-
bentis respectivis $E \Sigma$ fig. 169. aequales, respectu rectarum $a d$ vel
 $d c$.

Est autem portio solidi hujusmodi $b \tau \beta$, seu $e \tau \epsilon$, $= \frac{1}{4} a^2 R$
 $- \frac{1}{4} s^2 R$, per §.K. prop. 18. (posito $\tau \epsilon = a$;) Hoc est (posito
 $e g$ seu $e d = \xi$, adeoque $a = \frac{1}{4} P - \xi$;) $\frac{1}{64} P^2 R - \frac{1}{8} \xi P R$
 $- \frac{1}{4} \xi^2 R - \frac{1}{4} s^2 R$: Adeoque $d \tau d$ (propter $\xi = 0$, & $s = R$.)
 $= \frac{1}{64} P^2 R - \frac{1}{4} R^3$. Et propterea $d e d$ ($d \tau d - e \tau \epsilon$) $= \frac{1}{8} \xi P R$
 $- \frac{1}{4} \xi^2 R + \frac{1}{4} s^2 R - \frac{1}{4} R^3$. Unde si subducatur portio $e d g$, hoc est,
factum ex $e g = \xi$, in $E \Sigma a$ (fig. 169.) hoc est, (per §.F. prop.
15.) in $\frac{1}{2} a R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} b$ (posito $a = \tau \epsilon = a E$, & $b = a \Sigma$
 $= e d$;) hoc est (posito $a = \frac{1}{4} P - \xi$, & $b = R - x$;) in
 $\frac{1}{8} P R - \frac{1}{2} \xi R - \frac{1}{2} s R + \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} x$; hoc est, in $\frac{1}{8} P R - \frac{1}{2} \xi R - \frac{1}{2} s x$;
Nempe, $\frac{1}{8} \xi P R - \frac{1}{2} \xi^2 R - \frac{1}{2} \xi s x$: Relinquitur portio $d e g = \frac{1}{4} \xi^2 R$
 $+ \frac{1}{2} \xi s x + \frac{1}{4} s^2 R - \frac{1}{4} R^3$.

Et portio solidi $b \tau \beta$ seu $e \tau \epsilon$, respectu τa , momentum est,
 $\frac{1}{4} a^2 R^2$

PROP. XXII. De Calcno Centri Gravitatis. 449

$\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{6}a^2s^2R^2 - \frac{1}{2}bR^3 - \frac{1}{2}s^2hR$, per § Q. prop. 18. (posito Fig. 177,
 $\tau = a$, & $a\sigma = h$;) Hoc est, (positis $a = \frac{1}{4}P - \xi$, & $h = R$ 182,
 $-x$;) $\frac{1}{4}P^2R^2 - \frac{1}{6}P^2R^2 - \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}P^2R^2 - \frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{2}xR^3 - \frac{1}{2}s^2R^2$ 183,
 $-\frac{1}{2}s^2xR$; seu $\frac{1}{4}P^2R^2 - \frac{1}{6}P^2R^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}P^2R^2 - \frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{2}xR^3$ 170.

$-\frac{1}{2}s^2xR$. Adeoque Momentum solidi $d\tau d$ (propter $\xi = 0$, &
 $x = 0$, & $s = R$;) $\frac{1}{4}P^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{2}R^4$, seu $\frac{1}{4}P^2R^2 - \frac{1}{2}R^4$.
 Et propterea, Momentum portionis $d e \delta$ (respectu ejusdem τa)
 est $\frac{1}{8}\xi P^2R^2 - \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{1}{2}xR^3 - \frac{1}{2}s^2xR$. Unde si aufe-
 ratur momentum portionis $e \delta g$; hoc est, iactum ex $eg = \xi$, in
 momentum segmenti semicirculi $E \Sigma a$ (fig. 169.) respectu ipsius τa ;
 hoc est (per § L. prop. 15.) in $\frac{1}{2}aK^2 - \frac{1}{2}sK^2 - \frac{1}{2}hR - \frac{1}{2}s^3$ (posito
 $\tau = a$, & $a\sigma = h$;) hoc est, (posito $a = \frac{1}{4}P - \xi$, & $h = R$
 $-x$;) in $\frac{1}{8}P^2R^2 - \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sK^2 - \frac{1}{2}xR^3 - \frac{1}{2}s^3$, seu, in $\frac{1}{8}P^2R^2$
 $-\frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}s^3$; Nempe $\frac{1}{8}\xi^2K^2P - \frac{1}{2}\xi^2K^2 - \frac{1}{2}\xi s x R - \frac{1}{2}\xi s^3$:
 Relinquitur portionis $d e g$, Momentum (respectu ejusdem τa)
 $\frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{4}s^2K^2 - \frac{1}{2}xR^3 - \frac{1}{2}s^2xR + \frac{1}{2}\xi s x R - \frac{1}{2}\xi s^3$.

Hoc itaque, per magnitudinem, (modo inventam,) divisum; Fig. 170.
 exhibet ipsius $d e g$ (portionis solidi) distantiam centri gravitatis à τa ,
 $9\xi^2R^2 - 9R^4 - 9s^2R^2 - 8xR^3 - 4s^2xR - 18\xi s x R$
 $+ 12\xi s^3$

$$= R - \frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R^2 + 18\xi s x - 9s^2R - 9R^3} : \text{Adeoque à } c d \cdot$$

$\frac{8xR^3 - 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R^2 + 18\xi s x - 9s^2R - 9R^3}$ Quod in magnitudinem du-
 ctum, exhibet solidi $d e g$ momentum respectu $c d$, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}s^2xR$
 $-\frac{1}{3}\xi s^3$ (positis, $\xi = DE$ fig. 169. = $eg = 0\gamma = a\xi$ fig. 170.
 & $x = C\Sigma = \xi 0 = a\gamma$; & $s = E\Sigma$;) Vel (substituto σ pro s ,
 qui sit sinus arcus $B a$ fig. 169. = $\beta \delta$ fig. 170.) momentum similis
 solidi $a 0\gamma$ respectu $a d$, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}\sigma^2xR - \frac{1}{3}\xi\sigma^3$.

Et consequenter, similis solidi $A 0\gamma$ fig. 183. (ex ductu recta- Fig. 183.
 rum 0γ in γq respective) momentum respectu $A d$, (utpote prio-
 ris sexdecuplum, propter tum singulas dimensiones, tum distantiam,
 ut 2 ad 1,) $\frac{1}{9}xR^3 + \frac{1}{9}\sigma^2xR - \frac{1}{3}\xi\sigma^3$: Hoc est (posito
 $a = 2\xi$, propter arcum semicirculi duplum respectivi arcus in qua-
 drante; & $c = 2x$, propter chordam arcus a , duplam sinu recti
 dimidii arcus; & $\chi = 2\sigma$, propter subtensam complementi arcus
 ad semicirculum, duplum sinus complementi dimidii arcus ad qua-
 drantem;) $\frac{1}{9}cR^3 - \frac{1}{9}\chi^2cR - \frac{1}{3}a\chi^3$: Hoc itaque per 2 R divisum;
 hec

Fig. 177, hoc est, $\frac{1}{9}cR^2 + \frac{1}{9}c\chi^2 - \frac{a\chi^3}{6R}$; exhibet (ut jam ostensum est) aggregatum omnium as , seu rectangulorum ov fig. 183. adeoque (propter $A\tau = 2Aa$) hujus duplum, est aggregatum omnium as , seu rectangulorum Bv fig. 182. Et propterea hujus duplum, seu

182,
183.

illius quadruplum, $\frac{2}{9}cR^2 + \frac{2}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R} = \text{Omn. } 2as$: fig. 182. Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus (propter $c=2R$, & $\chi=0$) erunt (quæ eo spectant) $\text{Omn. } 2as = \frac{6}{9}R^3$.

Fig. 177. Ergo (propter $\text{Omn. } a^2 = 2a^2c - 16cR^2 - 8a\chi R$; & $\text{Omn. } s^2 = \frac{2}{3}c^3 - \frac{c^2}{10R^2}$; & $\text{Omn. } 2as = \frac{2}{9}cR^2 + \frac{2}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R}$; ut jam ostensum est:) $\text{Omn. } a^2 + 2as + s^2 = 2a^2c - \frac{2}{3}c^3 - \frac{1}{9}cR^2 - \frac{2}{9}c\chi^2 + 8a\chi R - \frac{2a\chi^3}{3R} - \frac{c^2}{10R^2}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ Ab fig. 177. aciem habentis Aa , respectu Aa : Hujusque Duplum (ut sæpius dictum) Superficie semiconversione factæ momentum respectu axis conversionis Aa . Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus, (propter $a=\frac{1}{2}P$, & $c=2R$, & $\chi=0$) erunt $\text{Omn. } a^2 + s^2 + 2as = P^2R + \frac{1}{3}R^3 - \frac{2}{9}R^3 - \frac{1}{9}R^3 = P^2R - \frac{1}{9}R^3$. Quod itaque est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis Aa , momentum respectu Aa : Hujusque Duplum, est correspondentis superficie semiconversione circa Aa descriptæ momentum respectu ejusdem Aa .

Momento itaque per magnitudinem (§ G. inventam,) diviso; habetur Ungulæ Ab , aciem habentis Aa , distantia centri gravitatis ab ipsa Aa ,

$$\frac{180acR^2 - 60c^3R^2 - 1120cR^4 + 40c\chi^2R^2 + 720a\chi R^3 - 60a\chi^3R - 9c^2}{-9c^2}$$

$$\frac{180acR^2 - 48cR^4 + 240\chi R^4 - (60v\chi R^2) = 30c^2\chi R;}{-9c^2}$$

& superficie semiconversione circa Aa factæ, distantia centri gravitatis a conversionis axe Aa , erit ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P ; ut alibi: Nempe quoties idem est Axis Conversionis & Axis Libræ.

Totiusque $A\tau$ Ungulæ, aciem eandem Aa habentis, distantia ab Aa , similiter habebitur, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; (& superficie semiconversione factæ, ad hanc Ungulæ, ut $4R$ ad P ;) Ungulæque propterea distantia centri gravitatis à $T\tau$, $\frac{1}{2}P - \frac{45P^2}{45P^2}$

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 451

$$\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R} = \frac{1024R^2 - 120R^2P}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R} R \text{ Et pro- Fig. 177.}$$

pterea, ejusdem respectu T_τ momentum $\frac{1024R^3 - 120R^2P}{45} =$
 $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$. Quod itidem est (propter altitudinum & di-
 stantiarum reciprocationem) Momentum Ungulæ A_τ , aciem habentis
 T_τ , respectu A_α . Adeoque, per hujus magnitudinem $\frac{1024}{45}R^3$
 (per § G.) divisum; exhibet hujus, ab A_α , distantiam centri gravi-
 tatis, $\frac{1024}{45}R - \frac{8}{3}P$; & ab acie sua T_τ , $P - \frac{8}{45}R$; & propterea mo-
 mentum respectu aciei suæ T_τ , $\frac{1024}{45}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$.

His ita peractis; ea quæ jam exhibuimus (§ G, H, I,) divisâ K.
 A_τ curvâ in partes æquales; adeoque sumptis subtensis $AB = c$, Fig. 177.
 arithmetice proportionalibus; non erit inutile, aliquatenus prosequi
 secundum alteram methodum (qua § B, C, D, E, uli sumus,) divisâ
 A_α in partes æquales; adeoque sumptis sinibus versis $AV = v$ arith-
 metice proportionalibus.

Si itaque intelligatur recta A_α fig. 177. in exiguas partes æquales
 numero infinitas dividi; quarum una intelligatur $VO = B$: Quæ
 his respondent b g tangentæ, seu (quod in partibus infinite exiguis
 pro eodem reputabitur) b x curvæ, sunt ut totidem $V\omega = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu
 $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, (per § B, C.) Harumque ab A_α distantix, sunt $bV = a + s$,
 (sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentes,) ipsam
 A_τ semicycloidem complentes, (vel etiam, tum figuram Arcuum
 A_τ fig. 170, 185. tum semicirculum AB fig. 169, 185. com-
 plentes; quippe illam complent omnes a; semicirculum, omnes s.)
 Adeoque particularum curvæ A_τ fig. 177. momenta respectu A_α ,
 sunt ut totidem rectangula b V ω fig. 177. hoc est totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}}$
 $B\sqrt{2R}$; seu totidem $bV\omega + BV\alpha$ fig. 185. hoc est, totidem $\frac{aB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$
 $+ \frac{sB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$; vel (omissa B, quæ nonnisi infinitesimam partem ipsius
 A_α significat, seu rectarum crassitiem planum complentium,) toti-
 dem $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R} + \frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$.

M m m

Et

Fig. 177. Et quidem, Aggregatum *omnium* $\frac{s}{\sqrt{v}} \sqrt{2R}$ facile habetur: Cum

enim sit $s^2 = vh$, adeoque $s = \sqrt{vh}$, erit $\frac{s}{\sqrt{v}} = \sqrt{h}$; & *Omnes*

$\frac{s}{\sqrt{v}} \sqrt{2R}$, idem atque *Omnes* $\sqrt{2hR}$, hoc est ipsæ πV , fig. 179.

Adeoque *Omnes* $s \sqrt{\frac{2R}{v}}$ curvam Ab fig. 177. spectantes æquantur ipsi portioni parabolæ $A \pi V$ fig. 179. hoc est, $\frac{2}{3} R^2 - \frac{2}{3} h \sqrt{2hR}$, per prop. 6. hujus. Quod (propter $2hR = \chi^2$, & $h = \frac{\chi^2}{2R}$) tan-

tundem est atque $\frac{2}{3} R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, in §G. repertum; seu *Omnes* s , (vel *Omnes* $\frac{c\sqrt{4R^2 - c^2}}{2R}$), sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus.

Nempe $\pi AV \pi$ fig. 179. = $Ab \pi$ fig. 182. (similiter divisæ $A \tau$, $A \tau$, fig. 177, 182. in punctis b ;) Hoc est, *Omnes* s , sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus; idem atque *Omnes* $s \sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis $AV = v$ arithmetice proportionalibus. Utrumvis enim est ipsius Ab momentum, quantum ad distantias BV .

At, *Omnia* $\frac{a}{\sqrt{v}} \sqrt{2R}$, seu *Omnia* $a \sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; puta solidum $AbV\omega$ fig. 185. (ex rectangulis $bV\omega$ conflatum) per B , hoc est aO , vel VO , divisum; tantundem est atque planum AbB fig. 182. seu *Omnia* a , sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus: (Utrumvis utique est momentum Ab fig. 177. quantum ad distantias bB .) Adeoque cum horum aggregatum deprehensum est (§G.) $= 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; tantundem erit & Aggregatum *Omnia* $a \sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis $Ab = v$; arithmetice proportionalibus. Quod quum ibidem deprehensum sit, non opus erit ut hic solícite investigemus. Atque hinc reliqua deducuntur, ut ad §G.

Sed & idem solidum $AbV\omega$ fig. 185. (quod complent omnia $bV\omega$ rectangula, seu *Omnia* $aB \sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus;

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 453

portionalibus;) complent etiam alia plana rectis xr (æqualiter ab invicem distantibus) trilineum AbV complentibus insistentia, hoc est, totidem rectis, $qr - qx$. Sunt autem quæ singulis bK , seu qr insunt plana solidum complentia, respectivis AV æqualia; (ut ex constructione figuræ patet, si intelligatur $A\alpha O\omega$ planum, super plano Ara ad angulos rectos erectum, motu suo versus τ , solidum describere.) Adeoque omnia qr plana; tantundem sunt atque, $bV = a$, in planum AV ; hoc est, in duplum rectanguli AV ; hoc est (per § B, C.) in $2v \times B \sqrt{\frac{2R}{v}} = 2B \sqrt{2vR}$;

hoc est $2AV \times B \sqrt{\frac{2R}{v}}$ (posito $AK = A$, & $AV = V$;) seu $2A \times B \sqrt{2vR}$; seu bVp rectangulum, in altitudinem $2B$ ductum; vel Duplum rectanguli bVp , in B ductum. Et, eadem ratione, Omnia xq plana; sunt totidem $A\omega$ planis æqualia; hoc est, totidem $2v \times B \sqrt{\frac{2R}{v}}$; seu $2B \sqrt{2vR}$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) usque ad maximum $V = bK$. Adeoque $2AB \sqrt{2vR}$, demptis $Omn. 2B \sqrt{2vR}$, sumptis a arithmetice proportionalibus; idem est atque $Omn. aB \sqrt{\frac{2R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus. (Nempe idem solidum AbV ;) Et (dividendo per B ;) $2A \sqrt{2vR} - Omn. 2 \sqrt{2vR}$; sumptis a arithmetice proportionalibus; idem atque $Omn. a \sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; seu $Omn. a$, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus; hoc est, Trilineum AbB fig. 182.

Potestque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis ipsi AbV parallelis conflatum. Et sic alibi.

Similiter; Divisâ, ut prius, $A\alpha$ in minutas partes æquales; cum quæ his respondent particularum bx momenta respectu $A\alpha$, fig. 177. seu Ungulæ (aciem habentis $A\alpha$) particularæ, sint (ut dictum est) ut totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}} \sqrt{2R}$, seu $a \sqrt{\frac{2R}{v}} + s \sqrt{\frac{2R}{v}}$; sintque ipsarum à TA distantia, $AV = v$ respectiva; erit omnium respectu TA momentum, totidem $a \sqrt{2vR} + s \sqrt{2vR}$; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Et quidem aggregatum $Omn. s \sqrt{2vR}$, (hoc est, omnium rectangulorum

L.

454 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

gulorum BVp fig. 185.) facile habetur. Cum enim sint $Cmn. s \sqrt{\frac{2}{v} R}$,
 Fig. 179. idem atque totidem πV fig. 179. erunt $Omn. s \sqrt{2vR}$, hoc est $Omn.$
 $v s \sqrt{\frac{2R}{v}}$; vel etiam (propter $s = \sqrt{2h}$.) $Cmn. v \sqrt{2hR}$; idem atque
 earundem πV momenta respectu ΠA rectæ. Est autem (per
 prop. 1. hujus, (semiparabolæ $\alpha \Pi A$ distantia centri gravitatis ab $\alpha \tau$,
 $\frac{2}{3} \alpha A = \frac{2}{3} R$; adeoque ab AT , $\frac{2}{3} R$; & (propter magnitudinem
 $\frac{2}{3} R^2$) momentum ejus respectu AT , $\frac{1}{3} \frac{2}{3} R^3$. Et semiparabolæ
 $\alpha \pi V$, distantia centri gravitatis ab $\alpha \tau$, $\frac{2}{3} \alpha V = \frac{2}{3} h$; adeoque ab
 AT , $2R - \frac{2}{3} h$; & (propter magnitudinem $\frac{2}{3} h \sqrt{2hR}$.) momen-
 tum respectu AT , $\frac{2}{3} h R \sqrt{2hR} - \frac{2}{3} h^2 \sqrt{2hR}$. Ergo (subductione
 factâ) Momentum portionis $\Pi AV \pi$ respectu TA , est $\frac{1}{3} \frac{2}{3} R^3$
 $- \frac{2}{3} h R \sqrt{2hR} + \frac{2}{3} h^2 \sqrt{2hR}$. Hoc est (propter $2hR = \chi^2$, &
 $\sqrt{2hR} = \chi$, & $h = \frac{\chi^2}{2R}$.) $\frac{1}{3} \frac{2}{3} R^3 - \frac{2}{3} \chi^3 + \frac{\chi^3}{10R^2}$. Tantundem
 scilicet atque $Omn. \frac{sc^2}{2R}$, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportio-
 nalibus; ut § H. ostensum est.

Fig. 177, Suntque $Omn. a \sqrt{2vR}$, sumptis v arithmetice proportionalibus;
 185. (hoc est, omnia rectangula b V p fig. 185.) idem atque $Omn.$
 $\frac{ac^2}{2R}$, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus. (Utrumvis
 utique est Ungulæ Ab fig. 177. quantum ad altitudines bB , momen-
 tum respectu TA ; unguæ Ab aciem habentis TA momentum
 quantum ad distantias bB .) Quod § H.prehendimus $\frac{ac^3}{3R} - \frac{1}{3} \frac{2}{3} R^3$
 $+ \frac{1}{3} \frac{2}{3} \chi R^2 + \frac{2}{3} c^2 \chi$. Atque hinc reliqua deducuntur ut ad § H.

Sed & idem solidum $AbVp$ fig. 185. (quod complent omnia
 bVp rectangula, seu omnia $a \sqrt{2vR}$, sumptis v arithmetice pro-
 portionalibus;) complent. etiam alia plana rectis xr insistentia;
 hoc est (ut ex constructione patebit, si intelligatur $A \alpha P$ semipara-
 bola, ad angulos rectos erecta, & super $A \alpha \tau$ plano mota, solidum
 describere,) totidem semiparabolæ AVp , demptis omnibus $A \alpha p$,
 quarum altitudines $A \alpha = qx$ sint sinus versi arcuum arithmetice
 proportionalium: Hoc est (posito $AK = bV = A$, & $AV = V$.)
 $\frac{2}{3} A \sqrt{2V^3R}$ demptis omnibus $\frac{2}{3} \sqrt{2v^3R}$, sumptis a arithmetice pro-
 portionalibus. Quod itaque tantundem etiam valet atque $Omn.$
 $\frac{ac^2}{2R}$, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus.

Po-

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 455

Potestque idem solidum (si opus est) considerari tanquam ex planis ipsi $A b V$ parallelis conflatum: Ut ante monitum est.

Similiter; cum, divisâ ut prius $A a$ in minutas partes æquales, $M.$ sint, quæ his respondent, curvæ $A \tau$ particulæ $b x$, ut totidem $B \sqrt{\frac{2R}{v}}$ Fig. 177, $\frac{2R}{v}$, ut ostensum est; erit Ungulæ aciem habentis $A a$ momentum 185.

respectu $A a$, ut Omnia, $B \sqrt{\frac{2R}{v}}$, in respectiva quadrata $b V$, hoc est, in respectiva $a^2 - 2as - v^2$, sumptis v arithmetice proportionalibus. Hoc est (omisso B , ut prius,) $Omn. a^2 \sqrt{\frac{2R}{v}} - 2as \sqrt{\frac{2R}{v}} + s^2 \sqrt{\frac{2R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Et quidem Aggregatum *Omnium* $s^2 \sqrt{\frac{2R}{v}}$, hoc est (propter $s^2 = v h$), $Omn. s \sqrt{2 b R}$; vel $Omn. v b \sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $Omn. b \sqrt{2 v R}$; facile habetur. Est utique Semiparabolæ $A p V$ fig. 178. Momentum respectu $P a$ seu τa . Hoc est (propter distantiam centri gravitatis a $T A$, $\frac{1}{3} A V = \frac{1}{3} v$; adeoque a τa , $2 R - \frac{1}{3} v$; & magnitudinem $\frac{2}{3} v \sqrt{2 v R}$; per prop. 6. hujus;) $\frac{2}{3} v R \sqrt{2 v R} - \frac{2}{3} v^2 \sqrt{2 v R}$. Hoc est (propter $2 v R = c^2$, & $\sqrt{2 v R} = c$, & $v = \frac{c^2}{2 R}$), $\frac{2}{3} c^3 - \frac{c^3}{10 R^2}$. Tantundem scilicet atque $Omn. s^2$, sumptis $A b = 2 c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. repertum est.

Suntque $Omn. a s \sqrt{\frac{2R}{v}}$; hoc est (propter $s = \sqrt{v h}$;) $Omn. a \sqrt{2 b R}$, idem atque solidum ex ductu rectarum $b V$ fig. 185. (figuram Arcuum complementum) in respectivas πV fig. 179, 185. Adeoque $Omn. 2 a s \sqrt{\frac{2R}{v}}$; est istiusmodi solidi Duplum. Estque tantundem atque $Omn. 2 a s$, sumptis $A b = 2 c$ arithmetice proportionalibus. Quod § I. repertum est.

Potestque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis quæ rectis $x r$ insistant conflatum: Aut etiam ex planis ipsi $A b V$ parallelis; ut in præcedentibus monitum est, atque alibi etiam intelligendum erit. Et

Fig. 177, Et $\text{Omn. } a^2 \sqrt{\frac{2R}{v}}$, (sumptis v arithmetice proportionalibus),
185.

tantundem est atque $\text{Omn. } a^2$, sumptis $A b = 2 c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. itidem repertum est. (Est autem, idem atque solidum ex ductu quadratorum rectarum $b v$ fig. 185. in respectivas $V a$, per $V O$ divisas.) Atque hinc reliqua habentur quæ § I. traduntur.

Quodque, de eodem solido aliis adhuc planis (puta quæ rectis $x r$ insistant, vel ipsi $A b v$ sint parallela,) constando, in præcedentibus monitum est; etiam hic locum habet.

N.

Exhibuimus itaque non modo rectas Cycloidem (Primariam intellige) tangentes; sed & ipsius Curvæ Semicycloidis, ejusque partium longitudinem, (exhibendo scilicet curvis illis æquales rectas,) ejusque in data ratione divisionem: Sed & curvæ semicycloidis, partiumque ipsius, centra gravitatis, (per horum scilicet à duobus saltem in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantiam;) earumque momenta respectu expositarum aliquot rectarum, (quæ ad alias item rectas facile transferentur:) Ungularum item superficialium, & Superficierum conversione factarum, momentis illis respondentium, tum magnitudines, tum momenta, ipsaque Centra gravitatis; exhibitis scilicet horum distantis à duobus saltem planis, plano Cycloidis ad angulos rectos, non invicem parallelis; dummodo etiam in quo tertio per Ungulæ aciem, seu axem conversionis plano situm sit, per § G. prop. 12. constet; eo nempe, per conversionis axem quod conversionis arcum bisecat; eoque per aciem Ungulæ, quod bisecat Ungulæ altitudinem; unde (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinantur. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia transferentur; ut ad propositiones præcedentes aliquot ostensum est.

Atque de Cycloide primariâ, hætenus.

O.

Cycloides verò Secundarias quod attinet; *Protractam* scilicet & Fig. 176, *Contractam*; (quarum illa quidem basin habet *Majorem*, Hæc
187, *Minorem*, quam est Peripheria Circuli Generantis:) Differunt
188. quidem illæ, à Primariâ, in hoc potissimum; quod recta $\epsilon \beta$ (curvis Semicycloidis, & Semicirculi Generantis circa Cycloidis axem constituti, interjectæ,) sint respectivis Arcubus βI (in protractâ) seu βE (in contractâ) non quidem Æquales, (ut, in primariâ, $b B$ rectæ Arcubus $B A$,) sed Proportionales; (Majores quidem in Pro-

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 457

Protractâ, Minores in Contractâ, & in eâ utrobique ratione, quam Fig. 176, habet Cycloidis illius vel Semicycloidis Basis, ad Peripheriam vel 187, Semiperipheriam Circuli generantis;) Aequales autem respectivis 188. arcubus istius Circuli, cujus Peripheria vel Semiperipheria sit hujus Cycloidis vel Semicycloidis Basis aequalis. Puta, recta $\epsilon\beta$ (fig. 176.) sive quæ Protractam $\tau\epsilon I$; sive quæ contractam $\tau\epsilon E$, spectat; æqualis rectæ bB , hoc est arcui BA , circuli $AB\alpha$ Genitoris primariæ $\tau b A$; cujus utique Semiperipheria $AB\alpha$, æquatur Semicycloidis suæ Basis $\tau\alpha$, (adeoque & ipsis τi , τe ,) seu promotioni Centri cC . Sunt enim rectæ bB , $\epsilon\beta$, fig. 176. (seu bB , $\beta\alpha$ fig. 166.) mensura distantia centri circuli Genitoris ab axe $A\alpha$, dum respectiva puncta b (in Cycloide primaria,) seu ϵ (in secundariis) motu circuli generantis designantur: (ut ex constructione patet.) Adeoque, dummodo æquales sint $\tau\alpha$, τi , τe , seu cC in omnibus eadem; æquales item erunt bB , $\epsilon\beta$, utpote æqualium eadem partes vel proportionales.

Quæ autem Cycloides secundarias ($\tau\epsilon I$ protractam, vel contractam $\tau\epsilon E$,) in dato quovis puncto ϵ , contingunt rectæ $\gamma\epsilon n$, sic habentur. Semicirculo Genitori $I\beta i$ vel $E\beta e$, circa axem $I i$, $E e$, constituto; Concentricus fiat (circa idem C centrum) $AB\alpha$, semiperipheriam habens $AB\alpha$ æqualem expositæ Semicycloidis basi τi , τe . Ductâque $\epsilon\beta$ basi parallelâ (circulo genitori circa axem constituto occurrens in β , & semicycloidi suæ in ϵ ,) jungatur βC , peripheria $AB\alpha$ occurrens in B ; (arcum BA , ipsi βI , vel βE , similem abscindens.) Atque à peripheriæ $AB\alpha$ puncto axis infimo α , ad peripheriæ genitoris punctum β , ducatur $\alpha\beta$ recta; & huic ad angulos rectos $\beta\epsilon$. Quæ huic parallela (per assignatum Semicycloidis punctum ϵ) recta ducitur $\gamma\epsilon n$, Semicycloidem illam in ϵ contingit. (Excepto casu, de quo mox dicetur.)

Et quidem si intelligatur β punctum, in ipsis E , e , I , i ; rectæ $\gamma\epsilon n$ tangentes erunt ipsi cC , vel $\tau\alpha$ (Cycloidis primariæ Genitori $AB\alpha$ correspondentis basi) parallelæ.

In Cycloide autem Contracta $E\epsilon\tau$, si β intelligatur in ipsa $\alpha\tau$, (ubi scilicet hæc peripheriam $E\beta e$ secat,) quæ huic respondet tangens $\gamma\epsilon n$ est axi $E e$ parallela; si vero β sit alibi supra $\alpha\tau$, tangens $\gamma\epsilon n$ (sicut & $\beta\epsilon$ recta) axi $E e$, occurret supra E , sed infra e , si β sit alibi infra $\alpha\tau$.

In Cycloide verò Protracta $I\epsilon\tau$, si ita sumi intelligatur, in $I\beta i$ peripheria, punctum β , ut $\alpha\beta$ recta peripheriam illam in β tangat; quod huic responderet punctum ϵ , (cum illud ipsum sit in quo Cyclois illa

illa recurvari incipit,) tangentem nullam habet, (sed quæ ipsam Tangere deberet, idem ibidem secat;) quæ vero supra hoc punctum sunt tangentæ, exterius tangunt; quæ infra, interius: Axique I: (continuato) occurrunt, illæ quidem supra I; hæc verò, supra; (saltem non infra:) Rectæque ST correspondentes, ipsi I: axi occurrunt; illic quidem supra C centrum; hic, infra.

Fig. 175. Ipsæ autem Cycloidum harum Curvæ, Curvis semiellipsium æquantur: Et partes partibus respectivè sumptis. Putà, Cycloidis Contractæ Curva $\tau E \tau$, Fig. 175. Semiellipseos curvæ æquatur, cujus Axium alter, quem quidem (sed, propter curvaturam, contractum,) repræsentat $\tau A \tau$ curva, sit $= 2 Aa - AE$, (cujus ordinatim-applicatæ sint ipsæ bc;) alter vero $= 2 AE$; quippe cujus semissis sit ipsa AE recta.

Cycloidis verò Protractæ curva $\tau I \tau$ fig. 175. æquatur Curvæ Semiellipseos, axium habentis alterum (quem, propter curvaturam, protractum repræsentat $\tau A \tau$ curva,) æqualem $2 Aa - AI$, (cujus ordinatim-applicatæ sunt ipsæ bp;) alterum, $= 2 AI$.

Et quidem tota $\tau E \tau I \tau$ figura (sumptis $AE = AI$), alia non est quam ellipsis quædam distorta; cujus quidem, si axium alter intelligatur $\tau A \tau$, suam retinens longitudinem, semiellipsi superior, (propter curvaturam,) protrahitur; inferior, contrahitur: eique Axi ordinatim-applicatæ sunt c b p rectæ.

De his autem, quæ Cycloides Secundarias spectant, (quarum considerationem ultra non prosequimur,) videatur Appendix ad nostrum de Cycloide Tractatum, unâ cum Epistola eidem subjuncta (circa finem:) Ubi hæc fusiùs explicantur & demonstrantur.

SCHOLIUM.

IN propositionibus aliquot præcedentibus, quæ Cycloidem spectant ejusque solida, vel eò viam struunt; aliquanto fusiùs fui: cæ præsertim de causâ, quòd in meo *De Cycloide Tractatu*, (Anno 1659. edito,) calculum non ad omnes casus perduxeram; Sed ad eum saltem (aliòsque qui ad hunc erant necessarii) quem, ex reliquis selectum, Anonymus Problematum Propositor præ cæteris designabat tanquam difficillimum, atque ad quem nisi cæteris intellectis non perveniri posse putabatur. Contentus, in reliquis, (ob rationes ibidem traditas,) saltem fontes tradidisse unde Calculi Geometrici beneficio omnia deducenda erant,

Quanquam

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 459

Quamquam enim mihi in animo fuerat, dum ea quæ prodierunt sub prelo forent, reliquum etiam calculum absolvisse, & simul edidisse: Cum tamen interea temporis (eodem anno) inexpectatò prodierit D. *Paschali*, seu *Dettonvillii*, (Propositoris Problematum,) de eadem re tractatus: Potius ducebam; rem totam, prout tunc erat, edere, (calculo ad reliqua nondum absoluto,) ne viderer ex tractatu suo (quod insinuatuos nonnullos præsentiebam) mea deduxisse. Et propterea, ipsa schediasmata sic edenda placuit, prout ea jam ante cum nostratibus communicaveram; quæque nominatim Honoratissimus D. Vicecomes *Brounckerus* subducto calculo examinaverat (ne forte, in multiplici calculo, quòd sæpe contingit, alicubi error calculi obrepisset,) & comprobaverat, (ne uno quidem calculi lapsu per totum illud opus deprehensio,) jam tum per plures menses antequam *Dettonvillii* opus prodierit. Sed & totius Methodi summam, jam ante per annum integrum, ad D. *Carcaviu* suum (prout *Dettonviliu* ipse, tum Anonymus, jussit,) *Parisi* miseram; ubi & ea viderat *Paschaliu* ipse; prout ejus ad *Wrennium* nostrum literæ, disertè indicant: Ut nullus iniquæ de meis suspitioni locus sit.

Et quamquam fieri non possit, quin, eandem rem tractantibus, nonnulla mihi cum illo fuerint communia: Methodum meam ab illius diversam esse, qui utramque comparaverit non poterit non videre. Quantò autem mea sit quàm illius expeditior, magisque directè ad scopum tendat; aliorum esto judicium, siqui fuerint qui volent juxta mea, tum juxta illius principia, vel calculum universum, vel istius saltem casus quem ex reliquis selegit ille, (de Centro gravitatis Semisolidi, ex Semicycloidis circa basin suam Semiconversione facti, determinando,) calculum instituere.

Et, speciatim, illam Cycloidis in Segmenta distributionem, ubi ostenditur, non modo Semicycloidem Semicirculi triplam esse, (quod pridem innovit,) sed & illius Portiones (rectis debito modo abscissas) Portionum hujus respectivè triplas esse; (puta in Fig. 166. Fig. 166. $b\beta\tau = 3 B\alpha B$, $A\alpha\beta b = 3 A\alpha B$, $d\delta\beta b = 3 D\alpha B$, & sic ubique;) quam ego totius processus mei originem facio; cæteraque hinc deduco: Ille ne uspiam advertit. Et quidem nescisse planè videtur, donec ex scriptis meis id resciverit. Quippe rem tanti in hoc negotio momenti, non putandus est, modò sciverit, reticuisse velle. Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli; quamquam jam tum per annos plus quam quadraginta in rem illam Cycloidis, intenti fuerant ex illis summi viri, quam ego tum primum (ad illud

N n n

pro-

provocatus,) considerandam suscepi; nescius alia jam tum ab aliis inventa fuisse, quam quod apud *Torricellium* & *Schootenium* traditum noverim, Cycloidis planum circuli triplum esse; Methodumque ibidem tradi, pro tangentibus ducendis.

Atque hinc esse judico; quod ille *Figuram Sinuum Versorum*, nusquam in auxilium advocat; sed ea longis ambagibus ex *Sinuum Rectorum* doctrinâ petitur, it, quæ ex Sinibus Versis multo promptius fuissent depromenda.

Curvamque figuræ isti adjacentem *A d r*, fig. 170. (quam *Ellipsis Expansam* dicimus) non omnino considerasse videtur: Quamquam enim quæ ipsi est (*Cycloides Socia*, non alia sit quam hujus Curvæ pars dimidia, ut *d A*; (quod in subjunctis tractatu de *Cycloide*, pag. 100. demonstro;) illam tamen ex alia plane origine deducit, unde hæc tota non deducitur. Quam enim ille *D mediam*, ductu Circini in superficie Cylindri, (eà aperturâ quæ diametro Basis Cylindri æqualis sit,) descriptam vult: Hoc est, (quippe hoc tantundem valet) communi *Sphæra atque Cylindri* sectione; (posito Sphæræ Centro in Cylindri superficie; ejusque Radio, hujus Basis Diametro æquali:) Nos, *Totam*, ex communi *Cylindri & Plani* sectione deducimus: (Utrique interim absumptam Cylindri superficiem in Planum expandentes.) Quod illum minime advertisse existimo.

Hinc est, quod, in propositis suis, selegit ille casum illum, ut difficillimum, qui Semisolidum circa Semicycloidis Basim spectat; (quem, nisi perspectis quæ Semisolidum circa Axem spectant, solum iri posse non putaverat; nec quidem, per ejus methodum, absque illis solvi potest) Qui tamen (utut ille hoc nesciverit) longe facillior est, quam casus similis de Semisolido circa Axem. Quod ex traditis nostris, propter illam quam diximus Semicycloidis in sua Segmenta, Segmentis Semicirculi respondentia, distributionem, satis liquet. Verum cum ille hanc distributionem nesciverit; non poterat eò pervenire, nisi ope Semisolidi circa Axem. Adeoque, longo circuitu & perplexo admodum calculo eò tandem tendere necesse habet, quò nos recta pervenimus.

Hinc etiam est (ni fallor) quod in Problematis primitus propositis, illud Semicycloidis Segmentum (cum suis Solidis) expendendum proponat, quod rectâ Basi parallelâ abscinditur, (ut *b V A*, fig. 166.) potius quam quod rectâ abscindatur quæ parallela sit *Axi*. Utut enim, distributionem hanc intelligentibus, posterioris hujus consideratio fuisset non minus intricata; illi tamen, qui distributio-

nem

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 461

nem eam nondum perspectam habuit, prior illa habita est intricatior, & quidem, per methodum ab illo traditam, difficilius absolvetur.

Quæ omnia, quidem, manifesta sunt indicia, distributionem hanc (& quidem pulcherrimam) ipsi minime fuisse perspectam.

Quod quidem eousque verum est, ut siquis velit, secundum ipsius methodi leges, (quod nos in nostrâ fecimus,) casuum omnino omnium calculum aggredi, eorum præsertim qui Semisolidi circa τa (semicycloidis balin,) vel (huic parallelam) bV , centra gravitatis spectant; (expertus loquor;) rem adeo perplexam reperiet, ut mirum sit ni, laboris pertæsus, in medio itinere lassus desistat. Quod in causa fuisse suspicor, cur ille (utut id pollicitus videretur) ad calculum non revocaverit casus omnes à se propositos; sed, unius tantum numeros exhibuisse contentus (suppressis interim quibus huc pervenerat vestigiis) de reliquis altum habet silentium.

Sed neque noverat ille (neque ex suis aliis) Cycloidis curvæ æqualem rectam exhibere, aut in datâ ratione curvam illam secare; antequam id ex Angliâ resciverit. Unde factum erat quod Posteriora Quæsitâ, quæ Cycloidis Curvam huiusque segmenta spectant, & Superficies illius, vel segmentorum suorum, conversione factas; harumque omnium Centra gravitatis, non fuerint unâ cum Prioribus proposita; sed tum demum postea quam ex *Wrennii* nostri literis indicatum fuerat, quo pacto possint huic curvæ, suisque partibus, æquales Rectæ exhiberi. Quod ex illius ad *Wrennium* literis abunde liquet.

Quæ omnia non eo animo dicta sunt, ut inventis suis derogatum eam: Sed ut nobis quæ nostra sunt asseram, & reapse ostendam, etiam omnia illa non minus esse (ne dicam *magis*) methodis nostris pervia, quam suis; nequis superesse possit iniquis suspicionibus locus, nedum malignis insinuationibus.

Quod autem hac in re, præter ea quæ pridem edidimus, jam superadditum habetur: Non aliud est (rem ipsam quod spectat) quam calculi, pridem inchoati, continuatio. Non enim alia hic adhibemus principia, vel methodi leges alias, quàm quæ in illo de *Cycloide* Tractatu passim adhibemus. Sed & quæ illic habentur, fere deprompta sunt ex principiis meis, in *Arithmetica Infinitorum* pridem traditis, Anno 1656. editis: quæ & in *Commercio pislolico*, Anno 1658. edito. (Epist. 15, & 16, huiusque appendice,) à l'Centra gravitatis accommodaveram. Quippe hæc omnia vix aliud sunt, quàm istius Methodi Universalis, ad particulares casus accommodatio.

N n n 2

Post-

Postquam verò ea quæ præcesserunt omnia, ad calculum uti hic habentur perduxeram; eaque per complures menses Prelo subjecta fuerant; & magna pars impressa: incidi in *Lalovera* de Cycloide tractatum; ante aliquot annos Tolose editum, sed (uti audio) nonnisi nuperrime in Angliam allatum. Qui varios de Cycloide ejusque Solidis, & horum Centris gravitatis, Casus, ad calculum redegit, suâ methodo. Hanc ego, quamvis eam hætenus examinare nondum vacaverit; eaque, primâ saltem fronte, non parum intricata mihi videatur: Sanam tamen esse, saltem quod summam rei spectat existimo. Eo potissimum, quod calculi sui numeros (saltem in plerisque quos contuli casibus,) cum nostris consentire reperio. Sicubi verò dissentiant, (quod in paucis fit,) id Calculi potius alicui lapsui fortuito (qui condonandus erit) quam Methodi vitio, imputandum videtur. Quod & de nostris intellectum esto, sicubi irrepperit (quod facile fieri possit, & quidem agrè cavebitur, in tam multiplici calculo,) calculi lapsus aliquis, (necum calami, aut etiam Preli.) Quippe, Methodum ipsam meam, satis ubique demonstratam esse, satis securus sum: Sed neque de ipso Calculo multum metuo.

Quod autem ille multus sit in conquerendo, quasi cum eo minùs candidè actum fuerit: Ego quidem non miror; ut qui sæpius eadem ab eisdem hominibus expertus fuerim, de quibus hic conqueritur. Sed & jam, ante nos, Cartesius (ut in ipsius editis Epistolis passim liquet) eadem sæpius conquestus est. Et Torricellium (ne plures memorem) pari modo habitum fuisse, ex eâ liquet Apologiâ quam pro nro sive *Carolus Dati*, sive quisquis alius, sub ficto nomine *timonri Antiatii*, edidit Florentiæ, Anno 1663. Linguâ Italicâ. Sunt utique qui Problemata sua, *Totius Europæ Mathematicis* solvenda exponunt; ne dicam venditant, jactitantve; (quasi quidem huic soli negotio cæteris vacaret, ut sua pensa absolverent:) Quæ quidem si negligimus; Insultant: Si solvimus; Irascuntur, calumniantur, opprobriis onerant, insimulant plagii; (quasi quidem ipsi soli sapiant, atque impossibile sit ut alii, nisi ipsorum scriniis expilatis, quicquam in Mathematicis arduum præstare possint.) Quod fecit ut ego jam per plures annos tantum-non religiose abstinerim, utut aliquoties publice provocatus, & laceffitus, nequid hujusmodi commercii cum illis ultra haberem, apud quos nec impudè licet eloqui, nec tacere: Nec nisi nuperrimè, nimis laceffitus, silentia rupi.

Quid autem rei sit, cur ibi *Dettonvilius* à *Paschalis* alium esse; insimulatum ire videantur, (quod & *Lalovera* observat,) ego non in-

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 463

intelligo; quem ego pro eodem semper habui, atque etiamnum habeo. Et quidem, eundem esse, *Lalovera* (in tractatu suo) iis indicibus ostendit, ut de eo non sit cur quisquam dubitet, saltem donec alius (à *Paschali*) *Dettonvillii* reperiri possit. Et quidem ex *Paschali* ad *Wrennium* literis, (jam antequam Problematum Propositor *Dettonvillii* nomen professus fuerat,) non erat conjectu difficile, ipsum fuisse istorum Problematum Authorem: Et quidem, utur *D. Carcavius* in suis ad me literis, quasi rem dissimulaturus, *Dettonvillii* a *Paschali* distinguat, (quasi non idem forent;) in *D. Hugonii* tamen ad me literis, (per quem *D. Carcavius* ad me transmittenda curavit aliquot *Dettonvillii* exemplaria, ad alios aliquot distribuenda; quem itaque putaverim tum *Carcavii* mentem, tum Authorem libri cognovisse;) Junii 9. 1659. Hæc datis, sic scribitur, *Ad postremas tuas nihil hactenus rescripsi, eo quod ab illo jam tempore expectabam libros hosce Dettonvillii seu Paschalii, quos mihi ad te curandos commissum iri noveram. Quaterna hæc exemplaria ad te mitterem rogat Carcavius; te verò ut singula ex his, Viris Clar. Wrennio, Wardo, & Hobbio, tradi cures. Oratque in examinato Dettonvillii opere sententiam suam quisque ipsi edere velit.* Et quidem *Wrennius* noster, Parisiis huc ante triennium reversus, (ubi moram aliquam posuerat,) *Paschalinus*, dixit, istius libri Authorem Parisiis habitum esse, nemine quantum ille observaverat) vel reclamante vel dubitante. Sin fallimur omnes, (quod vix crediderim:) Si quando alius a *Paschali* prodiderit *Dettonvillii*, mihi certè perinde erit: (Quippe hic, mihi, neque feritur neque metitur:) Ego saltem hactenus, aliam non novi.

Lalovera Numeros quos cum meis me Contulisse dixi, illi sunt qui habentur, ad octo Problemata, prop. 25. lib. 3. qui (ad terminos meos reducti) cum nostris consentiunt omnes.

Item, qui habentur, ad octo Problemata prop. 36. lib. 4. qui omnes item cum meis consentiunt; nisi quod in octavo Problemate dissentiant. Quippe quam assignat ille distantiam (a conversionis axe) Centri gravitatis Semisolidi, ex semiconversione superioris semicirculi semicycloidis A d C (in mea fig. 166.) circa axem A C, esset

$$6 R P^3 + 144 R^2 P^2 - 216 R^3 P - 12 R^4$$

(ad terminos nostros reducta,)

$$9 P^3 + 144 R P^2 - 240 R^2 P.$$

At vero, juxta meos numeros, (per § O, P prop. 21. hujus,) Ungula Segmenti A b V, aciem habentis A V seu A z, distantia centri gravi-

464 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

gravitatis ab AV, seu A α , (hoc est, à perpendiculari plano super A α erecto,) ubicunque sumatur V, sive supra C, sive infra C, sive (quem ille solum casum considerat) in ipso C centro; est

$$87aR^3 - 87sR^3 - 96avk^2 - 9svk^2 - 12a^3R + 36a^2sR - 12as^2R - 12s^3R + 24a^3v + 36a^2v + 24a^2v - 6sv$$

$$- 48vk^2 - 18a^2k^2 - 36asK - 6s^2K - 36a^2v + 36asv + 12s^2v;$$

Hoc est, in presenti casu, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $s = v = R$),

$$\frac{3R^4 + 72K^2P^2 + 108K^3P - 1408R^4}{18R^4 + 280K^2P - 480K^3};$$

(ut factâ Reductione patebit.) Adeoque in Semisolido (cujus distantia est ad illam Ungulâ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P , ut sapius ante ostensum est,) erit

$$\frac{6RP^3 - 144R^2P^2 - 216R^3P - 2816R^4}{9P^3 - 144R^2P - 240K^2P}.$$

Quod à numeris nostris in hoc dissentit; quod habeat ille $-512R^4$, pro $-2816R^4$. Si quis autem dubitaverit, ubi numeri discrepant, utrum penes illius numeros, an penes meos. erratum fuerit; errorem penes illum esse, etiam absque operosa disquisitione, facile constabit. Quippe si ad numeros absolutos (quam proxime) fiat reductio; reperietur distantia centri gravitatis istius Semisolidi, ab A α , secundum meum calculum, quasi $\frac{2}{3}$ totius distantiae $a\tau$; at secundum ejus, quasi $\frac{3}{5}$; quam nimiam esse, qui figuram istius solidi mente conceperit, minime dubitabit: Est enim tanta fere quanta si esset Semicylindrus, cujus distantia saltem minor esset quam $\frac{2}{3}$; quæ nonnisi paulo major est quam $\frac{2}{3}$, hoc est $\frac{1}{5}$: Adeoque hanc nimiam esse, non erit dubitandum.

Denique, qui habentur ad octo Problemata, suæ prop. 19. lib. 5. qui cum nostris item consentiunt omnes; excepto octavo Problemate. Quod est de distantia centri gravitatis (à conversionis Axe A α) superficiei factæ ex semiconversione curvæ Ar (in mea fig. 166.) circa A α . Est enim, secundum ipsius numeros, (ad meos terminos reductos),

$$\frac{18RP^2 - 48K^2P - 544R^3}{9P^2 - 24RP};$$

quæ ad numeros absolutos reducta, major erit quam $\frac{2}{3}$ totius $a\tau$; quam nimiam esse, certum est; (quippe quæ major est quam si esset superficies semicylindrica, in qua distantia minor esset quam $\frac{2}{3}$, imo quam, $\frac{1}{2}$.) Est autem, juxta numeros meos (§ I. M. prop. 22.) Centri gravitatis Ungulæ ipsi A τ insistentis, aciem habentis A α , distantia ab A α , (hoc est, à perpendiculari plano huic insistente,) $\frac{45P^2 - 1024K^2}{90P - 240R}$; adeoque in semisolido correspondente, distantia à conversionis axe A α , (utpote ad illam

PROP. XXII. De Calculo Centri Gravitatis. 465

illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; seu $4R$ ad P ;) $\frac{90RP^2 - 2048R^3}{45P^2 - 120RP}$; quæ, ad numeros absolutos reducta, minor erit quam $\frac{1}{2}$, imò quàm $\frac{1}{17}$, (sed major quàm $\frac{1}{17}$), totius $a\tau$.

Verum cum numeri ejus pro casibus illis (nunc unico, nunc duobus,) quos ille expendit; (nempe, qui vel totam $A\tau a$, vel superiorem semissem $A d C$ spectant;) cum nostris universalibus (casum quemlibet indifferenter respicientibus;) in cæteris conveniant: non in ipsius Methodi vitium, sed in calculi lapsum aliquem, rejiciendus erit hic in paucis dissensus.

Inveniet autem, in his meis, Lector, eandem non rarò quantitatem pluribus modis (sed qui sint *isodynamæ*) designatam. Quod ideo factum est, quoniam nunc hic, nunc ille modus, (ubi ad usum reducendus erit,) accommodatior videri possit; adeoque Lectoris commodò consultum est, ut (reductionibus a me jam factis) eum seligat designandi modum qui ipsi gravior videbitur, vel suis usibus accommodatior. Quinimo & alii plures esse possunt modi (quos ego ne nimius essem non apposui) easdem quantitates designandi, prout quis alias atque alias reductiones instituere velit.

Sed & passim deprehendet, me easdem quantitates pluribus methodis investigasse, atque ad calculum perduxisse. Quod factum est, tum ut Methodos illas plures edoceram; (adeoque ostenderem quàm abunde sufficiant principia nostra ad hæc quaerita multis modis exhibenda;) tum etiam ut de calculo ritè adhibito magis securus essem, quàm si unico modo illum exquisivissem. Quàm enim, in multiplici calculo, lapsus in proclivem sit, nemini vel parum exercitato ignotum esse potest. Ideoque, quò cavrentur hujusmodi lapsus, cautè prospiciendum putavi, ut ea fere omnia, in quibus saltem liquis foret error idem etiam alia inde dependentia latè inficeret, pluribus methodis ad calculum redigerentur, ut plurium methodorum consensu (quæ sibi mutuo Probationum seu Examinum vices subirent) confirmatior essent de calculo ritè instituto. Quod fecit, ut vel de ipso Calculo, tanquam omnino rectè instituto, confirmatior fuero, etiam ante cognitum (quod jam nuperrime, post finita omnia contigit,) *Lalovera* cum nostris consensum.

His autem de Cycloide, fusiùs (ut dictum est) explicatis; reliqua quæ sequuntur brevius exequemur: Ne si omnia particularim persequi velim, in immensum excreveret hoc Caput; quod jamjam multo ultra quam speraveram excrevit.

P R O P.

PROP. XXIII.

- A. Superficies curva Cylindri recti, ejusve Portio duabus rectis lineis interjecta, aequatur Parallelogrammo rectangulo æquè alto, cujus Basis sit æqualis peripheriæ basis Cylindri, ejusve respectivæ portioni eisdem rectis lineis interjectæ.
- B. Idemque obtinet in Superficie istiusmodi Solidi cujusslibet Columnaris recti, quamvis basin habeat non circularem, sed Ellipticam, Parabolicam, Hyperbolicam, aliamve sive rectilineam sive curvilineam quamlibet.
- C. Centrum gravitatis est in medio rectæ conjungentis Centra gravitatis peripheriarum (sive totalium sive partialium, prout casus contigerit,) oppositarum basium.
- D. Adeoque (propter arcus circularis centrum gravitatis datum) datur Superficie istius Cylindricæ (perfectæ vel imperfectæ) centrum gravitatis.
- E. Idemque in aliis illis superficiebus columnaribus dabitur, si detur respectiva curvarum basium Centra gravitatis.
- F. Datur etiam expositæ superficialis Ungulæ Cylindricæ, tum Magnitudo, tum Centrum gravitatis.
- G, I. Idemque (datis Curvarum, ut dictum est, Longitudinibus & Centris gravitatis) dabitur in reliquis superficiebus Columnaribus.
- K, L, M. Quodque de Ungulis superficialibus dictum est; idem ad qualvis in superficiebus illis figuras, planorum sectionibus terminatas accommodabitur.
- N. Quæque de Cylindri Recti, Rective Solidi Columnaris, superficie dicta sunt; eadem ad Scalenorum superficies transferentur.
- Estque

PROP. XXIII. *De Calculo Centri Gravitatis.* 467

Estque Superficies Cylindri Recti, ad Superficiem Scalenī, ejusdem Lateris, & super eadem Base; ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri seu Axi sit ad angulos rectos: Quod & de partibus respectivis intelligendum erit.

Idemque non minis obtinet in aliis Solidis Columnaribus, cujuscunque basis.

Ungulæque, & aliæ figuræ superficiales modò dictæ, quæ in rectis exigendæ sunt ad Basis Perimetrum; eadem, in Scalenis, similiter exigendæ sunt ad sectionem illam quæ Recta sit ad Scalenī Axem.

Intelligentur enim, fig. 172. super basis Cylindri recti Peripheria, ejusve portione aliqua, $\alpha\Delta\tau$, in singulis punctis (æqualiter ab invicem distitis) erigi perpendiculares rectæ, ut $\Delta\mathcal{J}$, curvam Cylindri superficiem complentes; (juxta Def. 1. Cap. 4. hujus:) quæ, propter omnes ad basin angulos æquales rectos, totidem parallelogramma rectangula (æque alta invicem & æque lata) repræsentabunt, superficiem illam curvam complementia; quæ, si in planum expandi intelligentur, totidem rectangulis rectilineis congruunt, complementibus rectangulum rectilineum ejusdem altitudinis, cujus basis æquetur ipsi $\alpha\Delta\tau$ curvæ in rectam expansæ.

Idemque similiter ostenderetur, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non esset arcus Circularis, sed alia quævis Curva.

Hujus autem superficiei curvæ Cylindricæ, vel Columnaris, Centrum gravitatis esse in mediâ longitudine, ostensum est, ad prop. 2. hujus; atque in eâ rectâ quæ oppositarum basium superficiei istius Centra gravitatis conjungit, per prop. 5. hujus: Ergo, in hujus puncto medio.

Adeoque, propter datum arcus circularis centrum gravitatis, per 14 hujus, dabitur, non tantum totius superficiei Curvæ Cylindri recti, sed & portione cujuscunque (duabus rectis ad basin perpendicularibus interjectæ) Centrum gravitatis.

Idemque similiter dabitur, in alia superficie columnari, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non sit arcus circuli, sed alia quævis curva, dummodo hujus curvæ centrum gravitatis notum sit.

Si verò ex hujus Cylindri recti superficiei curvâ, plano quovis $T\alpha T$ utcumque obliquè posito, abscindi intelligatur superficialis

O o o

Ungula

O.

P.

Q.

A.

Fig. 172.

B.

C.

D.

E.

F.

Fig. 172. Ungula $T \times A \delta$; (ubique contingat TA , Ungulæ acies, non minus quàm si sit Diameter Circuli $T \delta A$;) propter datum inclinationis angulum $\nu a \beta$, arcusque Centrum gravitatis; dabitur Ungulæ altitudo super centrum illud, quæ in arcus longitudinem ducta dat superficialis istius Ungulæ Aream; per prop. 11. hujus. Quod non minus valet de Ungulâ totâ $T \times A \delta$, quàm de partialibus $A \beta \nu$, $\beta \nu \delta$, &c. Nam & hic ob data arcuum $A \beta$, $\beta \delta$, &c. Centra gravitatis, adeoque eorum ab acie $A T$ distantias, & angulum inclinationis, adeoque altitudinem super gravitatis Centra; habebitur area: Ductâ altitudine illâ in curvæ longitudinem.

G. Atque hæc obtinent, quæcunque sit $A \delta T$ curva (non minus quàm si sit arcus circularis,) cujus & Longitudo & Centrum gravitatis nota intelligantur.

H. Habitis autem, eo quo dictum est modo, Ungularum magnitudinibus; earundem Momenta eâ methodo investigari possunt, quam, ex prop. 10. petitam, in superioribus sæpius adhibuimus: Nempe, omnium arcuum (Ungulam superficialem complementum) Momenta respectu expositæ rectæ, (quæ, propter cognita curvarum tum longitudines, tum Centra gravitatis, adeoque ipsorum ab exposita rectâ, planove per illam perpendiculari, distantias, habentur,) sunt ipsum Ungulæ Momentum respectu istius rectæ, quod, per magnitudinem divisum, exhibet distantiam Centri gravitatis ab illo perpendiculari plano. Atque hoc si respectu plurium rectarum (quæ non sint ad invicem parallelæ) fiat; habebitur ipsam gravitatis Centrum.

Vel etiam, (per § W. prop. 13. hujus) haberi possunt Ungularum istiusmodi in superficie Cylin dri recti, saltem quarum acies est Circuli diameter, Centrum gravitatis; & Cyli ndracearum superfici erum (parallelis rectis interjectarum) Centra dari, modò ostensum est, § C, D, hujus: Atque in harum aliquas (addendo vel subducendo, prout opus fuerit,) resolvi potest istiusmodi quævis Ungula superficialis Cylin dri recti, (ut exemplis mox proferendis ostendatur:) Dabitur igitur, (per prop. 27. cap. præced.) istiusmodi cujusvis Ungulæ Centrum gravitatis.

I. Hæc autem, quò ad alias curvas transferantur, opus erit, ut tum ipsius $A \delta T$, quæcunque fuerit curva, tum partium ipsius quæ rectis putà ipsi AT parallelis (si nempe momentum respectu hujus inquiretur) æqualiter ab invicem dissicis abscinduntur, tum longitudines, tum Centra gravitatis, vel (quæ ex his resultant) momenta habeantur. Quippe, his habitis, momenta similiter exquirentur (per prop. 10. hujus) atque si essent arcus circulares.

Quod

PROP. XXIII. De Calculo Centri Gravitatis. 469

Quod autem de Ungulis superficialibus traditum est; idem ad quasvis in eâ superficie figuras, planorum utcumque positorum intersectionibus (cum ea curvâ superficie) terminatas, accommodabitur. Nam, ut figuræ quævis in plano rectilinéæ resolvi possunt in rectangula triangula & parallelogramma; eodem fere modo figuræ quælibet (in recti Cylindri vel Columnaris solidi superficie) planorum sectionibus factæ, resolvi possunt in superficiales ungulas & Cylindraceas, superficies rectangulas. Adeoque ex partialium magnitudinibus habitis, habebitur (addendo, & subducendo, ut casus postulaverit) magnitudo expositæ: Atque, ex illarum habitis Centris gravitatis, habebitur hujus, per prop. 27. cap. præced.

Exempli gratia; Sit istiusmodi Figura exposita (in superficie Cylindri recti) planis terminata, CAD, (fig. 189.) Atque demissis (ad Cylindri basin BAS) rectis CB, DS; erit exposita CAD figura, eadem atque Ungula superficialis CBASD, demptis CAB, & DAS.

Sed, propter dati arcûs BAS Centrum gravitatis datum (per prop. 14. hujus,) adeoque ipsius distantiam à datâ Ungulæ acie (seu communi basis BAS, planique Ungulam abscindentis CDF, sectione) XZ; & consequenter (propter datum etiam Inclinationis Planorum angulum FXB) Longitudinem rectæ, quæ arcûs Centro gravitatis insistit, rectis in superficie curvâ Cylindri parallelæ: Datur etiam (per prop. 11. hujus) superficialis ungulæ CBASD area seu magnitudo.

Et similiter; propter datum arcûs BA Centrum gravitatis; Ungulæque Aciei EA (quæ sive sit ipsi XZ parallela, sive secus, perinde est,) Angulumque Inclinationis CEB: Dabitur superficialis Ungulæ CAB magnitudo.

Et, simili processu, dabitur magnitudo superficialis Ungulæ DAS.

Datur ergo, expositæ Figuræ $CAD = CBASD - CAB - DAS$ magnitudo. (Et similiter, mutatis mutandis, in expositis Figuris istiusmodi aliis.) Quod ostendendum erat.

(Idemque pariter obtinebit, etiamsi curva BAS non sit arcûs circularis, sed alia quævis curva, dummodo (ut supra dictum est) tum ipsius, tum partium sui BA, AS, habeantur longitudines & Centra gravitatis.)

Porro; quo habeatur expositæ figuræ CAD (juxta tenorem § W. prop. 13. hujus) Centrum gravitatis; resolvenda erit ea, non tantum in Ungulas CBASD, CAB, DAS; sed & hæc porro ita sunt

O o o 2

K.
Fig. 189.

L.

M.

Fig. 189. sunt resolvendæ, ut per superficies Cylindraceas rectangulas, atque ejusmodi ungulas quæ acies habeant in diametro Circuli (additas demptasque prout res postulaverit,) exhiberi possint.

Putâ, cum Ungulæ CBASD acies XZ non sit in diametro circuli BAS, (sed extra illam in eodem plano:) ducta intelligatur in secante Plano CFD, per L punctum in Axe Cylindri, recta LH, ipsi XZ parallela; quæ curvæ CD occurrat in H: Atque, per H, circulus GHK, centro L descriptus, basibus Cylindri parallelus. Adeoque fient superficiales Ungulæ CHG, DHK, communem aciem habentes LH in circuli Diametro. Quorum si auferatur illa, & hæc addatur, superficiei Cylindraceæ rectangulæ GBASK, habetur Ungula CBASD. Habitis itaque illarum tum Magnitudinibus, tum Centris gravitatis (nempe Ungularum CHG, DHK, per § W. prop. 13. & Cylindraceæ GBASK per § C, D, hujus;) habebitur etiam (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis ipsius CBASD = GBASK + DHK - CHG.

Similiter ostenderetur (mutatis mutandis) Ungulam DAS, componi ex Cylindraceâ AMNS, additâ Ungulâ DON, demptâ AOM, quarum Ungularum communis acies OP est in diametro Circuli. Habebitur itaque Centrum gravitatis ipsius DAS = AMNS + DON - AOM.

Item, Ungulam CAB haberi, demptis, ex Ungulâ CQT, tum Ungulâ AQR, (quarum communis acies QV est in circuli diametro,) tum Cylindraceâ BART. Adeoque habebitur Centrum gravitatis ipsius CAB = CQT - AQR - BART.

Habebitur itaque (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis figuræ expositæ CAD = CBASD - DAS - CAB. (Et similiter in aliis figuris, mutatis mutandis.) Quod erat ostendendum.

Non autem erat necesse, in auxilium advocare § W. prop. 13. sed per methodum illam (sæpius adhibitam) ex prop. 10. hujus petitam, absolvi posset negotium: Eademque rem absolveret in aliis (ut dictum est) Superficiebus Columnaribus, dummodo Curva basis, partesque suæ, nota habeant tum Magnitudines tum Centra gravitatis.

N. Si verò exposita sit Cylindri (non Recti, sed) Scaleni superficiales; ut in fig. 190. Quæ ad singula Perimetri basis puncta (æqualiter ab invicem distita) oblique cadunt rectæ (axi Cylindri parallelæ) superficiem curvam cylindraceam complentes; neque habebunt
ab

PROP. XXIII. De Calculo Centri Gravitatis. 471

ab invicem eandem quam respectiva basis puncta distantiam, (sed minorem, propter obliqua quæ repræsentant parallelogramma, quorum latitudo minor est quam est basium longitudo;) neque distantias invicem æquales, (propter inæqualem inclinationem ad basis perimetrum.) Utut enim habeant illæ ad planum basis *Cylindri* eandem omnes inclinationem; non tamen eandem habent omnes ad curvam basis perimetrum; (quod, si opus esset, facile est demonstratu; sed, consideranti, clarius per se liquebit, quam ut id sit opus.) Quo fit, ut *Parallelogramma*, quæ repræsentant rectæ illæ, superficiem complementia, neque *Rectangula* reputanda sint, sed neque æqualiter inclinata; (adeoque nec æque-lata, utut æquales bases habentia.)

Atque ob harum considerationum priorem, evenit, quod Curva Superficies *Cylindri Scaleni* non (ut *Recti*) æquetur factu ex *Cylindri* latere in perimetrum basis (hoc est, in aggregatum basium omnium *Parallelogrammorum* quæ repræsentent illæ rectæ) ducto: Sed minor eo sit. Quæ consideratio communis etiam est *Cylindri* solido; quod minus est, quam factum ex latere *Cylindri* scaleni in basis planum ducto, (hoc est, in aggregatum omnium basium *Prismatum*, quæ repræsentant rectæ, solidum juxta def. 4. complementes;) quoniam *Prismata* solidum complementia, non sunt (ut in *Cylindro recto*) Recta, sed Scalena. Sed, cum sint æqualiter inclinata, (eandem utique ad planum basis inclinationem habent, quam Axis *Cylindri*;) eadem ratione minuuntur. (propter inclinationem) omnia; nempe; in ea ratione quam habet *Cylindri* Altitudo ad Latus suum. Adeoque *Cylindri* Solidum æquale fit factu ex (non Latere, ut in *Cylindro Recto*, sed) Altitudine *Cylindri* in Basem ductâ.

Ob posteriorem verò considerationem, (quod Rectæ in superficie *Cylindri Scaleni* non sint, ad basis Perimetrum, æqualiter inclinatae,) evenit, quod non (ut in Solido fiebat) una aliqua recta, quæ sit communis omnium *Parallelogrammorum* Altitudo, pro Latere substituenda sit, in Basis Perimetrum ducenda, quò habeatur Area; sed, pro aliis atque aliis Perimetri punctis, aliæ atque aliæ rectæ; propter variatam in singulis punctis inclinationem ad Basis Perimetrum, adeoque *Parallelogrammorum* Altitudinem.

Hinc itaque quò subveniatur incommodo; Si exponatur consideranda (fig. 190.) *Cylindri Scaleni* *b B S s* superficies curva; neglectis basibus *B A S*, *b a s*, (quæ sunt ad *Cylindri* latus *b B* oblique posita;) Sumatur planum aliud, quod sit ad *Cylindri* Latus (vel Axem) rectum, sectionem faciens *β α σ* Ellipsin (dummodo *B A S* sit Circulus;) ad quam itaque curvam *β α σ*, rectæ omnes *B b*, *A a*, &c.

Fig. 190.

Fig. 190. &c. superficiem complentes, non minus Rectæ sunt, quam sunt in Cylindro Recto Latera ad perimetrum basis. Et, consequenter, si per singula curvæ $\beta a \sigma$ puncta, æqualibus ab invicem in eadem curvâ distantis remota, transire intelligantur totidem æquales rectæ $B \beta b$, $A a a$, &c. superficiem complentes; representabunt illæ (non minus quam quæ sunt in superficie Cylindri recti) totidem Parallelogramma Rectangula æque alta, & æque lata, quorum omnium Bases simul sumptæ complent ipsam $\beta a \sigma$ curvam, & communis Altitudo est ipsum Cylindri Latus $B \beta b$; quæ itaque in curvam totam $\beta a \sigma \beta$ ducta, exhibet integram Cylindri superficiem curvam; eademque in curvæ portionem quamlibet ut βa ducta, exhibet correspondentem superficiei portionem $B A a b$.

O. Hinc sequitur; Superficiem Cylindri Recti, ad superficiem Scalenî, ejusdem Lateris & super eandem Basin, ita esse, ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri vel Axi sit ad angulos rectos; puta, ut $B A S$, ad $\beta a \sigma$: Atque illius portionem, ad respectivam portionem hujus, ut est ea basis portio cui insistit, ad respectivam sectionis rectæ portionem; puta, ut $B A$ ad βa , sic quæ portio ni $B A$ insistit in Cylindro Recto, ad eam quæ eidem insistit in Scaleno superficiem, idem Cylindri Latus habentem.

P. Idemque obtinet, ob eandem causam, non tantum in Cylindris veris, quæ basin habent Circularem; sed & Solidis quibuscumque Columnaribus. Nempe, quæcunque sit $B A S$ curva quæ basis sit Solidi Scalenî pro eâ substituenda erit $\beta a \sigma$, quam exhibet sectionem Planum illud quod est Lateri, vel Axi, ad Angulos rectos. Quæ quidem Elliptis erit, si $B A S$ sit Circulus; si verò $B A S$ Elliptis sit, erit $\beta a \sigma$ vel alia Ellipseos species, vel etiam Circulus. Et similiter, quæcunque fuerit curva $B A S$, pro eâ substituenda erit correspondens $\beta a \sigma$, prout cujusque curvæ ratio postulaverit.

Q. Quæ autem, de Ungulis, aliisque figuris in Recti Cylindri seu Solidi Columnaris superficie, ad Basis Perimetrum $B A S$ exigendis, dicta sunt: Eadem omnia, in Scalenis, ad Perimetrum Sectionis rectæ $\beta a \sigma$ accommodanda erunt. Quippe Solidum illud, (sive Cylindrus sit, sive aliud quodvis Solidum Columnare,) quod ad Basin $B A S$ Scalenum est, idem ad basin $\beta a \sigma$ Rectum erit.

P R O P.

PROP. XXIV.

Figuræ cujusvis in Superficie Sphæræ, Planorum quorumvis cum Sphærica superficie sectionibus, (hoc est circulorum quorumvis sive maximorum sive minorum arcibus) terminatæ; Magnitudo datur. A.F.

Nempe; Superficies sphæræ integra, æquatur quatuor circulis maximis. B.

Segmenti cujusvis, Plano abscissi, (aut etiam Zonæ cujusvis Parallelis Planis interjectæ,) superficies, eam rationem habet ad totam Sphæræ superficiem, quam habet intercepta Axis portio ad Axem totum. B.

Cuneus superficialis, seu portio superficiei curvæ duobus planis in Axe coeuntibus interjecta, sive totius Sphæricæ superficiei, sive Segmenti superficialis, sive Zonæ; superficiem habet in ea ratione ad integram illius sive Sphæræ, sive Segmenti, sive Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis planorum illorum (vel arcuum plana illa jungentium,) ad quatuor rectos. C.

Triangulum sphæricum, (arcibus circulorum maximorum terminatum,) eam rationem habet ad circulum in sphæra maximum; quam habet excessus aggregati omnium angulorum supra duos rectos, ad duos rectos. Seu (quod tantundem valet) æquatur factio ex Radio in Arcum circuli maximi, qui isti angulorum excessui subten dit, ducto. D.

Trilinea circulorum minorum arcibus terminata (vel partim his, partim arcibus maximorum,) à Triangulis Sphæricis modò dictis, differunt Bilineis notæ magnitudinis. E.

Adeoque

F. Adeoque, Figuræ cujuscvis, in superficie sphærica, planorum sectionibus, vel circulorum quorumvis arcubus, terminata, (utpote quæ in expositarum figurarum aliquas semper resolvi possit;) Magnitudo datur.

A. **P**Offet quidem hæc Proposito, non tantum de Magnitudine, sed & de Centro gravitatis, istiusmodi Figuræ, ex præcedente deduci: Cum possit omnis istiusmodi in Sphæricâ superficie figura, in Trilinea Rectangula resolvi, quæ in Cylindri recti superficiales Ungulas expandi poterunt: Quarum quidem tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, (per præcedentem,) haberi poterunt; atque inde ad Trilinea Sphærica transferri, ope prop. 14. hujus.

Verum cum ita calculus futurus sit perplexior quàm ut illum jam aggredi libeat, (propter varias se mutuo decussantes Sphæaræ diametros ad quas exigenda essent ea Trilinea Sphærica, eorumque partes:) libet aliâ methodo Figurarum illarum Magnitudines exhibere.

B. Superficie Sphæricæ Segmentum, (Plano abscissum;) vel etiam **Fig. 191.** Superficialis Zona Sphærica, (duobus Planis Parallelis interjecta;) eam habet rationem ad totam Sphæaræ Superficiem (hoc est, ad quatuor Circulos Maximos;) quam habet Axis portio, Plano seu Planis illis terminata, ad Axem totum. Puta, quanta pars est AV , vel VC , totius Axis Aa ; eadem pars est totius Superficie Sphæricæ, Segmentum $AB\beta$, vel $B\beta D$ Zona; & sic ubique. Per § H, I. prop. 13. hujus.

C. Curva Superficies Cunei Sphærici, aut etiam Cunei Segmenti Sphærici, Zonæve, arcubus duorum circulorum in Axe coeuntium interjecti; eam habet ad totam Sphæaræ, vel totam illius Segmenti, aut Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis illorum Circulorum, ad quatuor Rectos. Quippe si intelligatur $ABDa$ Semiperipheria, circa axem Aa conversa, superficiem sphæricam describere: quam partem totius conversionis absolvit ABa , in situm $Ab a$ delata; eadem erit tum angulus BAb , quatuor rectorum; tum, integræ Peripheriæ sui circuli, arcus Bb puncto B descriptus; sui que, arcus Dd descriptus puncto D ; & sic ubique: adeoque eadem pars erit, Bilineum ADa ad A , totius Superficie Sphæricæ; & ABb , segmenti $B\beta A$; & Bbd D , Zonæ $B\beta D$: & sic ubique. Per § G. prop. 13. hujus.

Putat; Quam habet rationem Arcus Bb , vel Dd , ad suas respectivè Peri-

PROP. XXIV. De Calculo Centri Gravitatis. 475

Peripherias integras $B\beta$, vel $D\delta$; aut angulus BAb vel DAd ad quatuor rectos: eam habet rationem *Sphærici Cunei Superficies* $ABaBA$, ad totius *Sphæra* superficiem; *Cuneique Segmenti Sphærici Superficies* $ABbA$, vel $aBba$, ad respectivi *Segmenti Sphærici* superficiem $AB\beta$, vel $aB\beta$; *Cuneique Zona Sphærica Superficies* $BbdD$, ad totius *Zona* superficiem $B\beta\delta D$. Et sic ubique.

Exponatur jam, in superficie Sphæricâ, Triangulum Sphæricum ABD , circulorum Maximorum arcubus comprehensum. Qui D.
Fig. 192. quidem arcus continuati, intelligantur circulos integros absolvere. Hi Circuli cum sint in Sphæra maximi; se mutuo bisecabunt bini quilibet. Et, propter æquales angulos tum qui sunt oppositi verticales, tum qui sunt in eodem Bilineo oppositi, (puta $A = a$, & $a = a$, & sic ubique;) æqualia invicem erunt quæ sunt in contrariis Hemisphæriis Bilinea, (eorundem Circulorum contrariis Semicirculis interjecta;) puta aa , & (quod, in Schemate disruptum est & replicatum, sed in Sphærâ continuari intelligendum est,) AA ; & similiter BB , & $\beta\beta$; item DD , & $\delta\delta$. Sed &, eadem ratione, Opposita Triangula ABD , $a\beta\delta$, (propter Latera lateribus, & Angulos angulis, respective sumptis, æqualia,) erunt invicem æqualia. (Quæ est etiam *Samuelis Fosteri* nostratis demonstratio, in Collegio *Greshamensi Londini* Astronomiæ non ita pridem Professoris.)

Si autem, ex semisuperficie Sphærica $TvTvT = RP$, (hoc est, factò ex Radio in Peripheriam ducto) auferatur ABD triangulum; Residuum ($RP - ABD$) complebunt Triangula $a\tau V$ (hoc est, $aa - a\beta\delta$; hoc est, $AA - ABD$;) & $B\epsilon\tau$, (hoc est, $BB - ABD$;) & $D\epsilon V$, (hoc est, $DD - ABD$.) Hoc est, Bilinea $AA - BB + DD$, $- 3 ABD$, $= RP - ABD$. Hoc est, (transponendo) $AA - BB - DD - RP = 2 ABD$. Adeoque, quam habet rationem, excessus Bilineorum $AA - BB - DD$ supra RP , ad RP Semi-superficiem sphæricam; hoc est, quam habet rationem, Excessus angulorum $A - B - D$ supra duos rectos, ad duos rectos; seu Excessus arcuum (angulis illis competentium) supra semiperipheriam, ad semiperipheriam; eam habet $2 ABD$ duplum Trianguli, ad eandem RP Semi-superficiem sphæricam, seu duos circulos maximos; ipsûmque ABD Triangulum, ad $\frac{1}{2} RP$ circulum in sphæra maximum.

Hoc est, invertendo (posito a pro aggregato arcuum, in circulo maximo, angulis A, B, D , competentium;) ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad $a - \frac{1}{2}P$; sic Circulus in Sphæra maximus $\frac{1}{2}RP$, ad $(aR - \frac{1}{2}RP)$ triangulum sphæricum ABD . Quod itaque æquatur factò ex

P p p

Radio

476 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

Radio R , in arcum $a - \frac{1}{2}P$, qui convenit Excessui angulorum $A + B - D$ supra duos rectos.

E. Fig. 193. Esto demum Trilineum expositum ABD , cujus latera DLA , DKB , sint arcus circulorum minorum EDA , $GDBH$; (latusque BA , arcus circuli maximi.) Inveniatur circuli EDA , polus P ; & circuli $GDBH$, polus A . Transeatque per A , D , circulus maximus $AD\alpha$; & per D , B , maximus $FDB\phi$; item per P , D , maximus $PD\pi$.

Habetur itaque (per § B, C,) magnitudo tum integri Segmenti Superficialis $PEDA$, tum hujus Cunei seu portionis $PDLA$: Et (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici $PDMA$ (arcubus maximorum circulorum terminati:) Adeoque & (horum differentia) Bilinei DA magnitudo.

Similiter, (per § B, C,) habetur magnitudo tum integri segmenti $AGDBH$, tum hujus portionis $AMDKB$: Et (per § D.) Trianguli Sphærici $AMDIB$: Ergo & (horum differentia) magnitudo Bilinei DB .

(Et similiter faciendum esset, ad latus BA , si fuisset arcus circuli minoris: Cum verò sit latus illud, arcus Circuli maximi, id minime opus erit.)

Habetur autem, ut modò dictum est, (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici (arcubus maximorum circulorum comprehensi) $AMDIB$: Unde si auferatur Bilineum jam inventum DA , atque addatur Bilineum DB , habetur magnitudo Trilinei expositi $ABKDLA$: cujus latera (saltem aliqua) sunt arcus minorum circulorum.

Atque, ad eandem formam, Triangulo Sphærico, additis ablativæ, ut res postulaverit, Bilineis uno vel pluribus; habebitur area Trilinei cujusvis utut minorum circulorum arcubus comprehensi.

F. Denique; Cum nulla possit exponi Figura, in superficie sphærica, Planorum sectionibus (hoc est, circulis sive maximis sive minoribus) terminata; quæ in hujusmodi jam traditas figuras non possit resolveri: Datur istiusmodi figuræ cujusvis magnitudo. Quod erat ostendendum.

PROP.

PROP. XXV.

Segmenta Sphæræ, utcunque Planis truncatæ; Magnitudinem datam habent.

Hujusmodi enim Sphæræ Segmenta qualibet, terminantur, partim portione residua Superficie Sphæricæ, partim planis truncantibus.

Intelligatur autem (ut ad prop. 16. hujus) ea quæ restat superficiei sphæricæ portio, (cujus magnitudo data est, per prop. præced.) in particulas quantumlibet minutas distribui, totam complentes; quibus insistere intelligantur totidem pyramides exiguæ, communem verticem habentes Sphæræ Centrum; & communem altitudinem, Sphæræ Radium. Adeoque, Radii Triens, in curvam illam superficiem ductus, (utpote Basiura illarum aggregatum,) exhibebit, Pyramidum live Sectorum Sphæricorum illorum, portioni curvæ insistentium, Aggregatum.

Plana vero, quæ, unâ cum hac curvâ superficie, totam complent, sunt etiam notæ magnitudinis: Utpote quæ sunt vel Figuræ Rectilineæ, vel saltem Circulorum portiones, quarum Magnitudo habetur, per prop. 15. hujus. Harumque item (utpote positione datarum) dantur Distantiæ à Centro Sphæræ; Quarum quidem trientes, in sua respectivè Plana ducti, exhibent Pyramidum magnitudines, Planis illis insistentium, & communem verticem habentium Centrum Sphæræ.

Quæ quidem Pyramides, additæ vel subductæ (prout res tulerit) Aggregato illi Pyramidum superficiei curvæ insistentium, jam invento; exhibent Expositi Segmenti magnitudinem.

Datur igitur istiusmodi cujusvis segmenti sphæræ, planis utcunque truncatæ, Magnitudo. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

UT verò Propositionis hujus, & simul præcedentis, Praxis, Exemplo aliquo illustrata, facilius reddatur: Libet hîc subungere, Problematis Solutionem, quod ante aliquot annos mihi solvendam

Ppp 2

pro-

proposuit Vir ingeniosus, & rerum Mathematicarum peritus, D. *Joh. Collins*, (Augusti. 12^o 1665.) tanquam rem maxime desideratam; & quotidiani usus, in mensuraadis vasis vinariis & cervisiariis, partim depletis.

Cujus ego Problematis Solutionem, ejusque Demonstrationem, eodem statim die, summatim ei exhibui; (& quantum scio, omnium primus absolvi) ad hunc sensum. Nempe,

“Redigendum esse expositum Dolii vel Sphaeroideos truncati Frustum, ad inscriptæ Sphaeræ Frustum correspondens; ad quod, Frustum illud Sphaeroideos eam habebit rationem, quam habet Sphaeroideos Axis, ad Diametrum Sphaeræ; propter Plana Sphaeroideos parallelis Sphaeræ Planis correspondentibus æqualia, sed ab invicem eâ ratione longius remota, quam habet Axis Sphaeroideos ad Axem Sphaeræ.

“Illud autem Sphaeræ Frustum, considerandum esse tanquam ex Pyramidibus constatum, communem verticem habentibus Centrum Sphaeræ; basésque in Frusti Superficie continuas, ipsam complentes.

“Quorum quidem quæ Bases Planas habent, facile exhiberi posse; cum plana illa alia non sint quàm Circulorum portiones, notis methodis exhibendæ; earumque à Centro distantia (altitudinem determinantes) facile exquirantur.

“Quod autem ad eas innumeras attinet, quarum exiguae bases superficiem curvam complent: cum basium aggregatum sit ea ipsa superficies curva; & communis omnium Altitudo, Radius sphaeræ; id unum superesse posse difficultatis, ut exhibeatur illa Superficies curva.

“Id autem quicquid sic difficultatis, à me jam olim explicatum esse in subjunctis ad Calcem mei *de Cycloide Tractatus*, pag. 122. (sed quæ inferenda fuerant pag. 23. § 68.) ubi docetur, *Figuram quamlibet, in Superficie Sphaeræ, Circulorum quorumvis (sive maximorum sive minorum) arcibus terminatam, Quadrare.*

“Adeoque Rem totam, inter Desiderata, non esse censendam; ut quam ego jam tum ante plures annos absolveram, & scripto edito (anno 1659.) vulgaveram.

“Quod ipsum paucis post diebus, latius aliquantò explicatum, ad illud etiam misi, hac fere quæ sequitur verborum formâ.

PROP.

PROP. XXVI.

Fig. 194.

Sit Dolium $\Sigma \sigma \rho \sigma \Sigma P$, (Sphæroidæos $P \beta \rho \beta$ Frustum, parallelis circulis æqualibus $\Sigma \sigma$, $\Sigma \sigma$, abscissum,) situ Horizontali positum. Datæque sint; tum Circuli Medii $P \rho$, Semidiameter CP ; tum Extremorum $\Sigma \sigma$, Semidiameter $\Delta \Sigma$; Vasisque Longitudo $\Delta \Delta$, (cujus Semissis $C \Delta$.) Summæque Liquoris $\Phi K \Phi$, Altitudo, supra infræ C centrum, CK ; quæ minor sit quam $\Delta \Sigma$. Quæritur, Liquoris contenti quantitas; seu Segmenti Majoris $\Phi \sigma \rho \sigma \Phi$, Minorisve $\Phi \Sigma P \Sigma \Phi$, Magnitudo.

Sphæroidi $P \beta \rho \beta$, inscripta intelligatur Sphæra $P B \rho B$: quam secent Circuli $S s$, $S s$, iplis $\Sigma \sigma$, $\Sigma \sigma$, æquales & paralleli, Planumque $\Phi K \Phi$ Horizontale, exhibens in Sphæra Circulum $L E L$, Ellipti $\lambda \Phi \lambda$ in Sphæroide respondentem. Eritque Sphæra Portio $F s \rho s F$, expositæ Sphæroidæos Portioni $\Phi \sigma \rho \sigma \Phi$ correspondens.

Estque hæc Sphæra Portio; idem atque Semisegmentum $D s \rho s D$ (quod Semi-dolio. respondet, estque magnitudinis notis methodis investigabilis; & speciatim per prop. præced. vel prop. 16. hujus.) Additâ, Demptâve, (prout $F K \Phi$ supra infræ Centrum fuerit,) Segmenti Portione $F F D D$; planis $F E$, $D D$, $F D$, $F D$, interjectâ; quam portionem investigare, est potissima totius negotii difficultas.

(Quò autem multiplices Solidi sectiones, in plano utcunque exhibitæ, melius percipiantur: Rem eam pluribus figuris explicare visum est: Quarum fig. 194. exhibet Sphæram Sphæroidi inscriptam, simplicissima projectione. Fig. 195. exhibet Sphæram, figuræ præcedenti exemptam, atque aliter projectam, quò partes ejus deregantur: Et fig. 196. ejusdem Octantem (planis quadrantalibus $P C c$, $P C B$, $c C B$, toti exsectum,) quò minor sit linearum confusio. Item duos circulos $S s$, fig. 194. hoc est $S f d s d f S$, fig. 195. seorsum exhibet

Fig. 194.

195.

196.

197.

198.

Fig. 194. hibet figura 197. Circulumque LFKFL fig. 194. hoc est, LfkfLfkfL fig. 195. seorsum exhibet figura 198.)

195,
196,
197,
198. Constat autem ea Portio FFDD, (potissimum investiganda,) ex Quinque Solidis Pyramidalibus, Conicisve: Quorum communis Vertex, est C Centrum: Basésque, ipsæ Portionis Superficies FD, FD, FF, planæ; duæque Curvæ DFFD, DFFD, fig. 194. (seu potius dffd, dffd, fig. 195.) Planis illis, planoque DD, terminatæ: Altitudinésque, Superficierum illarum à Centro Distantiæ.

Quantæque sint illæ Superficies Curvæ DFKFD, fig. 194. seu potius dfkfd, fig. 195. (quæ sola superest difficultas; reliqua siquidem, notis methodis, facillè investigantur;) invenire docui, in subjunctis meo, *De Cycloide*, Tractatui, pag. 122. atque hic in prop. 24. hujus.

Nempe; Si intelligatur (fig. 195, 196.) fgf, arcus Circuli Maximi, ipsi fkf arcui Minoris Circuli conterminus; & compleatur Pfgf Triangulum Sphæricum: Hujus Trianguli Sphærici Pfgf magnitudo innotescit; utpote tum alibi tradita, tum hic ad § D. prop. 24. hujus. Atque innotescit Trilinei Pfkf magnitudo, ex cognito angulo fPf, seu ratione arcûs fkf ad peripheriam sui circuli: (per § B, C, prop. 24. hujus.) Adeoque & magnitudo Bilinei fkgf, illorum differentia. Sed &, ex cognito Angulo gBd, seu Arcûs fd ratione ad Peripheriam sui circuli, similiter innotescit magnitudo Quadrilinei Sphærici dfgfd. Ergo & (dempto Bilineo) Quadrilinei dfkfd magnitudo.

Denique; Ex magnitudine Portionis Segmenti Sphærici sic inventâ; Habetur etiam Portionis Segmenti Sphæroideos correspondentis Magnitudo. Est utique hæc ad illam, ut Sphæroides ad inscriptam Sphæram; (sive ut Axiom Major ad Minorem;) propter Plana Planis respectivè sumptis æqualia, & ad Axes in eâ ratione constitutos ordinatim-posita. Quæ est totius Problematis constructio.

Calculus huic Constructioni respondens.

1. Data Circuli, in Sphæroide Medii, Semidiameter; seu Radius inscriptæ Sphære; $CP = CB = Cs = CS = Cf$; dicatur R : Ejusque Peripheriæ Quadrans, Q , quæ sit & Anguli Recti mensura.

2. Data Circulorum, in Sphæroideos frusto, Extremorum, (fig. 197. seorsum etiam exhibitorum) Semidiameter $^s \Sigma = DS = Dd$; dicatur

PROP. XXVI. De Calculo Centri Gravitatis. 481

dicatur $a R$. (Facto scilicet, ut CP , ad DS ; sic 1 ad a . Et sic *Fig. 194,*
alibi.) Estque Sinus Rectus arcus $BS = Bf$. *195,*

3. Hujus Co-sinus, seu Sinus Complementi, hoc est, Sinus Arcus *196,*
 $SP = fg$; est $HS = CD = KF = \sqrt{R^2 - a^2 R^2} = R\sqrt{1 - a^2}$. *197.*
Qui dicatur (brevitatis gratia) αR .

4. Ut BB ad SS , seu CB ad HS ; hoc est, ut R ad αR , seu
 1 ad $\alpha = \sqrt{1 - a^2}$; Sic est integra Sphærae superficies, seu Qua-
tuor Circuli maximi, $8 RQ$; ad superficiem Zonæ $SSSS$, =
 $8 \alpha RQ$.

5. Hæc superficies, ducta in $\frac{1}{3} R$; exhibet magnitudinem Zonæ
Solidæ, (intellige, Segmenti $SDSSDS$, exemptis duobus Conis,
 SCS, SCS .) $SCSPSCSP = \frac{2}{3} \alpha R^2 Q$.

6. Ut Quadratum Radii CP ; ad Quadratum Radii DS ; hoc est,
ut R^2 ad $a^2 R^2$, seu ut 1 ad a^2 ; Sic est Circulus Maximus $2 RQ$, ad
Circulum $SDS = 2 a^2 RQ$.

7. Circulus hic SDS , ductus in $\frac{1}{3} CD = \frac{1}{3} \alpha R$; exhibet Magni-
tudinem Coni $SCSD$, = $\frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 Q$.

8. Hujusmodi Coni duo, unâ cum Zonâ Solidâ (§ 5. inventâ,) ex-
hibent Segmentum Solidum $SDSSDS$, = $\frac{2}{3} \alpha R^2 Q - \frac{4}{3} \alpha a^2 R^2 Q$. A-
deoque Semisolidum $DSSD$, = $\frac{2}{3} \alpha R^2 Q - \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 Q$.

9. Data summi Liquoris EKF , supra infrâve Centrum, Altitudo
 $CK = DF$, dicatur $b R$. Estque Sinus Rectus arcus BL .

10. Hujusque Co-sinus, seu Sinus Arcus $LP = fP$; est KL
= $Kk = \sqrt{R^2 - b^2 R^2} = R\sqrt{1 - b^2}$. Qui dicatur (brevi-
tatis ergô) βR .

11. Ut $KL = \beta R$, ad R ; seu ut $\sqrt{1 - b^2}$ ad 1 ; Sic est recta
 $KF = \alpha R$, ad $\frac{\alpha}{\beta} R = R\sqrt{\frac{1 - a^2}{1 - b^2}}$; sinum arcus fk in suo circu-
lo, sive Anguli $fKk = fPk = fPg$; Qui (per Canonem Sinuum
inveniendus) dicatur $c Q$.

12. Hujusque Co-sinus seu Sinus Arcus fL in suo circulo, seu
Anguli $fKL = fPL$; est $\sqrt{R^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} R^2} = R\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}} =$
 $\frac{R}{\beta} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2} = \frac{R}{\beta} \sqrt{a^2 - b^2}$.

13. Ut $DS = \alpha R$, ad R ; seu ut α ad 1 ; Sic $DF = b R$, ad
 $\frac{b}{\alpha} R$, Sinum Arcus fd in suo Circulo, seu Anguli $fDd = gBd$.
Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $d Q$. *14. Ut*

482 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

Fig. 194, 195, 196. 14. Ut tota Peripheria, seu Quatuor Recti, $4Q$; ad Arcum seu Angulum dQ ; five ut 4 ad d : Sic est Zonæ totius $SssS$ superficies, $8aRQ$; ad Quadrilinium Sphæricum $dfgfd$, $=2daRQ$.

15. Ut $Pp=2R$, ad $PK=CP-CK=R-bR$; five ut 2, ad $1-b$: Sic integra Sphære superficies, $8RQ$; ad segmenti $PLKLP$ superficiem, $=4RQ-4bRQ$.

16. Ut tota Peripheria, seu quatuor Recti, $4Q$; ad Angulum $fPf=2fPg=2cQ$; five ut 2 ad c : Sic Segmenti $PLKLP$ superficies, $4RQ-4bRQ$; ad Trilineum Sphæricum $PfkfP$, $=2cRQ-2bcRQ$.

17. In Triangulo Sphærico Rectangulo fgP ; Ut Co-sinus arcus fg , seu arcus B Sinus aR ; ad Co-sinum Anguli fPg , seu Anguli fPL Sinum, $\frac{R}{\beta} \sqrt{a^2-b^2}$: Sive ut $a\beta$ ad $\sqrt{a^2-b^2}$: Sic Radius, ad $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a\beta}R$ Sinum Anguli Pfg . (Nempe per doctrinam Trigonometricam.) Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur eQ .

18. Ut duo Anguli Recti, $2Q$; ad Trium Angulorum, Trianguli sphærici $Pfgf$, excessum supra Duos rectos, $2cQ-2eQ-2Q$: Hoc est, ut 1 ad $c-e-1$: Sic est Circulus in Sphærâ Maximus, $2RQ$; ad istius Trianguli Sphærici $Pfgf$ Magnitudinem, $2cRQ-2eRQ-2RQ$.

19. Triangulum hoc, $Pfgf$, ex Trilineo $Pfkf$ (invento § 16.) exemptum, relinquit Bilineum $fkfgf=2RQ-2cRQ-2bcRQ$.

20. Atque hoc Bilineum, ex Quadrilineo $dfgfd$ (invento § 14.) exemptum, relinquit Quadrilineum $dfkfd$, $=2adRQ+2bcRQ-2cRQ-2RQ$.

21. Atque hoc Quadrilineum, in $\frac{1}{3}R$ ductum; exhibet Sectorem Sphæricum $Cdkfd$, $=\frac{2}{3}adR^2Q+\frac{2}{3}bcR^2Q+\frac{2}{3}eR^2Q-\frac{2}{3}R^2Q$.

22. Ut $CP=R$, ad $Kk=KL=\beta R$; (fig. 195, 198.) five ut 1 ad β : Sic Anguli fKk arcus cQ , ad longitudinem arcus fk , $=\beta cQ$; Et sic Anguli $fKF=fKL$ Sinus, $\frac{R}{\beta} \sqrt{a^2-b^2}$: ad rectam fF , $=R\sqrt{a^2-b^2}$.

23.

PROP. XXVI. De Calculo Centri Gravitatis. 483

23. $Kk = \beta R$, ducta in $fk = \beta c \mathcal{Q}$; exhibet Sectorem fKf Fig. 194,
 $= \frac{1}{2} \beta c R \mathcal{Q} = c R \mathcal{Q} - b^2 c R \mathcal{Q}$. Atque hic ductus in $\frac{1}{3} CK$ 195,
 $= \frac{1}{3} \beta R$, exhibet Coni portionem $CfKf = \frac{1}{3} \beta c R^2 \mathcal{Q} - \frac{1}{3} \beta^3 c R^2 \mathcal{Q}$. 196.

24. $KF = \alpha R$, ducta in $fF = R \sqrt{a^2 - b^2}$: exhibet Triangulum $KfFf = \alpha R^2 \sqrt{a^2 - b^2}$. Atque hoc ductum in $\frac{1}{3} CK$
 $= \frac{1}{3} \beta R$, exhibet Pyramidem $CKfFf = \frac{1}{3} \alpha \beta R^3 \sqrt{a^2 - b^2}$.
 Cui (propter $CK = DF$, $KF = CD$, adeoque $\frac{1}{3} CK \times KF \times Ff$
 $= \frac{1}{3} CD \times DF \times Ff$), æqualis est Pyramis $CDff$.

25. Ut $CP = R$, ad $DS = \alpha R$; seu ut 1 ad α : Sic Arcus
 Anguli $fDd = d \mathcal{Q}$, ad Arcum $fd = \alpha d \mathcal{Q}$. Qui ductus in Dd
 $= DS = \alpha R$, exhibet binos Sectores, $2 fDd = \alpha^2 d R \mathcal{Q}$. Qui
 ducti in $\frac{1}{3} CD = \frac{1}{3} \alpha R$, exhibent binas Coni Portiones, $2 CfDd$,
 $= \frac{1}{3} \alpha^2 d R^2 \mathcal{Q}$.

26. Additis igitur Binis Sectoribus (§ 21.) $2 Cd f k f d =$
 $\frac{2}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} \beta c R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} R^2 \mathcal{Q}$: Atque Binis Co-
 ni portionibus (§ 23.) $2 CfKf = \frac{2}{3} \beta c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} \beta^3 c R^2 \mathcal{Q}$; Bi-
 nisque Pyramidibus (§ 24.) $2 CKf f = \frac{2}{3} \alpha \beta R^3 \sqrt{a^2 - b^2}$:
 (quæ cum binis illis portionibus Coni, complent Solidum Conicum,
 basis quadrilinea, $CfFf k f Ff k$;) Binisque Pyramidibus (§ 24.)
 $2 CDff = \frac{2}{3} \alpha \beta R^3 \sqrt{a^2 - b^2}$; & bis binis Coni portionibus
 (§ 25.) $4 CfDd = \frac{4}{3} \alpha^2 d R^2 \mathcal{Q}$ (quæ cum binis Pyramidibus
 $CDff$, complent bina Solida Conica $Cd d f f$;) Habetur Segmenti
 Portio $d d d f f f f f = \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha^2 d R^2 \mathcal{Q} + 2 \beta c R^2 \mathcal{Q}$
 $- \frac{2}{3} \beta^3 c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} \alpha \beta R^3 \sqrt{a^2 - b^2}$.

27. Atque hoc Additum vel Subductum (prout Segmentum Ma-
 jus, Minusve requiratur) Semisegmento (§ 8.) $d s d C d s d = \frac{2}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q}$
 $+ \frac{2}{3} \alpha^2 R^2 \mathcal{Q}$: Exhibet Sphæræ Segmentum Majus, Minusve;
 $F s p s F K$, vel $FSP SFK$; $= \frac{2}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} \alpha^2 R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q}$
 $+ \frac{2}{3} \alpha^2 d R^2 \mathcal{Q} + 2 \beta c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} \beta^3 c R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} R^2 \mathcal{Q}$
 $- \frac{2}{3} \alpha \beta R^3 \sqrt{a^2 - b^2}$.

28. Denique; Data Vasis Semi-longitudo, seu ratio $C \beta$, ad CD ;
 hoc est, Ratio $C \beta$, ad CD ; ponatur ut f ad 1. Eiusque expositum
 Sphæroides Segmentum Majus, Minusve; $\Phi \sigma p \sigma \Phi$, vel $\Phi \Sigma P \Sigma \Phi$;
 $= \frac{4}{3} f \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} f \alpha^2 R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} f \alpha d R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} f \alpha^2 d R^2 \mathcal{Q} + 2 f \beta c R^2 \mathcal{Q}$
 $+ \frac{2}{3} f \beta^3 c R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} f c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} f R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} f \alpha \beta R^3 \sqrt{a^2 - b^2}$. Quod
 propositum erat inquirendum.

Fig. 194,

Calculi Synopsis.

- 195, § 1. R ; Data Semidiameter Major, seu Radius inscriptæ Sphæræ; CP.
 196, § 2. $a R$; Data Semidiameter Minor; D S.
 197, § 9. $b R$; Data Altitudo supra infrave Centrum; CK.
 198, § 28. $f R$; Semi-longitudo Conoideos; C β .
 § 3. $a = \sqrt{1 - a^2}$.
 § 10. $\beta = \sqrt{1 - b^2}$.
 § 1. Q; Angulus Rectus; vel Quadrans Peripheriæ Circuli Maximi.
 § 11. c Q } Anguli, vel Arcus Circuli
 § 13. d Q } maximi, respondentes Sini-
 § 17. e Q } bus rectis
 $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\beta} R. \\ \frac{b}{a} R. \\ \sqrt{1 - a^2 - b^2} R. \end{array} \right.$
 $+\frac{2}{3} R^2 Q$; Sphæra integra, B p B P.
 $+\frac{2}{3} R^2 Q$; Hemisphærium, B B P.
 $+\frac{2}{3} b R^2 Q$; Zona Solida BLCLB, } Segmentum B L L B.
 $+\frac{2}{3} b \beta R^2 Q$; Conus L C L K, }
 $+\frac{2}{3} a R^2 Q$; Zona Solida BSCSB, } Segmentum B S S B.
 $+\frac{2}{3} a \beta R^2 Q$; Conus S C S H, }
 § 5. $+\frac{2}{3} a R^2 Q$, Semizona solida } § 8.
 S C S P, } Semisegmentum
 § 7. $+\frac{2}{3} a a^2 R^2 Q$, duo Semiconi } S D D S P
 2 D C S, }
 § 14. $+\frac{2}{3} a d R^2 Q$, } § 20. 21. }
 § 19. $+\frac{2}{3} e R^2 Q$, } duo Sectores }
 § 19. $-\frac{2}{3} R^2 Q$, } 2 FFCDD, seu po- }
 § 19. $+\frac{2}{3} b c R^2 Q$, } tius 2 C f k f d d, }
 § 23. $+\frac{2}{3} b c R^2 Q$, } duæ portiones } § 26.
 § 23. $-\frac{2}{3} b^3 c R^2 Q$, } Coni, 2 CKkf, } Py- }
 § 24. $+\frac{2}{3} a b R^3 \sqrt{1 - a^2 - b^2}$; duæ } ram. }
 Pyramides, 2 CK f f f, } FCF }
 § 24. $+\frac{2}{3} a b R^3 \sqrt{1 - a^2 - b^2}$; } § 26.
 duæ Pyramides, 2 CD f f f, } 2 Pyram. }
 § 25. $+\frac{2}{3} a a^2 d R^2 Q$, bis binæ } F C D }
 Portiones Coni, 2 CD f d, }
 § 28. Hæc ducta in f ; sunt Homologæ partes Conoideos.

Exemplum

PROP. XXVI. De Calculo Centri Gravitatis. 485

Exemplum Calculi.

Posito $R = 1$. Circulus Maximus, $2RQ = 3.1415926\frac{1}{2}$ Fig. 194,
 Erit $Q = 1.5707963\frac{1}{4}$ Superficies Sphaerae, $8RQ = 12.5663706$ 195.
 $\frac{1}{2}Q = 0.5235987\frac{1}{4}$ Superf. Hemisphaerii, $4RQ = 6.2831853$
 Sphaera integra, Bp B P, $\frac{4}{3}R^2Q$, $= 4.1887902$
 Hemisphaerium, B B P, $\frac{2}{3}R^2Q$, $= 2.0943951$

Casus I.

$a = 0.75$ $a^2 = 0.5625$ $\alpha^2 = 1 - a^2 = 0.4375$ $\alpha = 0.6614378\frac{1}{4}$
 $b = 0.5$ $b^2 = 0.25$ $\beta^2 = 1 - b^2 = 0.75$ $\beta = 0.8660254$
 $a^2 - b^2 = \beta^2 - a^2 = 0.3125$ $\sqrt{a^2 - b^2} = 0.5590169$
 $4 + 2a^2 = 5.125$ $4\alpha + 2a^2\alpha = 3.3898688\frac{1}{2}$

Segmentum SspCP, vel semifegmentum SDDSP,

$$\frac{4 + 2a^2}{3} \alpha R^2 Q = 1.7749312$$

Segmentum integrum SspsSP, (istius duplum,) $= 3.5498624$

Segmentum SsB, vel 2 SDB, (=BBP - SDDSP,) $= 0.3194639$

Semifegmentum SDB, (istius semifis,) $= 0.1597319\frac{1}{2}$

$$4 + 2a^2 = 5.125 \quad 4\alpha + 2a^2\alpha = 3.3898688\frac{1}{2}$$

Segmentum BSSB, $\frac{4 + 2a^2}{3} \alpha R^2 Q$, $= 1.9144080$

Segmentum SSP, (=BBP - BSSB,) $= 0.1799871$

Segmentum DSSD, (=SDDSP - SSP

$$= BSSB - 2SDB,) = 1.5949441$$

$$4 + 2\beta^2 = 5.5 \quad 4\beta + 2\beta^2\beta = 2.75$$

Segmentum BLLB, $\frac{4 + 2\beta^2}{3} \beta R^2 Q$, $= 1.4398966\frac{1}{2}$

Segmentum LLP, (=BBP - BLLB,) $= 0.6544984\frac{1}{2}$

Segmentum LSSL, (=BSSB - BLLB,) $= 0.4745113\frac{1}{2}$

$$\frac{\alpha}{\beta} R = 0.7637626\frac{1}{6} \text{ Sin. An. gr. } 49.47', 8225. = \frac{0.5533005}{1.0000000} Q = cQ.$$

$$\frac{b}{a} R = 0.6666666\frac{2}{3} \text{ Sin. An. gr. } 41.48', 6186. = \frac{0.4645590}{1.0000000} Q = dQ.$$

$$a\beta = 0.6495190\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a^2 - b^2} : R = 0.8606628\frac{1}{3} \quad \text{Sin. Ang. gr. } 59.23', 4658$$

$$= \frac{0.6599010}{1.0000000} Q = eQ.$$

Qq q 2

6=

486 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 194. $c=0.5533005$ $d=0.4645590$ $e=0.6599010$
 195. (Verum hic, adeoque in iis quæ hinc dependent, ultima nota;
 fortassis & penultima, sunt in ambiguo; eò quod Canon Sinuum ad
 tantam ~~acuratiorem~~ vix patitur pervenire.)

$$6b-2b^3=2.75 \quad 6bc-2b^3c=1.5215764 \quad 4c=2.6396040$$

$$+\frac{6-2b^2}{3}bcR^2Q=0.7066955$$

$$+\frac{4+2a^2}{3}adR^2Q=0.8245649$$

$$+\frac{4}{3}cR^2Q=1.3820935$$

$$-\frac{4}{3}R^2Q=-2.0943951$$

$$+\frac{4}{3}abR^3\sqrt{a^2-b^2}=0.2465033$$

$$\text{Fruſti Sphae Major, FſpsF, } (=SDDSP+DFFD)=2.9303933$$

$$\text{rici Portio Minor, FſpsF, } (=SDDSP-DFFD)=0.6194691$$

$$\text{Abſciſſa 2LFDB, } (=BLLB-DFFD)=0.2844345\frac{1}{2}$$

$$\text{LFDB}=0.1422173-$$

$$2SFL, (=LLP-FSPSF=2EDB-2LFDB)=0.0350293\frac{1}{2}$$

$$SFL=0.0175147-$$

Casus II.

$$a=0.8 \quad a^2=0.64 \quad a^2=1-a^2=0.36 \quad a=0.6$$

$$b=0.6 \quad b^2=0.36 \quad b^2=1-b^2=0.64 \quad b=0.8$$

$$a^2-b^2=b^2-a^2=0.28 \quad \sqrt{a^2-b^2}=0.5291502\frac{1}{2}+$$

$$4+2a^2=5.28 \quad 4a+2a^2a=3.168$$

$$SDDSP=\frac{4+2a^2}{3}aR^2Q=1.6587609+$$

$$SspsSP (=2SDDSP)=3.3175218+$$

$$SsB=2SDB (=BBP-SDDSP)=0.4356342-$$

$$SDB=0.2178171-$$

$$4+2a^2=4.72 \quad 4a+2a^2a=3.776$$

$$BSSB=\frac{4+2a^2}{3}aR^2Q=1.9771090+$$

$$SSP (=BBP-BSSB)=0.1172861+$$

$$DSSD (=SDDSP-SSP=BSSB-2SDB)=1.5414748$$

$$4+2b^2=5.28 \quad 4b+2b^2b=3.168$$

$$BLLB=\frac{4+2b^2}{3}bR^2Q=1.6587609+$$

$$LLP (=BBP-BLLB)=0.4356342-$$

$$LSSL (=BSSB-BLLB)=0.3183481-$$

PROP. XXV. De Calculo Centri Gravitatis. 487

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} R &= 0.75 \quad \text{Sinus Ang. gr. } 48.35', 4229 = \frac{0.5398931}{1.0000000} Q = c Q. & \text{Fig. 194,} \\ \frac{b}{a} R &= 0.75 \quad \text{Sinus Ang. gr. } 48.35', 4229 = \frac{0.5398931}{1.0000000} Q = d Q. & 195, \\ & & 196, \\ & & 197, \\ & & 198. \end{aligned}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a b} R = 0.64 \quad \text{Sinus Ang. gr. } 55.46', 2682$$

$$= \frac{0.6196793}{1.0000000} Q = e Q.$$

$$\begin{aligned} c &= 0.5398931 & d &= 0.5398931 & e &= 0.6196793 \\ 6b - 2b^3 &= 3.168 & 6bc - 2b^3c &= 1.7103814 & 4e &= 2.4787172 \end{aligned}$$

$$- \frac{6 - 2b^2}{3} bc R^2 Q = 0.8955536$$

$$\left. \begin{aligned} - \frac{4 - 2a^2}{3} a d R^2 Q &= 0.8955536 \\ + \frac{4}{3} e R^2 Q &= 1.2978533 \\ - \frac{4}{3} R^2 Q &= -2.0943951 \\ + \frac{4}{3} a b R^3 \sqrt{a^2 - b^2} &= 0.2539921 \end{aligned} \right\} = \text{Intersegment. DFFD,} \\ = 1.2485575. \text{ saltem} \\ 1.24856 \text{ proxime.}$$

$$\begin{aligned} \text{Fruſti Sphae. } \left\{ \begin{array}{l} \text{Major, F s p s F, } (= \text{SDDSP} + \text{DFFD}) = 2.9073184 \\ \text{rici, Portio } \left\{ \begin{array}{l} \text{Minor, FSPSF, } (= \text{SDDSP} - \text{DFFD}) = 0.4102034 \\ 2 \text{LFDB } (= \text{BLLB} - \text{DFFD}) = 0.4102034 \\ \text{LFDB} = 0.2051017 \\ 2 \text{SEL } (= \text{LLP} - \text{FSPSF} = 2 \text{SDB} - 2 \text{LFDB}) = 0.0254308 \\ \text{SEL} = 0.0127154 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Atque ad eandem formam procedendum erit in aliis casibus quibuscunque prout alii atque alii valores ponuntur datarum magnitudinum a & b .

Inventis autem (pro casibus assignatis quibuscunque) Portionibus Fruſti Sphaerici, habentur correspondentes portiones Fruſti Sphaeroideos, ductis singulis in f ; quaecunque fuerit ea ratio, Axis Sphaeroideos ad Diametrum Sphaerae; ($\beta \beta$ ad $B B$, vel $C \beta$ ad $C B = C P$, vel $C \beta = K \phi$ ad $C D = K F = H S$ Co-finum dati $D S$, in Circulo Radii $C P$;) quam appellamus, f ad 1.

PROP.

Fig. 199,
200.

PROP. XXVII.

- A.B. Figura Spiralis (lineâ Spirali à principio orsâ, & rectâ conterminâ, terminata) est contermini Sectoris Triens: Toties repetitis omnibus, quoties iteratò describuntur.
- C. Sumptisque angulis A M T, A M T, &c. arithmetice proportionalibus; si Figura Spiralis primo conveniens ponatur 1; eadem per duos continuata, erit 8; per tres, 27; per quatuor, 64; & sic deinceps, secundum numeros cubos continuè sequentes.
- B. Totâque figura circulationis primæ, est contermini circuli primi Triens; & duarum circulationum (repetito quod in secundâ iteratò describitur, quod ubique intelligendum est,) ejusdem Circuli primi Octo trientes; Trium Circulationum, ejusdem viginti septem Trientes, (seu totius Noncuplum;) Quatuor Circulationum, ejusdem Sexaginta quatuor Trientes, & sic deinceps.
- Et, universaliter, (Posito R pro circuli primi Radio; P , pro ejusdem peripheria; angulique circulationis quousque libet continuatæ ratione ad quatuor rectos; vel correspondentis arcus circuli Primi, ad integram ejus Peripheriam; ut a ad P ;) Figuræ Spirales sic descriptæ (repetitis toties omnibus quoties describuntur) Magnitudo est $\frac{a^3 R}{6 P^2}$.
- D. Adcòque, quæ continuis Circulationum angulis æqualibus conveniunt figuræ Spirales, sunt ut numerorum cuborum

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 489

rum continuè sequentium 0, 1, 8, 27, 64, 125, &c. Differentiæ ; 1, 7, 19, 37, 61, &c.

Et speciatim quod Circulatione Primâ describitur, est contermini Circuli primi Triens; quod secundâ, ejusdem Primi Circuli Septem trientes; quod Tertiâ, ejusdem Trientes Novendecim; quod Quartâ, ejusdem Trientes Triginta-septem; quod Quintâ, ejusdem Trientes Unus & sexaginta. Et sic deinceps.

Figuræ Spiralis (à Principio orsæ) quousque libet continuatæ, toties repetitis omnibus quoties iteratò describuntur: (posito s pro sinu recto anguli circulationis, ad Radium R ; & x pro sinu complementi; ipsoque s , pro Semicirculis secundo, quarto, sexto, octavo, cæterisque in locis paribus, per contrarium signum semper exposito, utpote ad contrarias diametri partes posito:) Momentum respectu rectæ PMF, est

$$\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3};$$

Centrique gravitatis inde distantia,

$$\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 + 2a^3vR}{a^3P};$$

Et quidem vel ad partes E, vel ad partes G, prout signum +, vel —, prævaluerit.

Ejusque Momentum respectu rectæ EMG,

$$\frac{6vR^3 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3};$$

Centrique gravitatis inde distantia,

$$\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P};$$

Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, prout signum +, vel —, prævaluerit.

Et speciatim, Circulationis Quadrantalís, Unius; Magnitudo, $\frac{1}{360}RP$; Respectu PMF, versus E, Momentum,

E.

H.

D.
F.

490 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

- mentum, $\frac{-32R^6 + R^4P^2}{16P^3}$; Distantia Centri gravitatis, $\frac{-768R^5 + 24R^3P^2}{P^4}$: Respectu EMG,
- I. versus P, Momentum, $\frac{384R^6 - 96R^5P + R^3P^3}{192P^3}$; Distantia, $\frac{768R^5 - 192R^4P + 2R^2P^3}{P^4}$.
- D. Duarum; Magnitudo, $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$: Respectu
- F. PMF, versus E, Momentum $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Distantia, $\frac{-48R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$: Respectu EMG,
- I. versus F, Momentum $\frac{-16R^6 + R^4P^2}{4P^3}$; Distantia, $\frac{-192R^5 + 12R^3P^2}{P^4}$.
- D. Trium; Magnitudo, $\frac{27}{384}RP = \frac{3}{128}RP$: Respectu
- F. PMF, versus G, Momentum $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$; Distantia, $\frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$: Respectu EMG, versus F, Momentum $\frac{-128R^6 - 96R^5P + 9R^3P^3}{64P^3}$; Distantia, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 54R^2P^3}{P^4}$.
- D. Quatuor; Magnitudo, $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$: Respectu PMF,
- F. versus G, Momentum, $\frac{-6R^5 + R^3P^2}{3P^2}$; Distantia, $\frac{-12R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$: Respectu EMG, versus P, $\frac{R^4}{P}$; Distantia, $\frac{6R^3}{P}$
- Quinque;

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 491

Quinque; $\frac{125}{384} RP$: Respectu P M F, versus E, D.F.

$$\text{Momentum, } \frac{-32 R^6 + 25 R^4 P^2}{16 P^3}; \text{ Distantia, } \frac{-768 R^5 + 600 R^3 P^2}{125 P^4}; \text{ Respectu E M G, versus P, I.}$$

$$\text{Momentum, } \frac{384 R^6 - 480 R^5 P + 125 R^3 P^3}{192 P^3}; \text{ Distantia, } \frac{768 R^5 - 960 R^4 P + 250 R^2 P^3}{P^4}.$$

Atque in reliquis similiter.

Adeoque; Secundæ, Magnitudo, $\frac{7}{384} RP$: Respectu PMF, D.F.

$$\text{versus E, Momentum, } \frac{96 R^6 - 48 R^5 P - 3 R^4 P^2 + 2 R^3 P^3}{48 P^3};$$

$$\text{Distantia, } \frac{768 R^5 - 384 R^4 P - 24 R^3 P^2 + 16 R^2 P^3}{7 P^4};$$

Respectu E M G, versus F, momentum, I.

$$\frac{-384 R^6 - 96 R^5 P + 48 R^4 P^2 + R^3 P^3}{192 P^3}; \text{ Distantia,}$$

$$\frac{-768 R^5 - 192 R^4 P + 96 R^3 P^2 + 2 R^2 P^3}{7 P^4}.$$

Tertiæ; Magnitudo, $\frac{12}{384} RP$: Respectu P M F, versus G, D.F.

$$\text{Momentum, } \frac{-96 R^6 - 48 R^5 P + 27 R^4 P^2 + 2 R^3 P^3}{48 P^3};$$

$$\text{Distantia, } \frac{-768 R^5 - 384 R^4 P + 216 R^3 P^2 + 16 R^2 P^3}{19 P^4};$$

Respectu E M G, versus F, Momentum, I.

$$\frac{128 R^6 - 96 R^5 P - 16 R^4 P^2 + 9 R^3 P^3}{64 P^3}; \text{ Distantia,}$$

$$\frac{768 R^5 - 576 R^4 P - 96 R^3 P^2 + 54 R^2 P^3}{19 P^4}.$$

Quartæ; Magnitudo, $\frac{37}{384} RP$: Respectu P M F, versus D.F.
R r r G;

492 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

G, Momentum, $\frac{96R^6 - 96R^5P - 27R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$;

I. Respectu E M G, versus P, Momentum,
 $\frac{-128R^6 - 96R^5P + 64R^4P^2 - 9R^3P^3}{64P^3}$; Distantia,
 $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}$.

D.F. Quintæ; Magnitudo, $\frac{61}{384}RP$: Respectu P M F, versus E,
Momentum, $\frac{-96R^6 - 96R^5P - 75R^4P^2 - 16R^3P^3}{48P^3}$;
Distantia, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 - 128R^2P^3}{61P^4}$;

I. Respectu E M G, versus P, Momentum,
 $\frac{384R^6 - 480R^5P - 192R^4P^2 - 125R^3P^3}{192P^3}$; Distantia,
 $\frac{768R^5 - 960R^4P - 384R^3P^2 + 250R^2P^3}{61P^4}$.

Et similiter in cæteris.

G.K. Quæque de *Figura Spirali* tradita sunt; eadem *Solido Sca-*
larî facillè accommodantur.

A. *Fig. 199, 200.* Sit M T T Spiralis *Archimedeæ*; cujus natura hæc est:
Dum recta quæpiam, ut M A, à situ suo M A (quod *Circula-*
tionis Principium vocant) manente puncto M ut Centro (quod vo-
cant *Principium Spiralis*) æquabiliter circumducta, describit circu-
lum A O O A (quem vocant *Circulum primum*;) intelligitur Pun-
ctum aliquod I (quod voco *Punctum Lineans*) eodem tempore
ab M ad A in circumductâ rectâ M A æquabiliter promotum, motu
hoc composito Spiralem M T T A describere, (quem vocant *Spira-*
lem Primæ circulationis;) eisdemque motibus continuatis, dum
eadem rectâ M A, tantundem ad B protracta, hoc est M A B,
secundò circumducta, describit B O O B *Circulum secundum*; Pun-
ctum illud Lineans, similiter ab A ad B promota, describit A T T B
Spi-

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 493

Spiralem circulationis Secunda: Et sic deinceps, ad tertiam, quar- Fig. 199,
tam, aut etiam plures circulationes, quousque libet. 200.

Manifestum itaque est (ex constructione) rectas MT , respectivis
angulis AMT , vel arcubus AO , (propter æquabilem utrobique
motum) proportionales esse: Nempe, Quota pars est Arcus AO
totius Peripheriæ; vel Angulus AMT , quatuor rectorum; ea
pars est MT respectiva, totius MA : Vel etiam (sumptâ *Anguli*
appellatione, laxiori sensu, pro Angulorum quotlibet Aggregato,
quamquam duos rectos, aut etiam plures, vel æquet, vel superet;
Arcusque appellatione, pro Arcuum aggregato quovis, etiam si su-
peret integrum Circuli Peripheriam; ut & *Sectoris* nomine, pro
Sectorum quotlibet Aggregato, ut ut integrum Circulum vel etiam
plures superet;) Quam habet rationem AMT Angulus (sic sum-
ptus) ad quatuor rectos; vel correspondens arcus AO , ad peri-
pheriam integram AOA ; eam habet respectiva recta MT , ad MA .
Et sic ubique.

Et, consequenter; si intelligatur Figura Spirali $MTTM$ (curvâ
 MTT rectâque MT , sumpto ubivis T ultimo, comprehensa) ap-
tari figura ex similibus Sectoribus constata; (quorum commune
Centrum sit M , principium Spiralis;) erunt eorum Radii Arithme-
ticè proportionales, (puta ut $0, 1, 2, 3, 4$, &c. si figuram inscriptam
consideremus, vel ut $1, 2, 3, 4, 5$, &c. si circumscriptam; aut etiam
ut $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$, &c. hoc est ut $1, 3, 5, 7, 9$, &c. si his inter-
mediam, partim inscriptam, partim circumscriptam; quæ omnia, in
partibus infinitè exiguis, tantundem valent, ut ad prop. 1. hujus
ostensum est:) Nempe, ut Series *Primarum*. Adeoque Sectores
ipsi (utpote in duplicatâ ratione Radiorum,) ut Series *Secundano-*
rum.

Et, consequenter, eorum Aggregatum, ad Aggregatum totidem
maximo æqualium; hoc est (per def. 1. cap. 4.) MTM figura
Spiralis, ad Sektorem conterminum PTM ; ut 1 ad 3; (per prop.
1. hujus:) ubicunque sumatur T ultimum. Puta (posito ultimo T
in V ;) $MTTVM = \frac{1}{3} M V P M$. Et sic ubique.

Et speciatim, Figura Spiralis Primæ Circulationis, æqualis Tri-
enti Circuli Primi: Et Figura Spiralis Duarum Circulationum (bis
computato quod bis describitur,) æqualis Trienti Circuli Secundi bis
sumpti (ut qui Radio maximo bis circumducto bis describitur:) Fi-
gura Spiralis Trium Circulationum (à principio semper ordiendo,) toties
computando quamlibet partem quoties iteratò describitur, (quip-
pe quod primâ circulatione describitur, id in secundâ repetitur; totum-

R r r 2

que

B.

Fig. 199, que hoc, in textu; & sic deinceps;) æqualis Trienti Circuli Tertii ter sumpti (utpote qui à Radio maximo, ter circumducto, ter describitur:)

200.

Et sic semper, ubicunque tandem terminetur (sive in absolutæ aliqujus Circulationis termino, sive loco quovis intermedio:) Nempe, Figuram Spiralem, Trientem esse Sectoris contermini, toties repetitis omnibus quoties ea iteratò describuntur, sive à Radiis crescentibus intra Spiralem, sive à Radio maximo in contermino Sectori.

G.

Sumptis igitur, ad idem M punctum, (à Principio Circulationis ordiendo,) angulis continuis quolibet æqualibus, (cujuscunque magnitudinis,) ut PM_1 , $1M_2$, $2M_3$, $3M_4$, &c. quæ (à Spiralis Principio orsæ) huc pertingunt Figuræ Spirales; (puta M_1M , M_12M , M_123M , M_1234M , &c.) sunt ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubi continuè sequentes; sive ut Series Tertianorum. Cum enim (per ipsam spiralis constructionem) Radii M_1 , M_2 , M_3 , &c. sint arithmeticè proportionales, seu ut Series Primanorum; puta ut a , $2a$, $3a$, &c. adeoque Sectores similes ad hos Radios (utpote in Radiorum ratione duplicatâ,) ut a^2 , $4a^2$, $9a^2$, &c. Series Secundanorum: Erunt (propter ipsos Sectorum angulos arithmetice proportionales, similiter crescentes ut a , $2a$, $3a$, &c.) Sectores M_1P , M_2P , M_3P , &c. ut a^3 , $8a^3$, $27a^3$, &c. (nempe in eâ ratione quæ componitur ex ratione Angulorum, & ex duplicatâ ratione Radiorum,) quæ est ut series Tertianorum. Adeoque & Conterminæ Figuræ Spirales, M_1M , M_12M , M_123M , &c. (utpote Sectorum illorum Trientes, ut modò ostensum est,) ut $\frac{1}{3}a^3$, $\frac{8}{3}a^3$, $\frac{27}{3}a^3$, &c. series item Tertianorum; seu ut 1, 8, 27, &c. numeri cubi.

D.

Et, consequenter; quæ his continuis angulis æqualibus conveniunt Figuræ Spiralis Portiones; puta M_1M , $1M_2$, $2M_3$, $3M_4$, &c. ut 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum 0, 1, 8, 27, 64, &c. differentiæ. (Quæ omnia in nostrâ *Arithmetica Infinitorum*, fusiùs exposuimus; præsertim à prop. 24. ad prop. 38.)

Et, speciatim, sumptis Angulis rectis PME , EMF , FMG , GMA , AMH , HMI , IMK , KMB , BML , &c. Positâ figura Spirali $MTEM = 1$, erunt $MTEFM = 8$, $MTEFGM = 27$, $MTEFGAM = 64$, &c. Cum itaque sit $MTEFGAM$ triens circuli primi, (ut jam ostensum est;) hoc est, (posito Circuli Primi Radio $MA = R$, & periphæria $AOA = P$, adeoque ipso circulo primo $AOA = \frac{1}{2}RP$,) Figura Spiralis primæ Circulationis $MTEFGAM = \frac{1}{6}RP = \frac{64}{384}RP$: Erit quæ primo quadranti con-

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 495

convenit figura Spiralis $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Duobus $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Fig. 199, Tribus, $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Quatuor (hoc est Figura Spiralis 200. Primæ Circulationis) $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Quadrantibus Quinque (repetito quod erat in primo) $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Sex quadrantibus (repetito quod erat in binis primoribus) $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Septem quadrantibus (repetito quod erat in tribus primoribus) $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Octo; hoc est, binis Circulationibus (repetito quod erat in primâ) $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Novem quadrantibus (repetitis quæ fuerant prius descripta, & quidem toties quoties descripta fuerant,) $\frac{1}{3} \frac{1}{8} R P = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; & sic deinceps quousque opus erit. Nempe, universaliter, in ea ratione ad $\frac{1}{3} R P$, (trientem circuli primi,) qua est a^3 ad P^3 , seu r^3 ad R^3 . Puta $\frac{a^3 R}{6 P^2}$, vel

$$\frac{r^3 P}{6 K^2}.$$

Adeoque, quæ Primo quadranti convenit; $M T E M = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Secundo, $E M F = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Tertio, $F M G = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Quarto, $G M A = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Quinto, $A M H = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Sexto, $H M I = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Septimo, $I M K = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Octavo, $K M B = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; quæ Nono, $B M L = \frac{1}{3} \frac{1}{8} R P$; & sic deinceps, quousque libet, in ratione differentiarum numerorum Cuborum continue sequentium.

His ita de Figurarum magnitudine constitutis; quò Centra gravitatis determinemus, easdem ad Duas Diametros, $P M F$, $E M G$, se mutuò in M decussantes, exigemus; earum momenta harum respectu, adeoque Centrorum gravitatis ab his distantias, inquirendo. Et primò quidem respectu ipsius $P M F$.

Sunt autem (ut jam ostensum est) similium Sectorum infinite exiguorum (ex quibus constari intelligitur Figura Spiralis) Radii, ut totidem a , Arcus vel Anguli arithmetice proportionales; adeoque Sectores ipsi, ut totidem a^2 , eorum Quadrata.

Sed & eorum Centra gravitatis R in Sectoris cujusque medio Radio similiter sito, utpote quæ ipsius Bessè (seu duobus trientibus) ab M distant (propter arcuum infinite-exiguorum quam supponimus cum chordis coincidentiam; saltem, rationem infinite-exiguam;) per prop. 14. hujus.

Et propterea illorum à $P M F$ distantia $R S$, sunt in ratione Sinuum rectorum, Arcuum seu Angulorum arithmetice proportionalium, ad Radios

E.

Fig. 199,
200.

Radios item (M R) arithmetice-proportionales; puta ut as ; hoc est in ratione quæ componitur ex s sinuum angulorum arithmetice proportionalium, & a radiorum similiter in proportionem arithmetica crescentium.

(Nequis autem hæreat, eò quod non sit idem angulus P M R (cui convenit Sinus R S,) qui est Sectoris P M Y, (propter rectam MRT per medium Sectoris Z M Y incidentem:) Id nihili res est. Quippe; si ponantur anguli P M Y, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt anguli P M R, seu P M T, ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. Quæ, in partibus innumeris, infinite exiguis, tantundem valet. Ut ad prop. 1. hujus, ostensum est.)

Erunt itaque eorum, respectu ipsius P M F, Momentorum ratio (utpote ex ratione magnitudinum a^2 , & distantiarum as , composita,) ut a^3s ; hoc est, ut a^3 series Tertianorum (seu cuborum quantitatum arithmetice proportionalium) in s respectivos Sinus rectos arcuum seu angulorum arithmetice proportionalium. (Perinde autem est, Momentum quod spectat, si ponantur Pondera a^2 in distantis as , siue Pondera a^3 in distantis s ; quippe utrobique Momenta erunt a^3s .) Et quidem, pro duobus quadrantibus primoribus, ad (ipsius P M F) partes E, quam Ponderationem signo $+$ designabimus; pro duobus sequentibus, ad partes contrarias, hoc est ad G, (propter quantitates ipsas, ad contrarias rectæ P M F partes, positas,) quam Ponderationem signo $-$ designabimus. Et similiter in quadrantibus sequentibus faciendum erit, prout ad illas vel istas partes ponantur: Nempe, pro quadrantibus Quinto & Sexto, ponendum signum $+$; pro Septimo & Octavo, signum $-$; & sic deinceps (alternatim) duobus intermissis.

Quod tantundem est atque si totidem βv (ipsis s proportionales) complentes figuram Sinuum Rectorum $a \tau \kappa$ (fig. 170.) vel (quæ eandem aliquoties repetitam exhibet) M v F v A v I (fig. 201.) quousque opus erit continuandam, (ad alteras atque alteras ipsius M F A I partes positam, prout ipsius figuræ Spiralis situs postulat;) onerentur respectivis a^3 , in triplicatâ ratione suarum ab M distantiarum, arithmetice-proportionalium; hoc est, serie Tertianorum.

Siue (quod tantundem est, propter distantias M $\beta = as$) ut Momentum (respectu ipsius M P fig. 201.) omnium a^2s ; hoc est, omnium $\beta v = s$, respectivis a^2 onustarum. (Signis $+$ $-$ ritè consideratis.)

Hoc est, per prop. 10. hujus, ut *Aggregatum omnium* a^2s ; (usque ad a maximum) toties sumptum, (hoc est in a ductum,) demptis *Omnibus*

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 497

nibus *Aggregatis* ejusmodi usque ad respectivos *a* arithmetice propor- Fig. 201.
tionales.

Est autem illud *Aggregatum Omn* a^2s , $= -a^2R^2 + 2asR^2$
 $+ a^2vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. Nempe, Ungulæ $\alpha\beta v$ fig.
170. aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$; cui responder, in
nostro casu, Ungulæ $M\beta v$ fig. 201. aciem habentis PM , Momentum
respectu PM .) Adeoque illud toties sumptum, hoc est, in $a = M\beta$
ductum, est $-a^3R^2 + 2a^2sR^2 + a^3vR - 2avR^3$.

Quod quò rite intelligatur, considerandum est; per s , intelligen-
dum esse sinum rectum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc est $M\beta$ fig. 201. con-
venientem; hoc est, ipsam βv rectam; quæ interpretanda erit affir-
mative vel negative, prout citra vel ultra $MF A$ jaceat: Sicut & in
ipso circulo Sinus Recti in contrariis semicirculis, contrariis signis affici
intelligantur; utpote ad contrarias diametri partes positi: Item, per
 v intelligendum esse Sinum versum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc est, $M\beta$ fig.
201. convenientem. Si autem β sumatur citra F ; adeoque in primo
Semicirculo; nihil est quò quis hæreat; (quippe hoc sæpius ostensum
est, in prop. 17, de figurâ Sinuum Rectorum $\alpha\tau$ fig. 170.) Si ve-
rò ultra F qui terminus est primi Semicirculi (cui convenit sinus
versus $v = 2R$ & Sinus Rectus $s = 0$) sumatur β ; (quod tantundem
est atque si in fig. 169. post absolutum semicirculum $AD\alpha$, conti-
nuandus esset arcus, ultra α , in Semicirculo opposito, sursum,
versus A , puta $AD\alpha\theta$.) Sinus Rectus contrario Signo afficiendus
esset; & decrederet Sinus versus (subducto ex $2R$, quantum esset
sinus versus continuati arcus $\alpha\theta$, ab α inchoandus;) usque dum, ab-
soluto secundo Semicirculo, ad A fig. 169. perventum fuerit, e-
vanescere tum Sinu Recto, secunda vice, in $s = 0$, tum Sinu verso
in $2R - 2R = 0$. Sin porro procedatur, ultra circum integrum,
ad tertium Semicirculum; ibidem Sinus Rectus Affirmative interpre-
tandus erit, & crescet iterum Sinus Versus; qui in Quarto iterum
decreset, & Sinus Rectus negative interpretandus: Et sic porro,
alternis vicibus. Quippe eadem recta AV fig. 169. ($= A\alpha - \alpha V$
 $= A\alpha - \alpha A + AV$, &c.) est sinus versus, tum Arcus AB ,
tum (residui ad Circulum integrum) $AD\alpha\theta$, aut etiam (ultra Cir-
culum continuati) $AD\alpha\theta AB$: Item arcus AB , sinus $VB = s$ affir-
mative interpretandus, arcusque $AB\alpha\theta$, sinus oppositus $V\theta = -s$
negative interpretandus; iterumque Arcus $AB\alpha\theta AB$, sinus $VB = s$;
& Arcus $AB\alpha\theta AB\alpha\theta$, sinus $V\theta = -s$: Et sic deinceps, si ad
plures integros circuitus procedendum erit.

Porro; propter *Aggregatum Omn* a^2s , $= -a^2R^2 + 2asR^2$
 $-$

Fig. 201. $+ a^2 v R - 2 v R^3$, (ut modo ostensum est,) erunt *Omn. Aggregata* $a^2 s$, = *Omn.* $- a^2 R^2 + 2 a s R^2 - a^2 v R - 2 v R^3$; sumptis a arithmetice proportionalibus usque ad a maximum, hoc est $M \beta$.

Sunt autem *Omn.* a^2 , = $\frac{1}{3} a^3$, per prop. 1. hujus; Ergo, *Omn.* $- a^2 R^2$, = $-\frac{1}{3} a^3 R^2$.

Et *Omn.* $a s$, = $- e R^2 - a v R$, per § Q. prop. 17. (est utique Trilinei $\alpha \beta v$ fig. 170. momentum respectu $A \alpha$.) Ergo, *Omn.* $2 a s R^2$, = $- 2 e R^4 + 2 a v R^3$.

Et *Omn.* $a^2 v$, = $- 2 e R^3 - 2 a v R^2 + \frac{1}{3} a^3 R - a^2 s R$, per § L. prop. 19. (Nempe Ungulæ $A b K$ fig. 170. aciem habentis $A \alpha$, momentum respectu $A \alpha$.) Ergo, *Omn.* $a^2 v R$, = $- 2 e R^4 + 2 a v R^3 + \frac{1}{3} a^3 R^2 - a^2 s R^2$.

Et *Omn.* v , = $e R$, per § B. prop. 17. (Est utique Triligneum $A b K$ fig. 170.) Ergo, *Omn.* $- 2 v R^3$, = $- 2 e R^4$.

Ergo, *Omn. Aggregat. a^2 s*, = *Omn.* $- a^2 R^2 + 2 a s R^2 - a^2 v R - 2 v R^3$; = $-\frac{1}{3} a^3 R^2 - 2 e R^4 + 2 a v R^3 - 2 e R^4 - 2 a v R^3 + \frac{1}{3} a^3 R^2 - a^2 s R^2 - 2 e R^4 = - 6 e R^4 - 4 a v R^3 - a^2 s R^2$.

Atque hoc demum subductum ex, *Aggregat. a^2 s*, in a maximum, = $- a^3 R^2 + 2 a^2 s R^2 - a^3 v R - 2 a v R^3$; relinquit *Omn. a^2 s*; = $6 e R^4 - 6 a v R^3 - a^3 R^2 - 3 a^2 s R^2 + a^3 v R$.

Fig. 199, 200. Cum itaque singulorum Sectorum exiguorum Angulus sit, verbi gratiâ, infinitesima pars quatuor rectorum; cui respondeat, in Circulo primo, arcus $T = \frac{1}{\infty} P$; adeoque in suis $P T$ peripheriis con-

terminis, $t = \frac{a}{P} T$; (posito a pro arcu circuli primi qui respondeat angulo $P M T$;) &c, propterea eorum magnitudines sint $\frac{1}{2} t r$ (sumptis tum t tum r arithmetice proportionalibus; sintque Centrorum gravitatis ab M distantia $R M = \frac{2}{3} r$; adeoque eorundem à $P M F$ distantia (utpote ad $R M$, ut Sinus Rectus anguli $P M R$ ad Radium,

seu ut s ad R ,) $R S = \frac{2 s r}{3 R}$; adeoque eorum respectu $P M$ momenta $\frac{1}{2} t r \times \frac{2 s r}{3 R} = \frac{t r^2 s}{3 R}$, (sumptis tum t , tum r , arithmetice proportionalibus, ipsisque s pro sinubus rectis arcuum arithmetice proportionalium ad Radium R ;) adeoque (ut prius etiam ostensum est) in ratione ipsorum $a^2 s$: Si, pro *Omnibus* $a^2 s$, = $6 e R^4$,

$- 6 a v R^3 - a^3 R^2 + 3 a^2 s R^2 + a^3 v R$, substituantur Totidem $\frac{t r^2 s}{3 R}$,
=

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 499

$$= \frac{6ar^2R^3 - 6avr^2R^2 - a^3r^2R + 3a^2sr^2R + a^3vr^2}{3a^3}; \text{ habetur fi. } \begin{matrix} \text{Fig. 199.} \\ 200. \end{matrix}$$

guræ Spiralis, quousque liber continuatæ, (cujus Radius ultimus $MT = r$.) momentum respectu rectæ PMF , (toties computatâ parte qualibet quoties iterato describitur,) & quidem vel ad partes E , vel ad partes G ; prout signum $+$ aut $-$ prævaleat. Aut etiam, (propter $t = \frac{aT}{P}$.)

$$6ar^2R^3 (= 6ar^2R^3 - 6sr^2R^3) - 6avr^2R^2 - a^3r^2R + 3a^2sr^2R + a^3vr^2 \quad T:$$

Vel, (propter eandem ubique rationem r ad a , quæ est R ad P ; utpote in eâdem ratione semper crescentibus r & a , donec perveniatur illic ad R , hic ad P , in termino primi circuli;)

$$\frac{6aR^3 - 6sR^3 - 6aVR^2 - a^3R^2 + 3a^2sR^2 + a^3VR^2}{3P^3} \quad T: \text{ Vel (neglecto } T: \text{ quippe dum } T \text{ ponitur pro } \frac{a}{60}P, \text{ infinitesimâ parte ipsius } P, \text{ & } P \text{ pro earundem in } P \text{ lineâ partium numero; tantundem erit } TP, \text{ atque ipsa } P \text{ lineâ;)} \frac{6aR^3 - 6sR^3 - 6aVR^2 - a^3R^2 + 3a^2sR^2 + a^3VR^2}{3P^3}$$

Sunt autem, ut ex prædictis patet, singulorum Sectorum exiguum magnitudines, $\frac{1}{2}tr$; hoc est, $\frac{arT}{2P}$; seu $\frac{a^2RT}{2P^2}$, (propter $r = \frac{a}{P}R$.) Adeoque omnium summa $\frac{a^3RT}{6P^2}$ vel $\frac{a^3R}{6P^2}$ (utpote ad maximum toties sumptum, ut 1 ad 3; per prop. 1. hujus.) Nempe in ea ratione ad $\frac{1}{6}RPI$ vel (neglecto T) ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi, seu figuram spiralem primæ circulationis,) ut a^3 , ad P^3 , seu ut r^3 ad R^3 ; hoc est, ut Cubus Radii terminalis MT , ad Cubum MA radii circuli primi.

Per hanc itaque Magnitudinem, si dividamus Momentum modo traditum; habebitur

$$\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12aVR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 + 2a^3VR}{a^3P}$$

Centri gravitatis figuræ Spiralis (quousque liber continuatæ) MTT (toties computatis singulis partibus quoties iterato describuntur) distantia à recta PMF ; & quidem vel ad partes E vel ad partes G , (sive Momenta spectemus, live distantiam Centri gravitatis,) prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit. Sff No.

Fig. 199, 200. Notandum interim (ne hæc perperam intelligantur) in semicirculationibus secundâ, quartâ, sextâ, (reliquisque in locis paribus,) pro Momentis his atque Distantiis æstimandis, sinum s negative interpretandum esse; utpote, in his semicirculis, ad contrarias Diametri partes positum: Adeoque ita exponendum atque si contrario ubique signo afficeretur. Quod & ante insinuaturn est.

F. Et quidem, pro integris Circulationibus absolutis, (propter tum $s = 0$, tum $v = 0$, in fine cujusque circulationis,) Magnitudines erunt, $\frac{a^3 R}{6P^2}$; Momenta respectu P M F (neglecto T , ob causam. modò dictam,) $\frac{6aR^3 - a^3 R^3}{3P^3}$; (toties repetitis omnibus quoties iteratò describuntur;) distantia centrorum gravitatis à P M F versus E, $\frac{12R^4 - 2a^2 R^2}{a^2 P}$; Hoc est, (propter signum —, prævalens; est utique, hoc casu, a^2 semper plus quàm $6R^2$, non potest enim a in fine circulationis, minor esse quàm P ;) distantia à P M F versus G, $-\frac{12R^4 + 2a^2 R^2}{a^2 P}$. In quibus omnibus, exponetur a , in fine Circulationis Primæ, per P ; in fine secundæ, per $2P$; Tertiæ, per $3P$, & sic deinceps.

Pro Circulationibus Dimidiis, quæ integram Circulationem non terminant; (puta, pro una, tribus, quinque, &c.) propter $s = 0$, & $v = 2R$, erunt magnitudines (ut prius) $\frac{a^3 R}{6P^2}$; Momenta respectu P M F $-\frac{6aR^3 - a^3 R^3}{3P^3}$; distantia à P M F versus E, $-\frac{12R^4 + 2a^2 R^2}{a^2 P}$. In quibus exponetur a , in fine Semicirculationis primæ, per $\frac{1}{2}P$; tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps. Adeoque signum —, in hoc casu, semper pravalet: propter Quadratum, Semiperipheriæ majus quàm sex quadrata Radii.

Pro Circulationibus Quadrantalibus, quæ Semicirculationem non terminant, (puta, pro primâ, tertiâ, quintâ, &c.) propter tum $s = R$, pro primâ, quintâ, nonâ, &c. sed $s = -R$, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c; tum $v = R$ in omnibus: Magnitudines erunt

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 501

erunt (ut prius) $\frac{a^3 R}{6 P^2}$; Momenta respectu PMF, $\frac{6 R^6 + 3 a^2 R^4}{3 P^3}$ Fig. 199, 200.

$= \frac{-2 R^2 + a^2}{P^3} R^4$; Distantiæ à PMF, versus E, $\frac{-12 R^5 + 6 a^2 R^3}{a^3 P}$;

nempe pro primâ, quintâ, nonâ, &c. In quibus exponetur a , in fine Quadrantis primii, per $\frac{1}{4} P$; quinti, per $\frac{3}{4} P$; noni, per $\frac{5}{4} P$; & sic deinceps. Et signum $+$, prævalet: propter quadratum Arcus Quadrantalís, majus quàm Duo quadrata Radii. Sed, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. (propter s contrario signo exponendum, seu $s = -R$;) Momenta erunt $\frac{+6 R^6 - 3 a^2 R^4}{3 P^3} =$

$\frac{-12 R^5 - a^2 R^4}{P^3}$; Distantiæ, $\frac{-12 R^5 - 6 a^2 R^3}{a^3 P}$; adeoque (propter a , interpretandum per, $\frac{1}{4} P$, $\frac{3}{4} P$, $\frac{5}{4} P$, &c. signum $-$ prævalebit; eruntque tum Momenta, tum Distantiæ, versus G.

Sin libeat singulos quadrantes seorsum perpendere, (non, ut hætenus, inchoando à principio, omniaque toties repetendo quoties iteratò describuntur;) illud sic fiet.

De Primo quadrante, M T E M, jam ostensum est, Magnitudinem esse $\frac{a^3 R}{6 P^2}$, hoc est (propter $a = \frac{1}{4} P$;) $\frac{1}{96} R P$; Momentum respectu PMF, $\frac{-2 R^6 + a^2 R^4}{P^3} = \frac{-32 R^6 + R^4 P^2}{16 P^3}$; distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{+12 R^5 + 6 a^2 R^3}{a^3 P} = \frac{-768 R^5 + 24 R^3 P^2}{P^4}$.

Magnitudo Primæ Semicirculationis, M T E F M, est $\frac{a^3 R}{6 P^2}$; hoc est, (propter $a = \frac{1}{2} P$;) $\frac{1}{48} R P$; Momentum respectu PMF, $\frac{-6 R^6 + a^2 R^4}{3 P^3} = \frac{-24 R^6 + R^4 P^2}{24 P^3}$; distantia versus E, $\frac{-48 R^5 + 2 R^3 P^2}{P^3}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis, $\frac{-32 R^6 - R^4 P^2}{16 P^3}$; Habetur Quadrantis secundi M E F M, Mo-

SS 2

mentum

Fig. 199,
200.

mentum respectu P M F, $\frac{96R^6 - 48R^4P - 3R^4P^2 + 2R^3P^3}{48P^3}$; Adeoque propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{2}{3}\frac{1}{4}RP$; Distantia centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 - 384R^4P - 24R^3P^2 + 16R^2P^3}{7P^4}$.

Magnitudo Trium quadrantalium circulationum, M T E F G M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{1}{12}\frac{a^2}{P}RP$, (propter $a = \frac{1}{4}P$;) Momentum respectu P M F, $\frac{2R^6 - a^3R^4}{P^3} = \frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; (adeoque versus G, propter prævalentiam signi —; hoc est, revera, $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$ versus G.) Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{12R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; hoc est (propter signum — prævalens,) versus G, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$.

Ex hujus momento, si subducatur momentum primæ Semicirculationis $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Habetur momentum Tertix quadrantalium M F G M, $\frac{96R^6 + 48R^4P - 27R^4P^2 - 2R^3P^3}{48P^3}$; Adeoque propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{2}{3}\frac{1}{4}RP$; Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 + 384R^4P - 216R^3P^2 - 16R^2P^3}{19P^4}$; hoc est, revera, versus G, $\frac{-768R^5 - 384R^4P + 216R^3P^2 + 16R^2P^3}{19P^4}$.

Magnitudo integræ Circulationis primæ, M T E F G A M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{1}{6}RP$, (propter $a = P$;) Momentum respectu P M F $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} = \frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^3}$; Distantia Centri gravitatis à P M F versus

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 503

versus E, $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P} = \frac{12R^4 - 2R^2P^2}{P^3}$; hoc est (propter præva-

Fig. 199;
200.

lentiam signi —,) versus G, $\frac{-12R^4 + 2R^2P^2}{P^3}$.

Ex hujus Momento, si subducatur Momentum Circulationis Do-

drantalís $\frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantalís Quartæ M G A M,

Momentum respectu PMF, $\frac{-96R^6 - 96R^4P - 27R^4P^2 - 16R^3P^3}{48P^3}$;

& (propter magnitudinem $\frac{2}{3} \frac{1}{4} RP$;) Distantia Centri gravitatis à

PMF versus E, $\frac{-768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 - 128R^2P^3}{37P^4}$; hoc

est (revera) versus G, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 - 128R^2P^3}{37P^4}$.

Magnitudo Quinque Quadrantalium M T E F G A H M, $\frac{a^2R}{6P^2}$

$= \frac{1}{3} \frac{1}{4} RP$, (propter $a = \frac{1}{4} P$;) Momentum respectu P M F,

$\frac{-2R^6 + a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6 - 25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia Centri gravitatis

à PMF, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5 - 600R^3P^2}{125P^4}$, ver-

sus E.

Ex hujus Momento, si subducatur momentum Primæ Circulatio-

nis, $\frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$; Habetur Momentum Quadrantalís Quintæ,

M A H M, $\frac{-96R^6 - 96R^4P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$; Et (prop-

ter magnitudinem $\frac{2}{3} \frac{1}{4} RP$;) Distantia Centri gravitatis à PMF, versus

E, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$.

Et sic deinceps; quousque libet.

Atque eadem operâ determinavimus tum Magnitudinem, tum Mo-

mentum & Centri gravitatis ab erecto super rectam P M F plano

distantiam, Solidi *Scalaris*, super Figuram Spiralem T T M obli-

quo situ ascendentem positi, eandem ubique habentis altitudinem

(quamlibet) supra obliquè ascendentem figuram Spiralem; quæ qui-

dem altitudo sit etiam cujusvis puncti in sequenti qualibet circulatione

G.

Fig. 199, distantia à subiecto proxime præcedentis Circulationis puncto.
200.

Quippe ad hoc nihil aliud requiritur, quam ut, (quæ pro infinitesima parte Peripheriæ circuli primi habebatur, adeoque negligi poterat,) jam habeatur pro illâ quantalibet Altitudine; in Solidi tum Magnitudine tum Momento æstimando: Distantia vero Centri gravitatis a plano $P M F$, eadem hic erit quæ prius erat a $P M F$ rectâ.

Si autem Solidum hoc utcumque Truncatum intelligatur; vel superne, ne ad M apicem pertingat; vel inferne, putâ quo basem planam Horizontalem habeat; vel alias quomodolibet: non erit difficile, præmissa ritè perpendentibus, amputati rationem habere; quodque inde oritur discriminis sive in Magnitudine, sive in Momento, & Centri gravitatis distantia.

Vel etiam si pro eâdem (quam hic ponimus) Altitudine, aut Circulationum intervallo, (unde continuo mutabitur acclivitas ascendentis plani,) eandem velimus retentam acclivitatem, (unde variabitur altitudo, quæ pro decrecentibus circulis continuo decrescet;) simili processu habebitur tum Solidi Magnitudo, tum Momentum, Centrique gravitatis à $P M F$ plano distantia: Sed Calculo paulò adhuc intricatiori, propter novam adhuc cum cæteris componendam rationem, pro variatâ altitudine. Verùm omnia sigillatim prosequi mihi non est in animo, ne nimius sim. Ad figuram itaque spiralem redeo.

H. Ut autem ejusdem $M T T M$ figuræ Spiralis Momentum (quod hætenus ad $P M F$ rectam expendimus,) ad rectam $E M G$ expendamus: considerandum est, Centrorum gravitatis Sectorum exiguorum distantias ab $E M G$, esse ipsos $R X$ sinus Complementi earundem arcuum quorum Sinus recti sunt $R S$, (atque ad eosdem radios $R M$ continue crescentes in proportionem arithmetica;) puta ut $a x$; (positis x pro sinibus complementi, ipsis respondentibus: hoc est, pro $V C$ Sinibus Complementi arcuum $A B$, fig. 169. quorum Sinus recti sunt $B V$.)

Adeoque (propter magnitudines, ut supra dictum est, ut a^2), Momenta respectu re. x $E M G$, erunt ut $a^3 x$ ($= a^2 x a x$;) Hoc est, ut a^3 series Tertianorum, in respectivos x arcuum arithmetice proportionum *Co-sinus* seu sinus complementi: Hoc est in ipsis $S V$ rectas, complentes figuram $\delta \pi \tau$ (fig. 170.) quousque opus erit continuandam; Hoc est in ipsas $S V$ complentes figuram $\mu \nu \epsilon \nu \gamma \nu \eta$

Fig. 201. (fig. 201.) quousque opus est continuandam; inchoandam autem, non

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 505

non (ut prius) ab MP , sed à $\mu\nu$. (Est utique eadem $\nu\beta$ recta, Fig. 201. tum Sinus rectus arcus, in rectam extensi, $M\beta$; tum ν Sinus arcus, in rectam extensi, $\mu\beta$.)

Nam, ut Sinus s , à minimo incipiunt continuè crescendo usque ad quadrantis finem, ubi decrescere incipiunt: Sic, vice versa, eorundem arcuum Co sinus x , seu Sinus Complementi, à maximo incipiunt continuè decrescendo ad finem usque quadrantis; ubi crescere incipiunt, sed ad contrarias partes ipsius EMG rectæ.

Quæ enim spectant ad quadrantem Primum, Quartum, Quintum, Octavum, Nonum, &c. ponderant ad rectæ EMG fig. 199, 200. partes P ; (quam ponderationem signo $-$ designo;) quæ autem pertinent ad quadrantem Secundum, Tertium, Sextum, Septimum, Decimum, &c. ponderant in partes contrarias, hoc est ad F ; (quam ponderationem signo $-$ designo;) & sic deinceps, alternatim, duos intermittendo continuos quadrantes seu integrum Semicirculum.

Quem situm imitantur ipsius figuræ $\mu\nu\epsilon\nu\gamma\nu$, &c. (fig. 201.) portiones, ad alias atque alias rectæ $\mu\gamma$ partes positæ.

Quæ quidem eadem est figura atque $CABk$ (fig. 170.) quousque opus erit continuanda: Cujus portiones $CABk$, vel $CAdbk$, fig. 170. (hoc est, $\mu\nu\nu\beta$, vel $\mu\nu\epsilon\nu\beta$, fig. 201. ubicunque in sinuosa curvâ, $\mu\nu$ inchoatâ, sumatur ν punctum,) consideravimus, ad § B. prop. 17. ostendimusque istiusmodi figuræ magnitudinem esse sR , æqualem factò ex respectivi Arcus $\mu\beta$ (seu Anguli AMF fig. 199, 200.) Sinu Recto, in Radium ducto; habita tamen (propterea ad alias atque alias rectæ partes jaciunt figuræ portiones) debitâ signorum $-$ — consideratione.

Quo itaque habeamus *Omnia* a^3x ; Hoc est, Omnes x , (seu $\beta\nu$ rectæ figuram $\mu\nu\epsilon\nu\gamma$, &c. complentes) respectivis a^3 (serie Tertiarum) onustæ: Intelligamus, juxta doctrinam prop. 10. hujus, (quam sæpius in auxilium advocavimus,) singula a, β, γ , &c. fig. 135. Fig. 135. æqualiter ob invicem remota, totidem esse respectivas x rectas; adeoque ipsam AE onustam, seu *Omnia*, $a + \beta + \gamma$, &c. = *Omn.* x , = sR , ut jam ostensum est, ex § B. prop. 17.

Horumque omnium momenta respectu axis A ; hoc est, *Omn.* ax ; sunt ipsæ onustæ rectæ, $AE - BE - CE$, &c. hoc est, totidem AE , demptis omnibus $AB + AC$, &c. Hoc est, (propter $AE = sR$), totidem sR ultimis (seu asR), demptis omnibus sR antecedentibus, pro arcubus arithmetice proportionalibus usque ad a ultimum.

Sunt

506 De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.

Fig. 135. Sunt autem (pro arcibus a arithmetice proportionalibus) $Omn. s$, $= vR$, per § Q. prop. 17. (utpote ipsa $a\beta v$ fig. 170.) Adeoque $Omn. sR$, $= vR^2$. Hoc itaque ex asR subducto, habetur $asR - vR^2 = Omn. ax$.

Intelligentur deinde eadem α, β, γ , &c. fig. 135. tanquam totidem ax : adeoque onusta recta $AE = Omn. ax$, $= asR - vR^2$. Horumque omnium momenta respectu ipsius A ; hoc est $Omn. a^2x$; sunt ipsæ $AE + BE + CE$, &c. rectæ sic onustæ. Hoc est, totidem AE , ($= a^2sR - avR^2$), demptis Omnibus $AB + AC$, &c. hoc est, omnibus $asR - vR^2$, pro arcibus a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro arcibus a arithmetice proportionalibus) $Omn. as$, $= -eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. (utpote momentum ipsius $a\beta v$ fig. 170. respectu rectæ $A\alpha$;) adeoque $Omn. asR$, $= -eR^3 + avR^2$.

Item $Omn. v$, $= eR$, per § B. prop. 17. (utpote ipsum AbK trilineum, fig. 170.) adeoque $Omn. -vR^2 = -eR^3 = -aR^3 + sR^3$.

Ergo, $Omn. asR - vR^2 = -2eR^3 + avR^2 = -2aR^3 + 2sR^3 + avR^2$.

Hoc itaque, ex $a^2sR - avR^2$, subducto, habetur $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR = Omn. a^2x$.

Intelligentur denique eadem α, β, γ , &c. fig. 135. tanquam totidem a^2x : adeoque onusta recta AE , $= Omn. a^2x$, $= 2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$. Horum itaque omnium momenta respectu axis A ; hoc est, $Omn. a^3x$; sunt ipsæ $AE + BE + CE$, &c. sic onustæ: Hoc est, totidem AE , ($= 2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$), demptis $AB + AC$, &c. Hoc est, omnibus, $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, pro arcibus a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro a arithmetice proportionalibus) $Omn. a$, $= \frac{1}{2}a^2$, per prop. 1. hujus. Adeoque $Omn. 2aR^3 = a^2R^3$.

Item, $Omn. s$, $= vR$, per § Q. prop. 17. adeoque $Omn. -2sR^3 = -2vR^4$.

Item, $Omn. av$, $= \frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, per § H. prop. 17. (utpote momentum trilinei AbK fig. 170. respectu $A\alpha$;) adeoque $Omn. -2avR^2 = -a^2R^3 + 2asR^3 - 2vR^4$.

Item, $Omn. a^2s$, $= -a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. (nempe Ungulæ $a\beta v$ fig. 170. aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$;) Adeoque $Omn. a^2sR = -a^2R^3 + 2asR^3 + a^2vR^2 - 2vR^4$.

Ergo,

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitationis. 507

Ergo, (horum aggregatum) *Omn.* $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^3sR$, Fig. 135.
 $= -a^2R^3 + 4asR^3 - a^2vR^2 - 6vR^4$.

Hoc itaque subducto, ex $2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$;
 habetur, $6vR^4 - 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$, = *Omn.*
 a^3x .

Atque ad eandem formam (eadem quoties opus erit repetendo vesti-
 gia) procedendum esset, si porro *Omnia* a^4x , *Omnia* a^5x , (aut
 etiam ultra) inquirenda essent: Vel etiam, si loco ipsorum x , alia
 quælibet quantitates ponerentur. Quod hic obiter monitum esto.

Cum itaque (ut jam ante ostensum est § E.) singulorum Sectorum Fig. 199,
 exiguorum Magnitudines, sint $\frac{1}{2}r = \frac{arT}{2P} = \frac{a^2RT}{2P^2}$; distantiaque ^{200.}

ab EMG, $RX = \frac{2rx}{3R} = \frac{2ax}{3P}$, (posito x pro Co-sinu anguli
 vel arcus a , ad Radium R ;) adeoque momenta respectu EMG,
 $\frac{a^2RT}{2P^2} \times \frac{2ax}{3P} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$; vel (neglecto T , ob causam aliquoties
 dictam,) $\frac{a^3xR}{3P^3}$: Erit (propter *Omn.* a^4x , = $6vR^4 + 3a^2R^3$
 $- 6asR^3 - 3a^2vR^2 - a^3sR$,) Momentum Figuræ Spiralis
 MTTT M, respectu rectæ EMG, *Omn.* $\frac{a^3xR}{3P^3}$, =
 $\frac{6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 - a^3sR}{3P^3}$.

Adeoque, (propter magnitudinem, jam ante traditam, $\frac{a^3R}{6P^2}$;) Dist.
 Cent. grav. ab EMG rectâ, $\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$;
 Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, (sive momentum seu pon-
 derationem spectemus, sive distantiam Centri gravitatis,) prout vel
 signum +, vel signum -, prævaluerit.

Et quidem, pro integris quotlibet circulationibus absolutis Momen-
 ta erunt $\frac{a^2R^4}{P^3}$ (ceteris evanescentibus, propter tum $s = 0$, tum
 $v = 0$;) adeoque (propter magnitudines $\frac{a^3R}{6P^2}$;) Distantia Centri
 T t t gravi-

L.

Fig. 199, gravitatis, ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{aP}$. Ubi exponendus est a in
200. fine Circulationis primæ, per P ; secundæ, per $2P$; tertiæ, per
 $3P$; &c.

Pro dimidiatis Circulationibus, quæ integras non terminant, (unâ,
tribus, quinque, &c.) propter $s=0$, & $v=2R$; Momenta sunt,
 $\frac{12R^6 - 3a^2R^4}{3P^3} = \frac{4R^6 - a^2R^4}{P^3}$; & (propter Magnitudines, ut

prius, $\frac{a^3R}{6P^2}$.) Distantiæ Centri gravitatis ab EMG, versus P,
 $\frac{24R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; Hoc est revera (propter prævalentiam signi —),

versus F, $\frac{-24R^5 + 6a^2R^3}{a^3P}$; Exponendus utique est a in fine Se-
micirculationis Primæ, per $\frac{1}{2}P$; Tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; Quintæ, per
 $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps: adeoque a^2 in omnibus plus erit quam $4R^2$;
est enim, $\frac{1}{2}P$ plus quam $2R$.

Pro circulationibus quadrantalibus (quæ Semicirculationes non termi-
nant) unâ, tribus, quinque, &c. propter tum $s=R$ in primâ, quintâ, nonâ,
&c. et $s=-R$, in tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. tum $v=R$, in sin-
gulis: Momenta sunt $\frac{6R^6 - 6aR^4 + a^3R^2}{3P^3}$; & (propter magni-
tudines, ut prius,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMP, versus P,

$\frac{12R^5 - 12aR^3 + 2a^3R^2}{a^3P}$; nempe pro primâ, quintâ, nonâ, &c.

sed, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. (propter s contrario
signo exponendum,) Momenta $\frac{6R^6 + 6aR^4 - a^3R^2}{3P^3}$; Distantiæ, ver-

sus P, $\frac{12R^5 + 12aR^3 - 2a^3R^2}{a^3P}$; hoc est, (propter prævalentiam
signi —,) versus F, $\frac{-12R^5 - 12aR^3 + 2a^3R^2}{a^3P}$. Exponendus au-

tem est a , in primâ, tertiâ, quintâ, &c. per $\frac{1}{4}P, \frac{3}{4}P, \frac{5}{4}P$, &c.

Si libeat singulos Circulationum Quadrantes seorsum perpendere,
id facile fiet.

Quadrantis Primi MTEM, momentum respectu EMG, jam osten-

sum est $\frac{6R^6 - 6aR^4 + a^3R^2}{3P^3} = \frac{3^3 4R^6 - 96R^4P + R^2P^3}{192P^3}$ (prop-
ter

PROP. XXVII. De Calculo Centri Gravitatis. 509

ter $a = \frac{1}{4}P$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P, Fig. 199, 200.

$$\frac{12R^5 - 12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P} = \frac{768R^5 - 192R^4P - 2R^2P^3}{P^4}.$$

Semicirculationis Primæ, MTEFM; Momentum $\frac{4R^6 - a^2R^4}{P^3}$

$$= \frac{16R^6 - R^4P^2}{4P^3} \text{ (propter } a = \frac{1}{2}P \text{;) Distantia ab EMG ver-}$$

$$\text{sus P, } \frac{24R^5 - 6a^2R^3}{a^3P} = \frac{192R^5 - 12R^3P^2}{P^4} : \text{Hoc est, revera;}$$

$$\text{versus F, } \frac{-192R^5 + 12R^3P^2}{P^4}.$$

Ex hujus Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis; habetur Secundi quadrantis MEFM, Momentum respectu EMG,

$$\frac{384R^6 - 96R^5P - 48R^4P^2 - R^3P^3}{192P^3} : \text{Et (propter magnitudi-}$$

$$\text{nem } \frac{7}{8}R^2P \text{;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P;}$$

$$\frac{768R^5 - 192R^4P - 96R^3P^2 - 2R^2P^3}{7P^4} : \text{Hoc est, versus F,}$$

$$\frac{-768R^5 - 192R^4P - 96R^3P^2 - 2R^2P^3}{7P^4}.$$

Circulationis Dodrantalis, seu Trium quadrantum, MTEFGM; Momentum respectu EMG, est

$$\frac{6R^6 + 6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} =$$

$$\frac{384R^6 - 288R^5P - 27R^3P^3}{192P^3} = \frac{128R^6 - 96R^5P - 9R^3P^3}{64P^3} \text{ (pro-}$$

$$\text{pter } a = \frac{1}{4}P \text{;) Distantia Centri gravitatis ab EMG versus P,}$$

$$\frac{12R^5 - 12aR^4 - 2a^3R^2}{a^3P} = \frac{768R^5 - 576R^4P - 54R^2P^3}{P^4} : \text{Hoc est,}$$

$$\text{versus F, } \frac{-768R^5 - 576R^4P - 54R^2P^3}{P^4}.$$

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum Semicirculationis Primæ; habetur Tertiæ quadrantalis MFGM, Momentum respectu EMG,

$$\frac{384R^6 - 288R^5P - 48R^4P^2 - 27R^3P^3}{192P^3}$$

$$= \frac{-128R^6 - 96R^5P - 16R^4P^2 - 9R^3P^3}{64P^3} : \text{Et (propter magnitu-}$$

$$\text{dinem } \frac{1}{8}R^2P \text{;) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P,}$$

T t t 2

510 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

Fig. 199. $\frac{-768R^3 + 576R^2P - 96R^3P^2 - 54R^2P^3}{19P^4}$; Hoc est, revera, versus F,

$$\frac{768R^3 - 576R^2P - 96R^3P^2 + 54R^2P^3}{19P^4}.$$

Integræ Circulationis Primæ, MTEFGAM; Momentum respectu EMG est $\frac{a^2R^4}{P^3} = \frac{R^4}{P}$ (propter $a=P$;) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{P^2}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum Circulationis Dodrantis; habetur Quadrantis Quartæ Momentum

$$\frac{-384R^6 - 288R^5P - 192R^4P^2 + 27R^3P^3}{192P^3} =$$

$$\frac{-128R^6 - 96R^5P - 64R^4P^2 - 9R^3P^3}{64P^3}; \text{ Et (propter magnitudinem } \frac{384}{64}RP,)$$

$$\frac{-768R^3 - 576R^2P - 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}.$$

Quadrantalium Quinque, MTEFGAH, (repetito quod erat in prima,) Momentum respectu EMG, est $\frac{6R^6 - 6aR^5 + a^3R^3}{3P^3}$

$$= \frac{384R^6 - 480R^5P + 125R^3P^3}{192P^3}; \text{ Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, } \frac{12R^5 - 12aR^4 + 2a^3R^2}{a^3P} =$$

$$\frac{768R^3 - 960R^2P - 250R^2P^3}{P^4}.$$

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum integræ Circulationis Primæ; habetur Momentum Quadrantis Quintæ, respectu

$$\text{EMG, } \frac{384R^6 - 480R^5P - 192R^4P^2 + 125R^3P^3}{192P^3}; \text{ Et (propter magnitudinem } \frac{384}{192}RP,)$$

$$\frac{768R^3 - 960R^2P - 384R^3P^2 + 250R^2P^3}{61P^4}.$$

Et sic deinceps quousque libet.

K. Atque eâdem operâ determinavimus, in Solido *Scalari*, (super figuram Spiralem T.T.M. obliquo situ ascendentem, altitudinem eandem

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 511

eandem quamlibet habente super obliquè ascendentem figuram spiralem,) magnitudinem, momentum, atque distantiam Centri gravitatis ab erecto super EMG plano. Quippe eadem omnia hic locum habent respectu erecti in EMG plani; quæ respectu plani in PMF erecti supra diximus, § G. Ut non sit opus eadem repetere.

PROP. XXVIII.

Quæ in Propositione præcedente, de Spirali Archimedea, A. Q. tradita sunt; eadem omnia Spiralibus aliis facilè Fig. 199, accommodantur, in quibus Radii MT, MT, con- 200. tinuè crescant, non quidem (ut in illa) in ipsorum AMT, AMT, angulorum ratione, sed & in ipsorum ratione Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ; aliâsve utcumque multiplicatâ: aut etiam in Subtriplicatâ, hujusce utcumque multiplicatâ.

Sed & Magnitudinem quod spectat, iis etiam in quibus A. crescant MT, MT, radii, in eorundem AMT, AMT, ratione Subduplicatâ, Subquadruplicatâ; aliâsve utcumque Submultiplicatâ; vel etiam in ratione subduplicatæ triplicatâ, quintuplicatâ, &c. aut subquadruplicatæ, quintuplicatâ, septuplicatâ, &c. aliâsve ex multiplicatis & submultiplicatis compositâ; aut etiam alias per numeros surdos designanda.

Quod ad Momenta verò, & Centra gravitatis, quæ Q. dicta sunt, non ita facilè ad has accommodantur ubi ratio submultiplicata est, seu ex submultiplicatâ composita quæ multiplicatæ non æquepolleat, vel saltem subtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ.

Suntque hæ Spirales omnes ex Parabolarum vel Paraboloidium. C.

- loidium correspondentium convolutione factæ; possuntque in Parabolas illas seu Paraboloides evolvi.
- C.D. Illa quidem Spiralis *Archimæda*, ex *Apollonianâ* Parabola: Eâ nempe, quæ Basem habeat æqualem Spiralis radio terminali; Axemque æqualem semissi arcus Sectoris contermini.
- E. Cujus quidem Parabolæ semissi, æquatur illa Figura Spiralis. Unde constat, omnino possibilem esse Figuram Rectilineam, Circulo æqualem; ejusve Sectori cui-libet.
- F. Ex datâ verò Altitudine istius Parabolæ, quæ Datae Spirali respondeat; datur circuli Quadratura.
- G. Rectaque Parabolam tangens, eandem cum Ordinata angulum facit, quem facit cum Spiralis correspondente Radio recta Spiralem tangens.
- H. Unde alia colligitur circuli quadratura *Archimæda* (Qualis
K. & ab aliis Spiralibus colligi poterit.)
- I. Et, Curvam Parabolæ, æqualem esse Spiralis Curvæ.
- L.M. Aliæ verò; ex iis Paraboloidibus in quibus Ordinatum applicatæ sint series Indicem habens $\frac{1}{s+1}$; posito seriei rectarum MT Indice s ; Basisque Paraboloidis, æqualis ipsi MT terminali; ejusque altitudo, ad longitudinem arcus Sectoris contermini, ut 1 ad $s+1$.
- K. Possuntque pari modo ex aliis item Figuris (putâ Hyperbolicis, Ellipticis, aliisve mille modis variatis,) alia Spiralium genera Convolutione fieri; atque in eas unde construuntur evolvi. Quarum quidem Figurarum Spiralium mensuræ, ex illarum figurarum mensuris dependent, quarum Convolutione fiunt.
- K. Sunt utique Figuræ Spirales, non modò quæ ex Convolutionis Parabolis, sed & quæ ex aliis figuris Convolutis oriuntur; Figurarum illarum, ex quarum Convolutione fiunt, Dimidiæ,

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 513

Et quidem non modò Curva Spiralis *Archimeden*, est æqualis Curvæ Parabolicæ *Apoloniana* correspondenti; sed & aliæ Spirales quælibet, æquales illis respective sive curvis sive rectis quarum Convolutione fiunt. K.

Adeoque cognitâ Figuræ Spiralis Magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; cognoscitur similiter vel magnitudo istius figuræ cujus Convolutione fit, vel longitudo lineæ: Et vice versa. K.

Et quidem Spiralis illa cujus rectæ MT , crescunt in angulorum AMT ratione duplicatâ, non modò rationem habet cognitam ad Sectorem conterminum; sed ipsius Curvæ Rectam æqualem assignare licet, eamque in data ratione secare. O.

Quod ipsum aliis item Spiralibus innumeris contingit. Sed & Figura Spiralis (ex Paraboloide convoluta) assignari potest, quæ ad Sectorem conterminum rationem quamvis datam habeat; saltem Minoris ad Majus, numeris explicabilem: Et Paraboloides similiter, eidem correspondens: Ut & cuivis Paraboloidi respondens Spiralis. B. N.

Potestque hæc Spiralium doctrina, ad alia multa Spiralium genera ampliari. R.

SI Spiralis Radii MT , MT , crescant, non quidem in ratione Angulorum AMT , AMT , (ut in Spirali *Archimeden*,) sed in eorundem ratione duplicata, puta ut a^2 : Erunt Sectores similes (figuram Spiralem componentes) ut a^3 (utpote in duplicata ratione arcuum suorum:) Adeoque, eorundem aggregatum ad aggregatum totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 5 (= 4 + 1), per prop. 1. hujus. A. Fig. 199, 200.

Si Radii MT , MT , sint in angulorum AMT , seu PMT , ratione triplicata; hoc est, ut a^3 ; adeoque Sectores similes, ut a^4 ; erunt simul omnes ad totidem maximo æquales; hoc est, Figura Spiralis ad conterminum Sectorem; ut 1 ad 7. per eandem 1. hujus.

Et, universaliter, si Radii MT , crescant in Angulorum PMT , ratione Simplicâ, Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. Figura Spiralis

Fig. 199, 200. Spiralis, ad Sectorem conterminum, erit ut 1, ad 3, 5, 7, 9, &c. (Non, ut 1 ad 3, 4, 5, 6, &c. quod per incuriam scriptum erat in *Arithm. Infin. Schol. Prop. 45.*) propter Sectores similes in Radiorum ratione duplicatâ.

Et similiter; si crescant Radii in Angulorum ratione Subduplicatâ, Subtriplicatâ, Subquadruplicatâ, &c. adeoque Sectores in ratione Simpla, Duplicata Subtriplicatâ, Subduplicatâ, &c. Figura Spiralis ad Sectorem conterminum erit, ut 1 ad $1 + 1$, $\frac{2}{3} + 1$, $\frac{1}{2} + 1$, &c. hoc est, ut 1 ad 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, &c. vel 1 ad 2; 3 ad 5; 4 ad 6, &c.

Si crescant Radii in Angulorum ratione Duplicatâ subtriplicatâ, Triplicatâ subquadruplicatâ, &c. adeoque Sectores, in ratione Quadruplicatâ subtriplicatâ, Triplicatâ subduplicatâ, &c. (utpote in duplicatâ ratione radiorum;) erit Figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad $\frac{4}{3} + 1$, $\frac{1}{2} + 1$, &c. (nempe ut 1 ad seriei indicem unitate actum, per prop. 1. hujus;) hoc est, ut 3 ad 7, 2 ad 5, &c.

Quod ipsum similiter valeret, si intelligerentur Radii crescentes secundum Seriem cujus Index sit numerus surdus, puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. adeoque Index seriei Sectorum, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, &c. quippe Figura Spiralis esset ad Sectorem conterminum, ut 1 ad $2\sqrt{2} + 1$, $2\sqrt{3} + 1$, &c.

Illud utique ubique obrinet, si Radii sint ut Series cujus Index sit S ; Sectorum Series Indicem habebit $2S$; adeoque summa Sectorum omnium ad maximum toties sumptum; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; ut, 1 ad $2S + 1$: per prop. 1. hujus.

B. Et consequenter, Facile assignabitur Spiralis sic constructa, ut Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, datam habeat (minoris ad majus) rationem. Esto enim ratio data, ut 1 ad D . Quoniam est (ut jam ostendimus) Figura Spiralis ad Sectorem conterminum ut 1 ad $2S + 1$; atque imperatum est ut sit, ut 1 ad D ; erunt 1 ad $2S + 1$, & 1 ad D , eadem ratio; adeoque $D = 2S + 1$, hoc est $D - 1 = 2S$, & $\frac{D - 1}{2} = S$. Si itaque Radii MT, ponantur

ut Series Indicem habens $\frac{D - 1}{2}$; erit figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad D , in ratione data. Cum enim Series Radiorum Indicem habeat $\frac{D - 1}{2}$; Series Sectorum habebit Indicem

(istius

515

Fig. 199,
200.

$$\frac{D-1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Erunt MT, Series Subsecundariorum: hoc}$$
$$\frac{\mathcal{D}_{-1}}{2} = 2. \text{ E.}$$
$$\frac{D-1}{2}=1. \text{ Erunt MT, se-}$$
$$\frac{D-I}{2} = \frac{1}{4}. \text{ Erunt}$$
$$\frac{D-1}{2} = \frac{3}{2}. \quad \text{Erunt MT, Sc-}$$

a supponitur
e continet

$$\frac{D-1}{2}$$
$$1 \text{ ad } \frac{1}{2} : a-$$

Y v v

cius

Fig. 199, 200. cujus Index $-\frac{1}{4}$. Adeoque non inciperent MT , ab o , crescendo; sed ab Infinito ($\frac{1}{4} = \infty$) decrescendo: Esetque conterminus Sector, non quidem Circumscriptus sed Inscriptus.

Quæ quidem Figure, utut pro Spiralium generibus haberi possint, & aliarum Spiralium leges non refugiant (debitè accommodatas:) nos tamen eas potissimum hic spectamus quæ contermino Sectorè includuntur. Quamquam si libeat Spiralium nomen ad illas etiam ampliare; erunt utcunque ad reliquas Spirales similiter redigendæ, (nostrisque subiiciendæ legibus;) atque Figure quas *Reciprocas* dicimus, ad Paraboloidium familiam.

C. Quod autem Spiralis *Archimæda*, aliud non sit quam Convoluta Parabola *Apolloniæ*; sic evidentissimè demonstratur.

Fig. 200, 202. Sumptis ad Spiralem Fig. 200. MT , MT ; hoc est MP , MP , quotlibet; ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmetice proportionalibus: totidemque ad Parabolam rectam Fig. 202. illis respectivè æqualibus MP , MP ; hoc est, mT , mT : atque his proportionalibus utrobique ZY , ZY hoc est $M\mu$, $\mu\mu$, &c. Sumptoque ubivis figuræ Spiralis termino, puta MF , cui æqualis ponatur μF basis Parabolæ: huiusque altitudo $F\Pi$ seu MB æqualis semissi Peripheriæ sectoris contermini radio MF Fig. 200. descripti: Erunt ipsæ $M\mu$, $\mu\mu$, seu ZY , ZY , rectæ, Fig. 202. ipsis ZY , ZY , arcubus, Fig. 200. sigillatim æquales.

Quippe, si intelligantur numero infiniti arcus ZY arithmetice proportionales (ut 1, 3, 5, &c.) erunt hi omnes simul sumpti, æquales semissi totidem maximo æqualium; hoc est, semissi arcus contermini, radio MF descripti; per prop. 1. hujus. Cui quidem semissi cum ponatur æqualis altitudo Parabolæ $F\Pi$, seu MB , hoc est, aggregatum omnium $\mu\mu$ seu ZY Fig. 202. Sintque tum totidem numero, tum proportionales, ipsis ZY arcubus Fig. 202. Erunt singulæ singulis, respectivè sumptis, æquales.

Cum itaque sint etiam sigillatim MP seu mT Fig. 200. ipsis MP , seu MT , Fig. 202. æquales: Si intelligantur omnia m , μ puncta, in unum M colligi; (toto Parabolæ axe in verticis Punctum contracto;) manentibus rectarum μZ , mT , μY , longitudinibus; rectisque ZTY , in arcum flexis: Rectangula $Z\mu\mu Y$, in Sectores contracta, ipsis ZMY sectoribus, respectivè sumptis, congruent; propter tum radiorum, tum arcuum æqualitatem.

Sed Sectores illi ZMY , si numero infiniti intelligantur idem sunt atque Figura Spiralis (per def. 1. cap. 4.) ipsaque similiter Rectangula $Z\mu\mu Y$, idem atque Planum Parabolæ: Si itaque Parabola sic

Con-

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 517

Convoluta intelligatur, ut ea omnia ex quibus constari intelligatur Fig. 200, Rectangula, in totidem Sectores contrahantur; fit Figura Spiralis. 202.

Et quidem ea fit Spiralis (ut ex demonstratis constat) cujus terminalis recta ut MF , sit æqualis ipsi BF basi Parabolæ; angulusque circulationis tantus, ut contermini Sectoris arcus, duplus sit altitudinis Parabolæ: Hoc est, quæ eam habet rationem ad unam Circulationem integram, quam habet Parabolæ altitudo dupla, ad peripheriam integram ejusdem base descriptam: Vel etiam, (si intelligatur axis BM supra Parabolæ verticem continuati, usque dum in C puncto occurrat rectæ CF parabolam in F contingenti; unde, propter Parabolæ naturam, dupla futura est CB ipsius BM ;) eam, quam habet BC (axis continuatus ad occursum rectæ Parabolam in basis puncto contingentis,) ad integram peripheriam quæ Parabolæ base ut Radio describatur.

Constat autem, ex hac constructione, (propter singulos Sectores ZMY , singulorum respectivè Rectangulorum $Z\mu\mu Y$, dimidios;) Figuram Spiralem $MTTFM$, figuræ Parabolicæ MFB , dimidiam esse; & partes partium, respectivè sumptarum, dimidias. Quod similiter probabitur, de quovis alio Spirali generis, quæ ex quacunque fit figurâ sic convolutâ.

Constat item (quod ex veteribus dubitarunt nonnulli, nedum ex recentioribus,) Figuram Rectilineam Circulo æqualem esse posse; hujusve Sectori cuilibet: adeoque, rectam Peripheriæ. Cum enim certa sit ratio figuræ spiralis $MTTF$, tum ad Sectorem conterminum, (nempe, ut 1 ad 3;) tum ad MFB parabolam, ex cujus convolutione fit, (nempe, ut 1 ad 2;) tum denique hujus parabolæ ad circumscriptum rectangulum $MBF\pi$, (nempe, ut 2 ad 3;) erit contermini Sectoris Radio MF descripti (pota Semicirculi) ad $MBF\pi$ rectangulum certa ratio; (erit utique æqualis; propter $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{3} = 1$.) Cum itaque nullus sit circulus, cujus trienti non æquetur Figura Spiralis; nullaque figura Spiralis cujus duplo non æquetur Parabola; nullaque Parabola, cujus sesquialtero non æquetur Rectangulum Rectilineum: Nullus erit Circulus, cui non æquatur Rectangulum Rectilineum.

Constat etiam, si dari possit Altitudo Parabolæ MFB (seu hujus ad Basim ratio) quæ respondeat Spirali $MTTFM$ (cujus circulationis angulus datam rationem habeat ad quatuor rectos;) datum iri rationem Radii, Diametri, ad Peripheriam Circuli.

Sed & eadem FC quæ Parabolam tangit retento eodem cum BF angulo, CFB ; eandem etiam curvam tanget, postquam in Spiralem con-

VVVZ

518 *De Calculo Centri Gravitatis. CAP. V.*

Fig. 100,
202.

convoluta fuerit Parabola. Nam, quâ ratione probabitur omnes in Parabola rectas in T ordinatim-applicatas, (cum quæ sunt supra B F, tum quæ sunt infra,) sola B F exceptâ, ad C F contingentem non pertingere: eâdem ostendetur neque ad eam pertingere easdem convolutas in situm M T in Spirali. Quippe si (verbi gratia) ad M F fig. 200. ita constituta sit F C, ut ad illam non pertingeret rectæ M T punctum T, etiamsi extensa Z T Y curva in rectam litteretur ad ipsam M F perpendicularis (positâ, etiam T M, seu T m, in situ parallelo ad F M, seu F B,) quod fit in Parabolâ: multo minus ad eandem F C pertingeret idem T punctum in Z T Y inde recurvatâ; concurrente rectâ T m seu T M cum rectâ F M, in eodem M puncto; quod fit in Spirali.

Unde sequitur; eundem esse, ad tangentem, angulum M F C in Spirali, atque (qui huic correspondet) B F C in Parabola.

H. Et consequenter; si intelligatur F (verbi gratia) in fine circulationis primæ, rectæque (ad M F perpendicularis) M C, Tangenti F C occurrens in C, erit ipsa M C fig. 200. (principio Spiralis, & contingente, intercepta,) ipsi B C fig. 202. (Parabolæ axe ad occursum tangentis continuato,) æqualis; (propter angulos ad F utrobique æquales, adeoque similia triangula rectangula;) hoc est, (per modo demonstrata,) integræ Peripheriæ ratio M F descriptæ, seu Peripheriæ circuli primi: (ponitur enim F, in termino primæ circulationis; adeoque circulationis angulus, quatuor rectis æqualis.) Id quod ab *Archimede* fufius ostenditur, in libro de Spiralibus; estque ipsius Circuli quadratura, inde deducta; quo præcipue collimasse videtur in illa de Spiralibus doctrinâ.

Sin ubivis alibi (quam in fine circulationis primæ) intelligatur illud F punctum; puta in fine semicirculationis primæ, vel primi quadrantis, vel ubivis alias: idem consequi licebit. Quippe tum M C sic ducta (rectæ M F perpendicularis, & F C tangenti occurrens in C,) erit eadem pars (puta, vel semissis, vel quadrans, vel pars alia prout res tulerit,) integræ peripheriæ radio illo M F descriptæ, quæ est, circulationis integræ, exposita circulatio.

I. Sed & inde etiam sequitur; Curvam Spiralem M T T F fig. 200. curvæ Parabolicæ, correspondenti M F fig. 202. æqualem esse. Quippe si intelligantur utrobique summi partes analogæ infinitè exiguæ; in quibus itaque tangentium F C respectivarum particula, pro ipsis F T curvis habeantur per def. 1. cap. 4. (utpote à quibus differunt ratione datâ quavis minore;) ut & Y T curva, similiter, pro Y T recta, eidem æquali: adeoque minuta Trilinea T Y F, utrobique, pro

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 519

pro Triangulis rectangulis; & quidem (propter æquales utrobique respectivos angulos ad F) invicem similibus, quæ itaque & latera habebunt proportionalia: Erunt, propter YF rectas utrobique æquales, etiam FT (respective sumptæ) itidem æquales. Cumque hoc ubique contingat, erunt omnes FT curvam Spiralem constituentes, æquales omnibus FT constituentibus curvam Parabolicam; hoc est, MTTF curva spiralis, æqualis correspondenti MF curvæ Parabolicæ. Quod demonstrandum erat. Idemque alias demonstravimus, in Tractatu, *De Curvarum Eclipsis*, Tractatui de Cycloide subjuncto.

Quod etiam in aliis Spiralium generibus non minus valet. Si intelligatur enim eadem MFB fig. 202. non jam ut *Apolloniana* Parabola, sed ut Paraboloides, Hyperbola, aliave ad libitum figura, in minuta Rectangula, ut $Z\mu\mu Y$, resoluta: quæ (punctis omnibus m, μ , in unum M collectis,) in totidem Sectores, (Rectangulorum dimidios,) redigantur: qui quidem vel similes inter se erunt, si eadem ponatur ubique ratio rectarum ZY ad mT; vel, si secus, dissimiles; (eam utique rationem habebit sectoris cujuscvis angulus, ad quatuor rectos; quam habet ZY ad integram Peripheriam radio mT describendam;) alia atque alia fient Spiralium genera.

Neque refert, utrum MF fig. 202. sit curva, an Recta; sed nec, utrum ad unum M verticis punctum terminetur, an secus. Quippe si integrum Rectangulum MBF Π sic convolveretur, (toto MB latere in unicum M punctum collecto, latereque ΠF in arcum curvato,) Spiralis hinc oriunda, Circulus esset; vel Sector Circuli, qui eam habeat ad integrum circulum rationem quam F Π recta ad peripheriam radio BF vel M Π descriptam.) Et quidem, si Trilinum MFB, ubivis truncatum recta mT, intelligeretur sic convolvi; hoc saltem inde sequeretur discriminis, quod non jam ab puncto ut M, ordiretur Spiralis fig. 202. sed, a recta aliqua, ut MT.

Hoc interim omnibus commune erit; Nempe, Figuram Convolutione factum, ut MTTF fig. 202. dimidiam esse ejusdem evolutæ, ut MFB fig. 202. propter singulos ZMY sectores, singulorum $Z\mu\mu Y$ rectangulorum respective sumptorum, dimidios.

Item; Tangentem FC, fig. 202. retento angulo CFB, tangentem etiam fore figuræ convolutæ MTTFM fig. 202. Quippe, & hic non minus obtinebit præcedens demonstratio, quæ ostendebatur hic contingere in Spirali *Archimædi*. Si enim recta mT, punctum T in ZTY recta, fig. 202. ad TC tangentem non pertingat; multo minus ad eandem pertingeret in eadem ZTY recurvatâ,

Fig. 200,
202.

K.

fig.

Fig. 200. 202. *fig. 200.* Quod ipsum obtinet etiam vice versâ: Si enim convoluta curva FT *fig. 200.* explicanda intelligatur in correspondentem FT *fig. 202.* quanquam T propius accederet ad TC tangentem, non tamen eò pertingeret: Nisi saltem explicanda esset in lineam rectam, (quod in Circulo fit; cujus explicata curva, eadem futura est cum parallelogrammi pridem convoluti latere;) quippe, hoc casu, explicata linea cum tangente coincidet; quæ enim supponatur recta rectam contingere, alia non erit quàm ipsa recta; quippe, nisi coincidat, secabit. Si vero adhuc ulterius explicanda intelligatur figura, ut non modo ad ipsam FC pertingat T, sed transeat; adeoque FT recurva fiat, in contrarias partes flexa: etiam adhuc eandem FC, sed ad contrarias partes, tanget. Cum enim flexionis angulus, qui idem est atque angulus contactus magnitudinem vel nullam habeat, vel infimè exiguam, (sive sit rectæ & curvæ contactus, sive duarum curvarum externè vel internè tangentium,) quod ad prop. 15. cap. 2. ostensum est; eadem quæ prius fuerat manebit recta contingens FC, utcumque flectatur (modo nè frangatur, ut angulum faceat, rectilineo æquipollentem,) FT curva, in puncto F.

Sed &, quâ ratione hinc inferitur, (ob cognitum in parabola punctum C in quo cum axe producto Tangens occurrat,) *Archimedea* Circuli quadratura per Tangentem Spiralis: idem etiam simili ratione colligetur, ex aliis innumeris Spiraliū generibus, ex convolutis figuris oriundis, in quibus idem C punctum pariter cognoscitur. Cum enim BMB *fig. 202.* altitudo figuræ convolvendæ, æqualis sit omnibus ZY arcibus *fig. 200.* simul sumptis: si quocunque modo colligi poterit quam habeant illi omnes ad contermini Sectoris arcum, quemque hic habeat ad integram peripheriam; conficietur negotium. Quippe cognitâ MC *fig. 200.* (cujuscunque Spiralis,) cognoscitur etiam (eidem æqualis) BC *fig. 202.* adeoque, quam habeat ea rationem ad cognitam MB *fig. 202.* hoc est, ad omnes ZY *fig. 200.* adeoque & (cum horum ad arcum Sectoris contermini ratio nota ponatur,) ad arcum Sectoris contermini, & propterea (cum hujus ratio ad integram peripheriam nota ponatur) ad circuli peripheriam radio MF *fig. 200.* vel BF *fig. 202.* descriptam.

Item MF figuræ convolvendæ *fig. 202.* æqualem Curvæ figuræ convolutæ MITF *fig. 200.* Quippe Demonstratio prius adhibita in comparatis invicem *Apollonianâ* Parabolâ, & Spirali *Archimedea*; in aliis non minus obtinet. Nempe, in partibus infinitè exiguis, habenda esse utrobique TYF trilinea, pro Triangulis rectangulis, & quidem (propter æquales utrobique angulos ad F) invicem similibus; adeoque

PROP. XXVIII. De Centro Centri Gravitatis. 521

adeoque, propter æquales utrobique YF , æquales item erunt FT ; Fig. 200, atque hoc semper. Æqualis itaque tota MF curva fig. 202. toti 202 . $MTTF$ fig. 200.

Et propterea; ex cognitâ vel figuræ Spiralis magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; similiter cognoscitur vel Magnitudo figuræ quæ cujus convolutione fit, vel longitudo linear. Et vice versâ.

L.

Ut autem, ex convolutâ Parabolâ, fit Spiralis *Archimedeæ*; sic, ex Paraboloidibus convolutis, sunt Spirales aliæ; quarum radii MT crescunt in ratione angulorum AMT duplicatâ, triplicatâ aliâsve multiplicatâ, vel subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâsve submultiplicatâ; aut etiam ex his utcumque compositâ.

Quod eodem modo ostendi potest quo in Parabolâ id ostensum est; sumptis Paraboloidibus idoneis, in quibus rectæ MB , $M\pi$, sic dividantur ut μ , $\mu\mu$, &c. hoc est ZY , ZY , &c. sint ipsis MP , MP , &c. proportionales, (quò sectores ZMY fig. 200. ex reſtangularis $Z\mu\mu Y$ fig. 202. convolutis facti, similes sint,) Paraboloidisque curva per ipsas ZY , ZY , rectas transeat. (Quod aliis aliisque modis, pro variis Paraboloidum generibus, faciendum erit.) Hoc enim factò, ostendetur, ut prius in Parabolâ, singula Rectangula, in respectivos Sectores, ipsorum dimidios, convolutum iri: reliquæ quæ hinc sequuntur.

Cum verò aliud occurrat modus expeditior, aliunde sumptis principiis, idem præstandi; (neque lectori, credo, displicebit varietas;) rem sic aggrediemur; ea methodo quâ ad *Arithm. Infin. prop. 36.* &c. usus sum.

In Spirali *Archimedeâ*, $MTTF$, fig. 199. sumptis Sectoribus Fig. 199, similibus; adeoque tum radiis MT , MT , &c. hoc est, MP , MP , 202. &c. tum angulis PMT , PMT , &c. arithmetice proportionalibus; ut 1, 2, 3, 4, &c. Erunt arcus PT , PT , (utpote in ratione quæ ex radiorum MP , & angulorum MPT , rationibus componitur,) ut 1, 4, 9, 16, &c. series Secundanorum; (nempe uno gradu altior quàm est series Radiorum MP , propter angulos MPT , in ratione seriei Primanorum, seu arithmetice-proportionalium;) adeoque, si in rectas expandi intelligantur, erunt ut totidem ordinatim applicatæ in complemento Parabolæ, (axem habente MP ; altitudinem, ipsi PF , non ut prius hujus dimidio, æqualem,) utpote in ratione duplicatâ aziam MP , MP : (quales sunt PT , PT , complementes Semiparabolæ complementum $MTF\pi$ fig. 202. sumptis BF , $F\pi$, fig. 202. æqualibus ipsis ME , EOP , fig. 199.) & propterea, simul

simul omnes, (hoc est MTP , spiralis complementum ad conterminum sectorem,) æquantur Trienti Rectanguli Parabolæ circumscripti; hoc est, $\frac{1}{3}MP \times PF$, seu $\frac{1}{3}M\pi \times \pi F$, (per 1. vel 6. hujus.) Estque Conterminus Sector $MPFM$, (utpote ex arcibus arithmetice proportionalibus conflatus,) $= \frac{1}{2}MP \times P$, (per 1. hujus.) Ergo, figura Spiralis (utpote Sectoris residuum,) $= \frac{1}{6}P \times PF$, (propter $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$;) hoc est, (propter $\frac{1}{6} : \frac{1}{2} :: 1 : 3$;) ad Sectorem conterminum, ut 1, ad 3.

Fig. 199,
200,
202.

Nequis autem hæsitet, cur parabolæ MEB fig. 202. altitudinem, jam ponam, ipsius arcus contermini PF fig. 199. longitudini æqualem; quam prius fueram arcus PF fig. 200. dimidians: ratio in promptu est. Cum enim retinentibus suam singulis longitudinem rectis ZY , utut in axem curvatis; dum, in rectis MB , contrahuntur $\mu\mu$ in unicum in punctum; adeoque Parabolæ magnitudo decreseat: necesse est ut, in πF , rectæ $\xi\xi$ (ipsis ZY æquales) protrahantur puta in ΞY , (quibus respondeant, in Sectore Spirali contermino, arcus OO ;) adeoque Complementi magnitudo crescat. Et propterea, dum complementum consideramus, (juxta hanc hypothelin,) facienda erit πF (complementi Semiparabolæ seu Semiparaboloidis basis) ipsi POF semper æqualis, (quicunque fuerit Parabolæ seu Paraboloidis gradus,) utpote quæ ex omnibus ΞY , (hoc est, omnibus OO ;) componitur. Dum vero Parabolam vel Paraboloidem figuram MEB (juxta priorem hypothelin) consideramus; facienda est MB parabolæ seu paraboloidis altitudo, (non quidem omnibus OO , hoc est ipsi POF ;) sed omnibus ZY simul sumptis æqualis: hoc est, in Spirali *Archimedea*, (propter ipsas MT , adeoque ZY , fig. 200. arithmetice proportionales,) æqualis semissi arcus POF : Sed, si essent ipse MT , adeoque ZY , ut illarum Quadrata (seu in duplicatâ ratione angulorum PMT ;) hoc est, ut series Secundanorum; esset $MB = \frac{1}{3}POF$: Si ut Series Tertianorum; esset $MB = \frac{1}{4}POF$: Et sic in aliis gradibus, prout cuiusque ratio postulaverit; per prop. 1. hujus. (Quod in *Arithmetica Infinitorum*, prop. 5. & sequentibus, fufius ostendimus.) Atque hinc est, quod dum, in complemento considerando, reputamus omnes OO , hoc est ΞY , invicem æquales: in Parabolâ, seu Paraboloides, reputamus ipsas $\mu\mu$, seu ZY rectas; hoc est, in Spirali, arcus RY ; continue crescentes, in ratione ipsarum in T , seu MT , rectarum. Quæcunque enim fuerit ipsarum ZY differentia; dummodo idem sit angulus ZmY seu ZMY , eademque Radii MO seu mO longitudo; eadem ubique erit ipsius ΞY seu OO longitudo. Tantandem utique sunt Triangula ZmY , ΞmY , atque

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 523

arque Sectores ZMY , OMO , respectivè sumpti; per 12 hujus. Quæ aliquantò fufius explicanda putabam, quò clariùs percipiantur omnia.

Eodem planè modo; si intelligatur Spiralis $MTTF$ fig. 203. ita M .
construi, ut, sumptis angulis PMT , PMT , arithmetice propor- Fig. 203,
tionalibus, (ut prius;) radii MT , MT , seu Mp , Mp , sint in 204.
eorum ratione Duplicatâ; seu, ut series Secundanorum: manife-
stum est, Arcus pT , pT , seriem esse Tertianorum (uno gradu
altiore quam est Series radiorum Mp , Mp ,) utpote quorum
rationes componuntur ea rationibus radiorum Mp (quæ est Series
Secundanorum,) & angulorum PMT (quæ est series Primanorum)
respectivè sumptorum. Puta, ut rectæ pT , pT , fig. 204. diame-
tro MP ordinatim-applicatæ, in paraboloidis, complemento MPE .
Cujus quidem diametri Mp , Mp , sunt ut Secundana, sive
Quadrata arithmetice-proportionalium; ordinatim-applicatæ pT ,
 pT , ut Tertiaria, seu arithmetice-proportionalium Cubi: Adeoque
in Diametrorum ratione Subduplicatâ-Triplicata. Quæ itaque, si
æqualibus intervallis sumerentur (non, uti nunc sunt, propter Mp ,
 Mp , in ratione secundanorum;) hoc est, ut ordinatim-applicatæ
ad diametros Mp arithmetice-proportionales; series essent Indicem
habens $\frac{1}{2}$. Quarum itaque ratio, ad maximam toties sumptam;
hoc est, ratio complementi $MTFP$ ad Parallelogrammum circum-
scriptum $MBFP$; est, ut 1 ad $\frac{1}{2}$ — 1 = $\frac{1}{2}$; seu ut 2 ad 5. Est au-
tem Sector PME fig. 203. ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 2:
(æquatur enim Sector, uti notum est, semissi rectanguli quod illius
Radio & Arcu comprehenditur.) Cum itaque (propter singulos
arcus pT , singulis rectis pT respectivè sumptis æquales; & eandem
utrobique altitudinem MP ;) Complementum Spiralis $MTFP$
fig. 203. æquale sit Complemento Paraboloides $MTFP$ fig. 204.
erit Complementum illud Spiralis $MTFP$, ad Sectorem contermi-
num PME ; ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; seu 4 ad 5: Et consequenter (quod reli-
quum est) Figura Spiralis $MTFM$, ad eundem Sectorem, ut 1
ad 5. (Quod etiam prius ostensum erat ad § A.) Arcusque Tf
fig. 203. complentes figuram Spiralem MTF ; tantundem sunt atque
rectæ Tf fig. 204. complentes Bilineum $MTFM$. (Uti etiam ipsa
 Tf , fig. 202. tantundem sunt atque Tf arcus fig. 199. complentes
figuram Spiralem MTM ; seu, qui arcubus PT defunt ad com-
plendum Sectorem conterminum.) Cum enim rectæ pf complentes
Triangulum MFP fig. 204. tantundem sint atque pf arcus com-
plentes Sectorem MFP fig. 203. (utpote utrobique arithmetice pro-
portionales,

Xxx

Fig. 103,
204.

N.

portionales, & maxima maxima æqualis, eademque utrobique altitudo;) sintque rectæ p T tantundem atque p T arcus: sequitur, Rectas residuas T f, tantundem esse atque residuos arcus F f.

Sed & simul innotescit, ex cujus Paraboloideos convolutione, oriatur exposita Spiralis, cujus radii M T sint in duplicatâ ratione angulorum P M T. Nempe Paraboloideos Semicubicalis, (quippe talis est M T F curva fig. 204. ut ex constructione patet;) hoc est, cujus ordinatim-applicatæ T p in complemento, sint in diametrorum M p ratione Subduplicatæ-Triplicatæ; & propterea in Paraboloide, ordinatim-applicatæ T d, hoc est, p M, in diametrorum M d, hoc est p T, ratione Duplicatâ Subtriplicatæ.

Cujus quidem Paraboloideos Basis B F, æqualis esse debet ipsi M F terminali in Spirali: Altitudo verò, non ipsi M B fig. 204. hoc est, arcui P F fig. 203. seu aggregato omnium O O (quales in fig. 199, 200. conspiciuntur;) sed in eâ ad ipsam M B fig. 204. ratione, quæ est (figuræ naturâ ritè perpensâ) omnium Z Y, ad omnes O O, seu æ Y, (quales in fig. 199, 202. conspiciuntur:) Hoc est, in præsentî casu (propter ipsas M T, adeoque Z Y, seriem Secundariorum,) ut 1 ad 3. Adeoque, si Paraboloidis Semicubicalis, cujus basis sit B F, altitudo $\frac{1}{3}$ M B, fig. 204. omnia rectangula (qualia Z μ Y fig. 202.) in totidem triangula (ut Z m Y) seu Sectores Z M Y (prout in fig. 200.) convolvi intelligantur: fiet figura Spiralis M T F M fig. 203. æqualis istius Paraboloideos semissi. Quæ eodem modo demonstrantur, quo eadem de Parabolâ & Spirali Archimeden ostenduntur, § C, D, E.

Idemque ex calculo patet. Cum enim Index seu Exponens seriei Complementi M F P fig. 204. sit (ut supra ostensum est) $\frac{2}{3}$; adeoque ipsius Paraboloideos M F B, $\frac{5}{3}$; erit hujus ad circumscriptum Parallelogrammum M P F B, (per prop. 1. hujus) ut 1, ad $1\frac{1}{3}$; seu 3 ad 5: Adeoque si (cæteris manentibus) sumatur altitudo subtripla, (quod faciendum esse ostendimus,) fiet ratio, ut 1 ad 5: Et consequenter, (quæ hujus est dimidia,) figura Spiralis M T F M fig. 203. ad idem Parallelogrammum M P F B fig. 204, ut 1 ad 10; hoc est, ad P M F fig. 203. Sectorem conterminam, (Parallelogrammi dimidium,) ut 1 ad 5. Quod fieri debere, supra ostensum est.

O.

Similiter etiam ostendetur, (ut ad § I, K.) Curvam istius paraboloideos sic constructi, æqualem esse curvæ spiralis M T F fig. 203. Verum hujus Paraboloideos Curvæ, æqualem rectam jam olim exhibuit Neilius noster, (Anno 1657. omnium primus,) & post illum alii; (quod in Tractatu *De Curvarum Evolutis*, pag. 91. &

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 525

& seqq. ostendimus.) Ergo, ipsi M T F Spirali, æqualis recta ex- Fig. 203,
hibebitur. Suppositâ circuli quadraturâ, quæ hic necessaria erit 204.
(ut ex prædictis patet) pro designanda Paraboloides altitudine, quæ
expositâ Spirali conveniat: utpote cujus altitudo, æqualis esse debet
trienti arcus P F.

Quodque de rectâ hujus Spiralis curvæ æquali ostensum est; simi-
liter & aliis Spiralibus accommodabitur, quæ ex ejusmodi parabo-
loidibus aliisve figuris convolutis fiunt, quarum curvis æquales rectæ
assignari possunt. De quibus fufius egimus in Tractatu De Curvaturis
Evolventium, præsertim pag. 111. & seqq.

Ad eandem formam procedendum erit, in aliis Spiralibus, qua-
rum Radii M T, sint in angulorum P M T ratione multiplicatâ,
submultiplicatâ, vel ex his utcumque compositâ. Sunt enim verbi
gratiâ, (ut unâ vice omnes absolvam,) ipsæ M T, seu M P, fig.
203. series Exponentem seu Indicem habens S: erunt itaque arcus
P C (utpote in ratione ex Radiorum & Angulorum rationibus com-
positâ) series uno gradu altior; adeoque Indicem habens S-1. I-
demque Index, per S divisus, erit correspondentis M T F P Complementi
Paraboloides (fig. 204.) Hujus Paraboloidis, (cujus itaque Index erit

$\frac{S}{S-1}$;) Basis ponenda erit æqualis ipsi M F spiralis Terminali
rectæ. Altitudo verò, quæ ad arcum Sectoris contermini P F eam
habet rationem quam Seriei ratio postulat; nempe quam habent om-
nes Z Y, seu M T, ad totidem maximo æquales; hoc est (propter
seriei Indicem S,) ut 1 ad S-1 (per prop. 1. hujus.) Quæ qui-
dem Parabola seu Paraboloides est Figuræ Spiralis dupla; Curvaque
illius, hujus curvæ æqualis; Tangensque illius cum Parabolæ seu
Paraboloidis Ordinatum applicatâ in puncto contactus, eundem an-
gulum facit quem facit Tangens Spiralis cum hujus radio respectivo.

Si verò, vice versâ, quæratur quæ nam Figura Spiralis expositæ
Paraboloidi conveniat; putâ cujus Exponens sit $\frac{1}{p}$. Erit $\frac{1}{p} =$

$\frac{S}{S-1}$ (ut ex dictis patet;) ergo $p = \frac{S-1}{S}$, & $pS = S-1$, & $pS - S$

$= -1$, & $S = \frac{1}{p-1}$, qui Index erit Seriei radiorum M T in Spirali qua-
si-
ta; cujus recta terminalis M F futura est Paraboloidis basi æqualis;
angulusque circulationis talis ut Sectoris Arcus conterminus eam ha-
beat rationem ad expositæ Parabolæ vel Paraboloidis altitudinem, quam
habet S-1 ad 1. Quod ex modo demonstrati facile colligitur.

X x x 2

Supereft

P.

Q. Supereft, ut Centra gravitatis exquiramus. Quod eodem modo
 fiet atque in Propositione præcedente faftum eft. Pofito enim, ut
 Fig. 200. illic, P pro peripheriâ primi circuli; cujus pars infinitesima fit T ;
 radius R ; fimiliûmque feftorum radii, utcunque crefcentes, n ;
 quibus respondeant in eadem ratione t : Erunt fimiles Seftores qui-
 libet $\frac{1}{2}nt$, feu $\frac{n^2 \Gamma}{2R}$; eorûmque ab M diftantia Centrorum gravi-
 tatis refpectivè, $MR = \frac{2}{3}n$; adeoque à PMF , eorundem diftan-
 tia $RS = \frac{2ns}{3R}$; ab EMG , diftantia $RX = \frac{2nx}{3R}$: (nempe, in
 eâ ratione ad RM , qua eft Sinus Reftus illic, hic Co-finus feu finus
 complementi, anguli PMR , ad Radium:) Et propterea, fingu-
 lorum refpectivè momenta refpectu rectæ PMF , $\frac{n^2 \Gamma}{2R} \times \frac{2ns}{3R} =$
 $\frac{n^3 s \Gamma}{3R^2}$; refpectu rectæ EMG , $\frac{n^2 \Gamma}{2R} \times \frac{2nx}{3R} = \frac{n^3 x \Gamma}{3R^2}$: Vel, (neglecto
 T , ob caufas ad § E. prop. præced. traditas,) illic, $\frac{n^3 s}{3R^2}$; hic, $\frac{n^3 x}{3R^2}$. At-
 que hoc quidem univerfaliter, quacunque ratione crefcant radii MT ,
 quos n dicimus ufque ad eorum maximum N , qui fit MT termi-
 nalis.

Et propterea; Si crefcant MT , feu n , in ratione angulorum
 PMT arithmetice proportionalium, quos a dicimus; erit $n = \frac{a}{P} R$,
 (hoc eft, in eadem ratione ad R radium circuli primi, qua eft a ad P ;
 hoc eft, angulus expositus PMT , ad quatuor rectos; feu iftius
 anguli Arcus in Circuli primi peripheria, ad peripheriam integram;) Adeoque
 $\frac{n^2 \Gamma}{2R} = \frac{a^2 RT}{2P^2}$; & $\frac{n^3 s \Gamma}{3R^2} = \frac{a^3 s RT}{3P^3}$; & $\frac{n^3 x \Gamma}{3R^2}$
 $= \frac{a^3 x RT}{3P^3}$. Qui eft cafus, Spiralis *Archimæda*, capite præcedente
 expositus.

Si verò crefcant MT feu n , in angulorum a ratione duplicatâ, tripli-
 catâ, aliâve multiplicata; erit $n \neq \frac{a^2}{P^2} R$, vel $n = \frac{a^3}{P^3} R$, & fic
 porro prout rationis multiplicatæ gradus poftulaverit. Adeoque $\frac{n^2 \Gamma}{2R}$
 $=$

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 527

$$= \frac{a^4 RT}{2P^4}, \& \frac{n^3 s T}{3K^2} = \frac{a^6 s RT}{3P^6}, \& \frac{n^3 x T}{3K^2} = \frac{a^4 x RT}{3P^6}; \text{ Vel } \frac{n^2 T}{2R} \text{ Fig. 200.}$$

$$= \frac{a^6 RT}{2P^6}, \& \frac{n^3 s T}{3K^2} = \frac{a^2 s RT}{3P^6}, \& \frac{n^3 x T}{3K^2} = \frac{a^2 x RT}{3P^6}; \& \text{ sic porro, prout res postulaverit.}$$

Si crescant MT seu n , in angulorum a ratione subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâve submultiplicatâ; erit $n = R \sqrt{\frac{a}{P}}$, vel $n = R \sqrt[3]{\frac{a}{P}}$,

atque sic porro. Adeoque $\frac{n^2 T}{2R} = \frac{aRT}{2P}$, & $\frac{n^3 s T}{3K^2} = \frac{1}{3} s RT \sqrt{\frac{a^3}{P^3}}$

$$= \frac{asRT}{3P} \sqrt{\frac{a}{P}}, \& \frac{n^3 x T}{3K^2} = \frac{axRT}{3P} \sqrt{\frac{a}{P}} = \frac{1}{3} x RT \sqrt{\frac{a^3}{P^3}};$$

$$\text{Vel } \frac{n^2 T}{2R} = \frac{1}{2} RT \sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}, \& \frac{n^3 s T}{3K^2} = \frac{asRT}{3P}, \& \frac{n^3 x T}{3K^2} = \frac{axRT}{3P};$$

Atque sic porro, ut casus postulaverit.

Si crescant denique MT seu n , in angulorum a ratione aliquâ quæ composita sit ex multiplicatâ & submultiplicatâ; puta, subduplicata triplicatâ, seu ut $\sqrt[3]{a^3}$: Erit $n = R \sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = aR \sqrt{\frac{a}{P}}$; ade-

$$\text{oque } \frac{n^2 T}{2R} = \frac{a^3}{2P^3} RT, \& \frac{n^3 s T}{3K^2} = \frac{1}{3} s RT \sqrt{\frac{a^9}{P^9}} = \frac{a^3 s RT}{3P^3} \sqrt{\frac{a}{P}},$$

$$\& \frac{n^3 x T}{3K^2} = \frac{a^3 x RT}{3P^3} \sqrt{\frac{a}{P}}: \text{ Et similiter alibi, prout cujusque compositionis gradus postulaverit, mutatis mutandis.}$$

Ut igitur habeatur summa Omnium $\frac{n^2 T}{2R}$; hoc est, ipsa figura Spiralis, quocunque demum multiplicatâ seu submultiplicatâ seu ex his compositâ rationis gradu crescant MT seu n : id saltem requiritur ut habeatur summa omnium a^2 , vel $omn. a^4$, vel $omn. a^6$, vel $omn. a$, vel $omn. \sqrt[3]{a^2}$, vel $omn. a^3$, aliave istiusmodi summa prout res postulaverit: (Quod universaliter obtinebitur per prop. 1. hujus.) Quippe hæc summa (per analogam ipsius P potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{2} RT$, vel (neglecto tandem T , ob causas § E. prop. præced. traditas,) in $\frac{1}{2} R$; exhibet Spiralis figuræ magnitudinem. Quam & ante habuimus § A.

Ut autem habeatur summa omnium $\frac{n^3 s T}{3K^2}$, vel omnium $\frac{n^3 x T}{3K^2}$; hoc est, istius figuræ spiralis momentum respectu PMF, vel EMG; adeoque

Fig. 200. adeoque (momento per magnitudinem diviso) Distantia Centri gravitatis ab illis rectis: Id requiritur, ut habeatur summa omnium a^3s , a^3x ; vel omnium a^2s , a^2x ; vel omnium a^2s , a^2x ; vel omnium $s\sqrt{a^3}$, $x\sqrt{a^3}$; vel omnium $s\sqrt[3]{a^3}$, $x\sqrt[3]{a^3}$, (hoc est, omnium a^2s , a^2x ;) vel omnium $s\sqrt{a^2}$, $x\sqrt{a^2}$, (hoc est, omnium $a^2s\sqrt{a}$, $a^2x\sqrt{a}$;) aliave istiusmodi summa prout expositus casus postulaverit. Quippe hæc summa (per analogam ipsius T potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{3}RT$, vel (neglecto T) in $\frac{1}{3}R$; exhibebit totius momentum respectu rectarum PMF , EMG ; atque ad hæc aut illas partes, prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit; ut ad prop. præced. ostensum est. Unde etiam (ut dictum est) colligitur Centri gravitatis ab illis rectis distantia.

Quo pacto autem habebitur summa omnium a^2s , a^2x ; vel omnium a^2s , a^2x ; vel omnium a^3s , a^3x ; (ope prop. 10. hujus,) ostensum est ad § E.H. prop. præced. Quod etiam (ut ibidem monitum est § H.) ad alias ejusdem a potestates (indicem habentes numerum integrum) continuabitur; puta, ad a^4s , a^4x ; a^5s , a^5x ; a^6s , a^6x ; &c.

Quod itaque sufficiet casibus eis omnibus, ubi ponuntur MT seu n crescentes vel in ratione angulorum a , vel in horum ratione duplicatâ, triplicatâ, aliâve multiplicatâ. Ut patet.

Vel etiam, in ipsorum a ratione subtriplicatâ, aut subtriplicatæ multiplicatâ. Quippe si sit $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{p}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a^2}{p^2}}$, &c. in

horum Cubis, tollitur Radicalitatis nota; nempe $n^3 = \frac{a}{p}R^3$, vel $n^3 = \frac{a^2}{p^2}R^3$; & sic in cæteris: Adeoque $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3p}$, $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3p}$; vel $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^2sRT}{3p^2}$, $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^2xRT}{3p^2}$; & sic in cæteris. Quæ itaque omnia, ope ejusdem prop. 10. exhiberi poterunt; uti ostensum est.

Verum si ponantur MT , seu n , crescentes in angulorum a ratione subduplicatâ, subquadruplicatâ, aliâve submultiplicatâ, aut ex his utcumque compositâ, (quæ non æquipolleat vel ipsi angulorum a rationi, vel hujus alicui multiplicatæ, vel saltem subtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ;) res non ita feliciter succedit. Quoniam hic, ne quidem in Cubis eliminabitur Radicalitatis nota: Adeoque nec satis applicari poterit methodus illa, § E.H. prop. præced. exposita; ex prop. 10. hujus petita,

Quæ

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 529

Quæ autem, ad § Q. universaliter tradita sunt; Nempe, quæ-
cunque ratione crescant MT seu n radii; Sectorum similium magni-
tudines esse, $\frac{n^2 T}{2 R}$; eorumque momenta respectu P M F, & E M G,

esse $\frac{n^3 T}{3 R^2}$, & $\frac{n^3 x T}{3 K^2}$: Non modo in his Spiralibus locum habent,
ubi radii n sint in angulorum a ratione multiplicatâ, vel submulti-
plicatâ, vel ex his compositâ, sed quæcunque fuerit utcunque per-
plexâ seu implicata ratio. Quæcunque enim fuerit, siquo modo ha-
beri possit summa omnium $\frac{n^2 l}{2 R}$, habebitur spiralis magnitudo: &

si haberi possit summa omn. $\frac{n^3 l}{3 R^2}$, & omn. $\frac{n^3 x l}{3 K^2}$; habebitur istius
Momentum respectu P M F, & E M G: & quidem si utraque ha-
beantur; habebitur (momento per magnitudinem diviso) Distantia
Centri gravitatis ab illis rectis.

Exempli gratia; si ponantur radii n , crescentes in ratione Ordina-
tim-applicatarum in Hyperbolâ; puta ut $\sqrt{\frac{1}{2} a P - \frac{1}{2} a^2}$: adeoque
 $n = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} a P - \frac{1}{2} a^2}}{P} R$: Erunt horum Quadrata, $n^2 = \frac{a P - a^2}{2 P^2} R^2$;

adeoque $\frac{n^2 T}{2 R} = \frac{a P - a^2}{4 P^2} R T$. Cum itaque (per prop. 1. hujus) ha-
beri possit tum summa omnium a , tum omnium a^2 ; habebitur etiam
omnium $\frac{a P - a^2}{4 P^2} R T$; quæ est ipsa figuræ spiralis magnitudo. Et
quidem, si porro haberi possit, summa omnium n^3 seu omnium
 $\frac{a P - a^2}{2 P^3} R^3 \sqrt{\frac{1}{2} a P - \frac{1}{2} a^2}$: atque etiam summa omnium $\frac{n^3 x T}{3 K^2}$, & omni-
um $\frac{n^3 x T}{3 R^2}$; hoc est, omnium $\frac{a P - a^2}{6 P^3} T R \sqrt{\frac{1}{2} a P - \frac{1}{2} a^2}$: & omnium
 $\frac{a P - a^2}{6 P^3} x T R \sqrt{\frac{1}{2} a P - \frac{1}{2} a^2}$: Hoc est, istius Figuræ Spiralis momenta
respectu rectarum P M F, E M G: Momenta hæc, per magnitudi-
nem illam divisa, exhiberent Centri gravitatis distantias ab illis
rectis.

Cumque hæc in aliis Spiralium generibus, mille modis variatis,
pariter obtineant: amplius hic pateret excurrendi campus, si liberet
exspatiari. Et

Et quidem nonnulla alia Spiraliū genera, in Tractatu meo, *De Curvarum Evolutis* exponuntur; quæ, cum multis aliis possent in hunc locum transferri. Sed, ne nimius sim, Lectoris illud industrie (si opus fuerit) permittendum erit.

SCHOLIUM.

MOnendum hic duxi, (quod & supra, § A. insinuatū est,) in Scholio Prop. 45. *Arithm. Infin.* in assignandâ ratione quam habet Figura Spiralis ad Sectorem contemnim, prout crescunt MT radii, in angulorum AMT ratione simplâ, duplicatâ, triplicatâ, quadruplicatâ, &c. Cum (juxta demonstrationis tenorem) dicendum erat, ut 1 ad 3, 5, 7, 9, &c. nescio quâ incuriâ scriptum habetur, ut 1 ad 3, 4, 5, 6, &c. Quod cum non animadverterit V. Cl. *Stephanus de Angelis*, merum esse sive Calami sive Calculi lapsum, (non ex demonstrationis vitio ortum;) suspicatus est doctrinam illam de Spirali- bus infirmam esse. Cum interim si satis animadverteret demonstra- tionis vim (quæ hinc potissimum dependet, quod similes Sectores sint in Radiorum ratione duplicata; adeoque ubi Radiorum series indices habent 1, 2, 3, 4, &c. series sectorum habebunt indices 2, 4, 6, 8, &c. adeoque omnium summa, ad maximum toties sumptum; hoc est, figura Spiralis, ad Sectorem contemnim; ut 1 ad 3, 5, 7, 9, &c.) vidisset, tum demonstrationi vim inesse; tum, emendato mendo numerali, omnia probè constare. Adeoque quam ille pro- lixâ refutatione (in suo *de Spirali- bus* tractatu) doctrinam subversum it: multò facilius, tribus verbis emendâisset; dicendo, [pro 3, 4, 5, 6, substituendum (juxta demonstrationis tenorem) 3, 5, 7, 9:] quo facto, non erit quod reprehendat. Sed & simul videbit, totam illam quam ille justo volumine *De Spirali- bus* doctrinam habet; eodem Scho- lio summatim tradi: Et quidem (ut hoc ille non statim perspexerit) universalius quam ab ipso tradita est. Cum enim dixeram, doctri- nam illam de Parabolis & Paraboloidibus, tum ante traditam, tum deinceps tradendam, spirali- bus accommodari posse, in quibus crescant MT rectæ, in angulorum PMT ratione duplicatâ, triplicatâ, qua- druplicatâ, &c. illud & cetera extendendum erat non modò ad alias rationes (strictè loquendo) multiplicatas, sed & submultiplicatas, vel ex multiplicatis & submultiplicatis utrunque compositas, vel etiam nu- mero surdo exponendas. Quippe illud summatim insinuatū vellem; (quod de Paraboloidibus, magis particulatim, vel ante traditum, vel mox

PROP. XXIX. De Calculo Centri Gravitatis. 531

mox tradendum erat ;) Quemcunque habeat Indicem Series Rectarum MT , (integrum, fractum, surdumve ;) hujus *Duplum*, indicem esse Seriei similium Sectorum radiis illis descriptorum : Summamque horum, ad maximum toties sumptum, (hoc est, figuram Spiralem ad Sectorem conterminum,) esse, ut 1 ad indicem illum (*duplum*) unitate auctum. Cujus quidem doctrinæ universalis, nonnisi pars est, tota illa quam habet ille de Spiralibus. Quæ tamen non ideo dicta sunt, ut, ab eo traditis, derogatum eam : sed ut ostendam, quàm sit corollariorum ferax generalis illa methodus ; cùm Scholium illud Unicum (nec adeo longum) quò particulatim exponatur, materiam subministrare possit justo Volumini.

PROP. XXIX.

Quæ de Spatio Cycloidali (prop. 15.) tradita sunt non pauca, possunt & Spatio Cissoïdali accommodari.

Cissoïdis lineæ meminit Pappus lib. 3. prop. 5. (pro duabus mediis Fig. 205. proportionalibus inveniendis excogitatæ ;) Cujus hæc natura. Sit $AD\alpha$ Semicirculus ; cujus Centrum, C ; Diameter, $A\alpha$; cui ad angulos rectos insistat CHD : Ductâ ubivis Chordâ AB , quam secet CD in H ; si in ea sumatur, rectæ BH , æqualis Hb ; quæ per omnia b puncta incedit curva AbD , *Cissoïdes* dicitur. Eademque etiam ultra D punctum eodem ritu continuata (alternato tantum punctorum B b situ, quæ in D coincidunt,) ea est quam hic volumus. Cui Asymptota est $\alpha\tau$ recta, circulum in α contingens.

Spatium Cissoïdale, dicimus, quod curvæ Abb , rectisque $A\alpha$, $\alpha\tau$, interjacet : interminabile quidem ex parte $b\tau$; magnitudinis tamen finitæ.

Spatium hoc consideravimus in Tractatu Epistolari, Tractatui de Cycloide subjuncto. Ejusque tum magnitudinem, tum momentum respectu rectarum AT , $\alpha\tau$, Centrique gravitatis (si quod foret) ab iis distantiam ; Solidique ejusdem conversione sive circa AT sive circa $\alpha\tau$, facti magnitudinem, determinavimus.

Est utique illud $Abb\tau$ spatium interminabile, semicirculi $AD\alpha$ triplum. Et Axis $\mathcal{A}q$ uilibrii (adeoque, siquod esset, Centrum gravitatis)

Yyy

Fig. 205. viratis) distat à τa , Sextante Diametri Aa ; adeoque, à TA , ejusdem Diametri quinque Sextantibus; eisdem TA , τa , tangentibus parallelus. Centrum autem gravitatis, intelligendum est, in axe illo, ab Aa removeri ad infinitam distantiam; adeoque nusquam erit.

Solidumque ejusdem circa τa conversione factum, est æquale Solido ex simili conversione Semicirculi ADa , circa eandem τa : adeoque Semicylindro cujus basis sit idem Semicirculus, & altitudo æqualis peripheriæ puncto C circumducto descriptæ. Solidumque ejusdem circa TA conversione factum, est Solidi prioris quintuplum. Solidum vero quod intelligatur ejusdem circa Aa conversione describi; magnitudinis infinitæ.

Ungularum verò eidem insistentium, aciem habentium τa , vel TA ; ad similes Ungulas Semicirculo insistentes, easdem acies habentes; eadem est ratio quæ Solidorum istius conversione factorum, ad Solida simili conversione Semicirculi facta.

Ungularum verò; Planum Æquilibrii (in quo & Centrum gravitatis siquod esset,) quæ aciem habent τa , ab eà distat, $\frac{1}{2}$ rectæ Aa ; quæque aciem habent TA , ab ea distat, $\frac{2}{3}$ ejusdem rectæ Aa . Semicylindrorum verò, aliorumve imperfecta conversione factorum, distantia Axis Æquilibrii ab axe conversionis τa vel TA , ad illam in Ungulis distantiam, (ut sæpius ante ostensum est,) ut est ad conversionis arcum Chorda sua.

Quæ omnia cum ibidem demonstrata sint, non opus est ut eadem hic repetam.

Ut autem de Spatio Cycloidali ostensum est, (prop. 15. hujus,) non modo totum Aba (fig. 166.) totius ADa Semicirculi triplum esse; sed & partes partium respectivè sumptarum; puta $b\beta\tau$, $b\beta\beta b$, $b\beta a A$, triplum partium $a B a$, $B a B$, $B a A$; & sic ubique: Ita in Spatio Cissoïdali fig. 205. non modo totum $bbAa\tau$ (spatium interminabile) triplum totius Semicirculi ADa , (adeoque Semicycloidi $A\tau a$ fig. 166. æquale:) sed & portiones baA , $ba b$, $ba\tau$, fig. 205. triplas respectivarum Semicirculi portionum $a B a$, $B a B$, $B a A$; & sic ubique; (adeoque ipsis Semicycloïdis portionibus, $b\beta\tau$, $b\beta\beta b$, $b\beta a A$, &c. fig. 166. respectivè sumptis, æquales.) Quod Vir Cl. *Christiannus Hugenius* me primus monuit.

Verum hæc, ne nimius sim, mihi nunc non est in animo ulterius prosequi; nedum quæ ad partium Centra gravitatis spectant, quæque hinc dependent.

Id

PROP. XXIX. De Calculo Centri Gravitatis. 533

Id interim monendum duxi, Posse quidem eandem curvam alio ad- Fig. 205.
huc modo construi.

Cum enim (ut ibidem ex Pappo demonstratum est,) ductâ dia-
metro BC β , junctâque tum A β , tum β b, quæ rectam A α secet in V, sit
(propter tum B b bisectam in H, tum B β in C,) β V b, ipsi CH pa-
rallela; adeoque anguli ad V recti: erunt V α , V β , VA, Vb,
continue proportionales; hoc est (positis, AV = v, V α = h,
V β = s, ut antehac sæpius;) continue proportionales, h, s, v,

$\frac{v^2}{s} = b$ V. (Quod perinde valet, siue sumatur b, in A b D curvâ in-
tra Semicirculum; siue in eâdem extra Semicirculum continuatâ.) A-
deoque, sumptò ubivis in A β α semiperipheriâ puncto β ; sumptâ-
que ad V β , VA, (seu s, v, sinum rectum & versum Arcus A β = a,))

tertiâ proportionali $\frac{v^2}{s}$; erit hoc æqualis ipsi b V ordinatim-appli-
catæ ad Diametri A α punctum V. Quæque per omnia b puncta
transit A b b, est ipsa Cissoïdalis curva. Sumptisque AV = v, a-
rithmetice proportionalibus, erunt omnes $\frac{v^2}{s}$, totidem b V spatium
Cissoïdale complentes. Cujus quidem portio A b α , cum tripla sit
segmenti α B α , hoc est segmenti, A b A; erit (per § G. prop. 15.)
 $\frac{1}{2}eR$, seu $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$.

PROP. XXX.

- A. B. In Conchoide, quæ ad Axem Ordinatim-applicatas recta
Fig. 306. componitur ex *Sinn-recto* & *Tangente* ejusdem Anguli:
Et quidem ejusdem Circuli in *Primariâ*, (ubi PC &
 CA æquantur,) sed diversorum in aliis.
- C. Adeoque constat Semi-Conchoidale Planum $CAOOH$,
ex Quadrante Genitore CAR , & figurâ Tangen-
tium $RBAOO$; ad eundem radium æstimatarum
in Conchoide *Primaria*, (ubi CA , PC , æquantur;)
sed, in *Secundariâ*, ad alium; (nempe PC ;) Ma-
jorem quidem in *Protractâ*, (ubi excentricitas PC ma-
jor est quam AC altitudo,) in *Contractâ* verò (ubi PC
minor est quam CA) minorem.
- D. Atque, in Conchoidibus diversis invicem Comparatis;
Genitores Quadrantes (eorumque segmenta respectiva)
sunt in duplicatâ ratione Altitudinum CA . Reliqua-
que spatia $RBAOO$, (eorumque respectiva segmenta,
ut ABO , vel $OBB O$,) si Altitudines CA æquales
sint; sunt in ratione Excentricitatum: si Excentrici-
tates PC sint æquales; in ratione Altitudinum CA :
si neutra; in eâ quæ ex Altitudinum & Excentrici-
tatum rationibus componitur; seu in ratione rectangu-
lorum CPA .
- A.E. Conchoidis Planum (Curvæ & Regulæ interjectum) in-
terminabile est, & magnitudinis infinitæ.
- F. Ejusdem verò Momentum, respectu rectæ CH quæ Re-
gula dici solet, finitum est: Ungulæque eidem insilens,
aciem habens Regulam CH ; Solidumque Plani circa
Re-

PROP. XXX. De Calculo Centri Gravitatis. 535

Regulam illam conversione facti; sunt quidem Inter- Fig. 205.
minata, sed Magnitudinis finitæ, & notæ. Quod &
de partibus, ut A B O, perinde valet.

Plani Semi-conchoidis Centrum gravitatis nullum est, (seu, G.
quod eodem recidit, non nisi in infinitâ ab Axe di-
stantiâ:) Sed neque Ungulæ, nec Solidi conversione H.
facti.

Idemque obtinet de segmentis O V C H, rectæ C H H G. H. I.
adjacentibus; atque de Ungulis Solidisque eò spectan-
tibus: Sed non item de Segmentis remotis A V O,
seu A B O; aut Ungulis Solidisque eò spectantibus. Sed
neque de Ungulis Solidisque quæ Conchoidem totam
spectant (utrinque ab A C porrectam) quæ Centrum
gravitatis habent in ipsa A C recta.

I N expositâ quavis rectâ A P, dicatur P polus, A vertex, pun- A.
ctumque quodvis intermedium C Centrum, rectæque infinita C H H
(ad expositam A P perpendicularis) Regula: Atque intelligatur A P
recta (ad partes P quantum opus est continuata) circa Polum P ma-
nentem sic converti, ut C punctum in recta C H perpetuò maneat;
punctoque sui extremo A, curvam designet A O O: Hanc curvam
veteres *Conchoidem* dixerunt.

Manifestum autem est, (propter rectam P O, regulam C H se-
cantem in H,) punctum O ad C H regulam nunquam perventurum:
Sed & (propter H O perpetuò æqualem ipsi C A, & sectionis angu-
lum continuè acutiorem;) eò tandem perventum iri ut puncti O ab
ipsâ C H distantia futura sit datâ quavis minor: Adeoque rectam
C H H ad curvam A O O Asymptotam esse; spatiûmque, intermi-
nabile. Quæ demonstranda erant.

Centro C, radio C A, describatur circuli quadrans C A R (quem B.
Genitorem appello) regulæ C H H occurrens in R; sitque ordinati-
applicata quælibet in Quadrante V B, in Conchoide V O, (quadranti
occurrens in B;) jungantur C B, P O.

Manifestum est, (propter æquales C A, C B, H O,) parallelas
esse C B, H O, hoc est, C B, P O: adeoque angulos A C B, A P O,
æquales esse.

Est autem V B, Sinus Rectus Anguli A C B ad radium A C; &
C H, hoc est B O, ejusdem anguli A P O seu A C B, Tangens ad
Radium P C; (quam *Excentricitatem* appello:) Hoc est, ad eun-
dem.

Fig. 206. dem radium, ubi PC , CA , æquantur; ad diversos, ubi non æquantur. Illas ego Conchoides *Primarias* appello; has, *Secundarias*; & quidem vel *Contractas* vel *Protractas*, prout Excentricitas PC minor est vel major quam Genitoris radius CA , quam *Altitudinem* appello. Puta, in fig. 207. AOO est *Primaria*; *Secundaria* vero, AOO *Contracta*, & Aoo *Protracta*.

Adeoque; ut, in Cycloide, fig. 166. ordinatim-applicata quælibet bBV , componitur ex Sinu recto BV in circulo genitore; & ex Bb , quæ respectivo arcui æquatur; nempe ipsi BA in Cycloide *primaria* (cujus basis $\tau a \tau$ æquatur perimetro Circuli genitoris,) vel in *Secundariis*, (sive *protractæ* sint, sive *contractæ*,) simili arcui alterius circuli; cujus nempe perimenter aequalis est expolitæ Cycloidis basi; (ut ad prop. 20. hujus ostensum est:) lic, in Conchoide fig. 206. ordinatim-applicata VBO , componitur ex sinu recto VB (ad radium CR inscripti Quadrantis CAR) & ex BO , hoc est CH , tangente correspondentis anguli; & quidem ad eundem radium, in Conchoide *primaria* (ubi PC , CA , æquantur;) sed in *Secundariis*, sive *protractis* sive *contractis*, (in quibus PC , CA , non æquantur,) ad diversos, nempe, ad radium PC . Quod itidem erat demonstrandum. (Et quidem num illud ante me quispiam animadvertit, nescio.)

C. Componitur itaque Semiconchoidale Spatium interminatum $CAOOH$, ex CAR Quadrante Genitore, & $RBAOO$, figurâ Tangentium (distortâ) unius quadrantis, Radio PC convenientium, sinibus versis arithmetice-proportionalibus respondentium; sed, quæ altitudinem habeat AC . Pariter atque componitur Semicycloidale spatium $A\tau a$ fig. 166. ex Semicirculo Genitore $AD a$, & $AD a \tau$ figurâ Arcuum distortâ (sinibus versis arithmetice-proportionalibus respondentium,) ad eundem cum circulo genitore Radium, in *Primariâ*, ad aliud, in *Secundariis*; sed quæ Altitudinem habeat eandem cum Genitore circulo.

D. Hinc sequitur; In Conchoidibus diversis, ejusdem altitudinis, (intellige, quarum eadem sit radii CA longitudo, seu magnitudo eadem quadrantis Genitoris CAR ,) sed quæ inæquales habeant Excentricitates PC ; Conchoidale spatium (quod extra Circuli quadrantem est) $RBAOO$, (quam Tangentium figuram esse, jam ostendimus) vel etiam ejusdem assignatum quodvis segmentum (ordinatim-applicatâ abscissum) ABO , vel duabus ordinatim-applicatis interjectum $OBBO$; in eâ ratione majora esse vel minora, quâ majores sunt vel minores suæ respectivæ Excentricitates PC . Nam quâ ratione

PROP. XXVIII. De Calculo Centri Gravitatis. 537

ratione crescit vel decrevit radius PC, eadem ratione crescunt vel decrevantur Tangentes omnes (respective sumptæ) CH, hoc est, omnes BO, spatium complentes RAO, vel BAO, vel OBBO. Adeoque (propter easdem utrobique respectivas altitudines) in eadem ratione augetur vel minuitur spatium quod complent illæ rectæ. Puta, (fig. 207.) Spatium ABO in *Primariâ*; ad ABO, in secundariâ *Contrariâ*; & AB ω , in *Contrariâ*; eam rationem habet (propter eandem altitudinem) quam habet Excentricitas PC, ad pC, & π C. Et sic ubique.

Si verò, eadem manente Excentricitate PC, mutetur Altitudo CA, erunt respectiva spatia ABO, &c. altitudinibus illis proportionalia. (Nempe, propter easdem latitudines respectivas.)

Adeoque, si mutantur utraq; erunt respectiva Spatia, in eadem ratione quæ componitur ex rationibus Altitudinum CA, & Excentricitatum PC: hoc est, in ratione rectanguli PCA in una, ad rectangulum PCA in alterâ. Quod (credo) primus indicabam ego, in *Commercio Epistolico*, Epist. 39, 40.

Quadrantes autem Genitores, si altitudines (hoc est, radios,) æquales habeant, æquales esse; sin inæquales, in Radiorum suorum ratione duplicata esse; notius est quam ut demonstratu opus sit.

Quod autem Conchoidale spatium interminatum, sit etiam magnitudinis Infinitæ; sic colligitur.

Seponamus aliquantisper Quadrantem genitorem; & adjunctam figuram Tangentium consideremus: Eamque (exempto Quadrante genitore) restituamus in situm proprium, ut in fig. 208. ubi rectæ BO, figuram Tangentium complentes, (sinibus rectis AV arithmetice-proportionalibus respondentes,) ad axem CA ordinatim-applcantur.

Esto autem, fig. 209. Quadrans CAR seorsum exemptus: sumptoque, ubivis in CA radio, puncto V, erit VC (eiusdem a centro distantia) sinus complementi, istius anguli cuius AV est sinus versus, & VB sinus rectus, & AT Tangens, est autem (propter similitudinem triangula) ut CV ad VB, sic CA ad AT; Hoc est, (positis

$$VC = x, VB = s, CA = R,) \text{ ut } x \text{ ad } s, \text{ sic } R \text{ ad } \frac{s}{x} R = AT = BO.$$

Si itaque sumi intelligantur, ut (in fig. 208.) CV seu x , arithmetice-proportionales, vel, his æquales, VU, triangulum CAU complentes: Sumptis ubique, ut x ad s sic R ad *quarram*; erunt illæ

E

Fig. 208.

Fig. 209.

Fig. 208.

Fig. 208. illæ quartæ, series totidem AT, hoc est, totidem BO, complementum RBAO figuram tangentium.

Sed (neglectis aliquandiu tertiis R) perpendamus quid futurum sit, si, pro R , substituerentur totidem s : Adeoque fumerentur ubique, ut x ad s sic s ad quartam. Erunt utique illæ quartæ, totidem $\frac{s^2}{x}$: Hoc est, (propter, in fig. 209. $VBq = CBq - CVq = CAq - CVq$, seu $s^2 = R^2 - x^2$), totidem $\frac{R^2 - x^2}{x}$; seu totidem $\frac{R^2}{x} - x$.

Sunt autem (propter x arithmetice proportionales, ab ipso C puncto, seu 0, ordientes; & R^2 eandem ubique quantitatem;) Omnes $\frac{R^2}{x}$, series Reciproca primanorum, (per def. 2. hujus.) Indicem habens — 1. Adeoque ad totidem ultimo æqualium, hoc est ad R^2 , in ratione infinitâ, (per prop. 1. vel 7. hujus;) & propterea, magnitudinis infinitæ.

Sed, Omnes x , sunt series Primanorum; adeoque finitæ magnitudinis: Nempe $\frac{1}{2}R^2$ seu $\frac{1}{2}AR$, (per prop. 1. vel 7. hujus;) tantundem scilicet atque CAU Triangulum, quod complent rectæ VU ipsiis x æquales.

Et propterea, Omnes $\frac{R^2}{x} - x$, magnitudinis adhuc infinitæ. Nam finitæ magnitudinis ab infinitâ detractio, relinquit adhuc infinitam.

Verum, quam jam consideramus, Figura Tangentium etiam adhuc major est: Quippe tangentes singulæ, sunt (non quidem totidem $\frac{s^2}{x}$ seu $\frac{R^2 - x^2}{x}$, sed) totidem $\frac{sR}{x}$: Adeoque, (propter R , ubique majorem quam s), Series Omnium $\frac{sR}{x}$, seu Figura Tangentium, major

erit quàm Omnium $\frac{s^2}{x}$; adeoque multò magis erit magnitudinis infinitæ. Adeoque multò adhuc magis, Spatium Conchoidale, seu Semiconchoidale CAO^oH, (ex quadrante generatore, & hac figurâ Tangentium, composita,) magnitudinis erit infinitæ. Quod demonstrandum suscepimus.

Fig. 206. Verum quidem est, in Conchoidibus Secundariis, ipsas BO, non esse tangentes ad radium CA, sed ad radium PC. Hoc tamen infinitati figuræ non derogat quippiam. Si enim PC major sit quàm CA, fi.

PROP. XXX. De Calculo Centri Gravitatis. 539

figura R B A O O in eadem ratione augetur, (ut § D. ostensum est,) Fig. 206.
non minuitur; adeoque non minus erit infinita. Sin PC minor sit
quàm CA, minuitur quidem figura R B A O O; sed non nisi in eâ
ratione minuitur, quâ PC minor est; Hoc est, in ratione finitâ:
Quod autem infinito non nisi in ratione finitâ minus est, etiamnum est
infinitum; adeoque plani infinitudine non destruitur. Saltem, nisi
intelligatur ipsa PC penitus evanescere (ut PC quàm CA sit infiniti-
ties minor) coincidentibus PC punctis; quo casu Conchoidale spa-
tium degenerabit in C A R quadrantem.

Quod autem Planum hoc, utut magnitudinis infinitæ, Momentum
respectu Regulæ suæ C H H finitum habeat; adeoque Ungulas quæ
aciem habeant Regulam illam, Solidæque circa illam conversione facta,
magnitudinis esse finitæ; (quod nos, ni fallor, primi docuimus, in
subjunctis Tractatui de Cycloide;) sic ostendimus.

Quodnam habeat momentum Quadrans genitor C A R, respectu
rectæ C R, ostensum est prop. 15. § Q. nempe $\frac{1}{2} R^3$, (semissem sci-
licet istius quam habet Semicirculus respectu diametri suæ;) Atque
tantundem est Semiquadrantis Ungula eidem insistenti, aciem ha-
bens C R: Solidumque ipsius conversione circa C R factum (utpote
ad ungulam illam ut P ad R,) $\frac{1}{2} R^3 P$; nempe Hemisphærium.

Plani reliquum, R B A O O, ex Tangentibus constat, seu toti-
dem B O; Hoc est, in Conchoide primariâ (ubi PC = CA = R,) totidem
 $\frac{sR}{x}$ seu $\frac{s}{x} R$; in Secundariis (posito PC = s) totidem

$\frac{s^2}{x}$ seu $\frac{s}{x} s$: (Nempe in eâ ratione vel longiores vel breviores quàm
tangentes ad radium CA = R, quâ PC = s longior est vel bre-
vior quam CA.) Quæ si ducantur singulæ in suas ab C H distantias
CV = x, fiunt totidem s R vel s s. Sunt autem omnes s, idem atque
circuli quadrans C A R quem complent; puta $\frac{1}{2} R P$, (per § D.
prop. 15.) Adeoque Omnes s R, seu Omnes s s, idem atque qua-
drans ille in distantia R vel s suspensus; hoc est, $\frac{1}{2} R^3 P$, vel $\frac{1}{2} R P$:
Cui itaque æquatur Momentum Omnium B O, seu plani R B A O O,
in suo loco suspensi, respectu rectæ C H.

Et similiter ostendetur, Ungulam quadrantalem eidem insistentem
cujus acies C H; hoc est $Omn. \frac{sR}{x} \times x$, seu $Omn. \frac{s^2}{x} \times x$, tantun-
dem esse atque $Omn. s R$, seu $Omn. s s$. Hoc est, circuli quadran-
tem C A R in altitudinem R, seu s, = C P ductum; seu Cylindrum
Z z z qua-

F.

Fig. 206. quadrantalem, cujus Basis $CA R$ quadrans, & Altitudo ipsi CP æqualis: Nempe, $\frac{1}{8}R^2P$ vel $\frac{1}{8}RP$. Solidumque conversione plani $RB A O O$ circa CH factum (utpote ad Ungulam illam, ut P ad R), tantundem atque Cylindrum quadrantalem super eadem Base $CA R$, altitudinem habentem æqualem Peripheriæ radio CP descriptæ: Hoc est, $\frac{1}{8}RP^2$, seu $\frac{1}{8}P^2$.

Idemque, eadem ratione, in partibus ostendetur. Nempe, Momentum segmenti $A B O$ respectu CH , idem atque segmenti $A V B$ in distantia R , vel P , $= CP$ suspensi. Ungulamque quadrantalem eidem $A B O$ insistentem, aciem habentem $CH H$, tantundem esse atque Cylindrum cujus basis sit $A V B$ & altitudo CP . Solidumque ejusdem $A B O$ conversione circa $CH H$ factum, tantundem atque Cylindrum cujus basis sit idem $A V B$ segmentum & altitudo æqualis Peripheriæ radio CP descriptæ. Perinde enim procedit demonstratio de partibus respectivè sumptis, atque de totis.

G. Plani vero totius $CA O O H$, aut etiam totius figuræ Tangentium $RB A O O$, Centrum gravitatis nullum est. Cum enim Momentum (ut jam ostensum est) sit Finitum, & Magnitudo Infinita; si illud per hanc dividi intelligeretur, prodiret Centri gravitatis ab $CH H$ distantia infinitè-exigua: Neque tamen in ipsâ CH esse, commodè dici posset; quippe tum totum pondus ad unas partes rectæ $CH H$ (quam esse tamen axem Æquilibrii oporteret) poneretur. Item, cum Spatium jam ostendatur infinitum esse; in quacunque ab $A C$ distantia finitâ poni intelligeretur Centrum gravitatis; esset, citra illud, pondus finitum & in distantia finitâ; sed ultra Centrum illud, pondus infinitum in distantia item infinitâ: quod cum naturâ Centri gravitatis non consistit. Nullum igitur erit Plani totius Centrum gravitatis, vel (quod eodem recidit) nonnisi in infinitâ distantia ab $A C$.

Idemque similiter ostenderetur de totius portione $O V C H$, vel $O B R$, quæ rectæ $CH H$ adiaceat. Quippe quicquid id sit quod ultra $V B O$ abscinditur, finitum erit, (utpote undecunque terminatum;) reliquumque quod ipsi $CH H$ adjacer, manebit adhuc magnitudinis infinitæ.

Segmentum verò quodcunque remotius $A V O$, vel $A B O$; cum & Momentum finitum habeat, & Magnitudinem finitam atque undecunque terminatam; habebit etiam Centrum gravitatis.

H. In Ungula Semiquadrantali, aciem habente CH , quæ singulis $B O$ rectis insistent Parallelogramma rectangula (ungulam complementia)

PROP. XXX. De Calculo Centri Gravitatis. 541

plentia) sunt (propter longitudinem $\frac{sR}{x}$ seu $\frac{sp}{x}$, in respectivas alti- Fig. 206.
tudes, distantis x æquales, ductas) totidem sR seu sp : Quæ
tantundem sunt atque totidem rectangula respectivis $VB = s$ insisten-
tia, communem altitudinem habentia R , seu $s = PC$. Sûntque in
eisdem à CHH distantis. Adeoque eadem habent, respectu ipsius
 CHH momenta; tum sigillatim respectivè sumpta, tum simul om-
nia. Hoc est, idem est Momentum Ungulæ $RBAOO$ (ejusve seg-
mentorum, ordinatim applicatis abscessorum, ABO , OBR ,) atque
Cylindri CAR (hujusve segmentorum respectivè sumptorum, AVB ,
 $BVCR$,) respectu ejusdem rectæ CHH .

Distat autem quadrantis CAR (adeoque Cylindri hinc insistentis,
per § E. prop. 5. hujus,) Centrum gravitatis à CHH , $\frac{8R^2}{3P}$, (per § Q.
prop. 15.) quæ in quadrantis magnitudinem $\frac{1}{2}R^2$ ducta, exhibet qua-
drantis Momentum respectu CHH , $\frac{1}{2}R^3$; adeoque (propter altitu-
dinem R vel s ,) Cylindri momentum $\frac{1}{2}R^3$ vel $\frac{1}{2}sR^3$. Idemque
propterea momentum erit Ungulæ $RBAOO$ respectu ejusdem
 CHH . Atque hoc Momentum, per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}R^2P$
seu $\frac{1}{2}RP$, divisum, exhibet distantiam Centri gravitatis (siquod sit)
vel saltem Axis Æquilibrii à CHH (intellige à perpendiculari plano
super recta CHH erecto,) $\frac{8R^2}{3P}$. (Tantundem utique quantum in-
de distat per § Q. prop. 15. Centrum gravitatis quadrantis CAR à
 CHR , seu Semicirculi ab eâ cui adjacet diametro.) Et propterea,
Solidi Semiconversione circa CHH facti, Centri gravitatis inde di-
stantia, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P , per § E.

F. prop. 14. hujus,) $\frac{32R^3}{3P^2}$.

Similiter de Ungulæ segmentis, putà quæ ipsis ABO , OBR ,
insistunt; procedendum erit. Sunt utique illa æqualia respectivis Cy-
lindri segmentis, quæ ipsis AVB , $BVCR$, insistent; atque in eisdem
à CHH distantis; adeoque & æqualia habent momenta: quæ
quanta sint, ex prop. 15. hujus, facillè est colligere. Eadèmqe
momenta, per respectivas magnitudines divisa, exhibebunt Centro-
rum gravitatis (siqua sint) à CHH distantias respectivas. Atque
inde colligetur (per § E. F. prop. 14. hujus) Semisolidorum (aliorum-
ve imperfectâ conversione circa CHH factorum) Centri gravitatis
(siquod est) inde distantia.

Z z z

Et,

Et, propterea, cum etiam Ungularum (aut Solidorum correspondentium) quæ C A R (ejusve portiones) spectant, tum magnitudines, tum Centra gravitatis determinata sint, prop. 15. 16. hujus: Ungularum similiter quæ Conchoidale spatium C A O O H (ejusque partes) spectant, Momenta & Magnitudines (per prop. ult. cap. præced.) non minus determinantur, quam quæ Figuram Tangentium C A O O (ejusque partes) spectant.

I. Si verò, eorundem parallelogrammorum ipsis B O (fig. 208.) in Fig. 208. sistendum; hoc est, totidem sR vel s , (ut supra ostensum est;) respectu rectæ A C vel A R (cui, exemplo quadrante, ibidem adjacent) momentum consideretur: Cum sua Centra gravitatis in mediâ longitudine sita sint (per prop. 2. hujus,) erunt eorum ab A B R distantia respectiva, $\frac{sR}{2x}$, seu $\frac{s}{2x}$, (nempe longitudinum supra inventarum semisses:) quæ in respectivas magnitudines sR vel s , ductæ, exhibent eorum respectu rectæ A B R momenta $\frac{s^2 R^2}{2x}$, seu $\frac{s^2}{2x}$: Hoc est, (propter $s^2 = R^2 - x^2$), $\frac{R^2 - x^2}{2x} R^2$, seu $\frac{R^2 - x^2}{2x} s^2$: Hoc est, $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2} x R^2$, seu $\frac{s^2 R^2}{2x} - \frac{1}{2} x s^2$.

Est autem, series omnium $\frac{R^4}{2x}$, seu $\frac{s^2 R^2}{2x}$, Reciproca primanorum; cujus itaque magnitudo infinita erit, (per prop. 1. vel 7. hujus:) Sed omnium $\frac{1}{2} x R^2$ seu $\frac{1}{2} x s^2$, series primanorum, adeoque magnitudinis finitæ, (per prop. 1. vel. 6. hujus:) Hujus itaque ex illâ subductio, non impedit quin adhuc maneat, omnium $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2} x R^2$ seu $\frac{s^2 R^2}{2x} - \frac{1}{2} x s^2$ series, hoc est, Ungulæ R B A O O (aciem habentis C H H) momentum respectu rectæ A B R, magnitudinis infinitæ. Adeoque Momentum illud infinitum, per Ungulæ Magnitudinem (quam finitam esse jam ostensum est, § F.) divisum; distantiam Centri gravitatis ab A B R exhibebit infinitam: Et multo magis fig. 206. (interposito quadrante C A R) distantiam Centri gravitatis ejusdem Ungulæ R B A O O (distortæ) distantiam à recta A V C infinitam: Et magis adhuc, totius C A O O H Ungulæ Conchoidalis, Centri gravitatis ab eadem A V C distantiam infinitam. Quod itaque

PROP. XXX. De Calculo Centri Gravitatis. 543

itaque nusquam est ; seu (quod eodem recidit) non nisi in infinitâ distantia ab A C.

Idemque similiter ostendetur, de Ungulâ segmenti CVOOH, ipsi CHH adjacentis : Atque etiam de solidis conversione (perfectâ vel imperfectâ) sive totius CAO OH sive segmenti CVO OH factis : Nempe, distantiam Centri gravitatis ab AC infinitam esse.

Ungula verò segmenti remoti AVO, (utpote undique terminata, adeoque magnitudinis finitæ, & in distantia finitâ,) Momentum habet finitum, & Centrum gravitatis. Et similiter, solidum conversione factum.

Item, quæ Conchoidem totam (utrinque in infinitum porrectam) spectant, (aut etiam ejusdem segmentum, ordinatim-applicatâ abscissum, & utrinque ab AC æqualiter porrectum) Ungulæ, Solidæque conversione factæ, (propter duos semisses, utrinque ad AC positos, invicem æquiponderantes,) Centra gravitatis habebunt ; in ipsâ quidem AC rectâ (seu Plano huic perpendiculariter insistenti,) atque in eâ à C distantia quam ad § H. modò determinavimus.

PROP.

Fig. 310.

PROP. XXXI.

- A. Spatium Hyperbolicum exterius, (Curvæ & Asymptotis interjectum,) ex Primariorum reciprocis conflatur: inscripta Parallelogramma habens invicem æqualia.
- B. Estque suapte naturâ utrinque interminabile.
- C. Estque magnitudinis infinitæ, sive ex utraque sive ex alterâ tantum parte interminatum maneat: Sin utrinque truncatum seu terminatum censeatur, magnitudinis finitæ.
- D.E. Portio hujus, ex altera tantum parte truncata, & rectâ terminata quæ alteri Asymptotarum parallela sit, (ut $ASHh\sigma$,) utut magnitudinis sit infinitæ, momentum tamen habet respectu istius Asymptotæ ($A\sigma$) finitum: Ungulâque, cujus acies sit Asymptota illa, exhibet magnitudinis finitæ, & noto Parallelepipedo æqualem: Solidumque conversione circa Asymptotam illam factum, magnitudinis finitæ & notæ.
- F. Quæque huic Portioni sive toti (ut $ASHh\sigma$,) sive ejusdem parti duabus rectis Asymptotæ illi parallelis interjectæ, (ut $SCIH$) insistit Ungula, aciem habens Asymptotam illam; habet Æquilibrii Planum (adeoque & Axem Æquilibrii, & siquod sit Centrum gravitatis) in perpendiculari Plano quod præcisè medium sit inter parallelas rectas portionem hanc, ejusve partem expositam, terminantes; atque in illo per aciem plano quod Ungulæ altitudinem bisecat. Centrum autem gravitatis quod hujusmodi Ungulam, ipsi Asymptotæ (quæ acies ipsius est) contiguam, respicit; nullum est, vel (quod eodem recidit) nonnisi in infinitâ distantia ab alterâ Asymptotarum.

Portionis

PROP. XXXI. De Calculo Centri Gravitatis. 545

Portionis hujusmodi utrinque truncatæ (duabus Asymptotæ parallelis interjectæ (ut $SOVH$, $SCIH$.) magnitudo, (vero proxima,) calculo assignari potest quantumlibet accuratè.

Adeoque & Portionis interioris; ut HVX , HIx , vel HVD , $HI d$. H.

Et utriusque momentum tum respectu Asymptotæ $A\sigma$, tum respectu Axis vel Diametri AX , Ax ; Centrique gravitatis inde distantia. Adeoque ipsum gravitatis Centrum. Idque in Hyperbolis tum Erectis, tum Scalenis. I. K.

Habetur etiam Hyperbolici Conoideos (vel Pyramideos) tum magnitudo, (nempe ad Cylindrum seu Prisma, ejusdem basis & altitudinis, ut $3T+2D$, ad $6T+6D$;) tum Centrum gravitatis; utpote quod in ipso Solidi Axe ita constitutum est, ut pars ad verticem sit ad totum, ut $4T+3D$ ad $6T+4D$. L.

Hinc etiam habetur (quæ cum Hyperbolæ quadraturâ conjuncta est) Curvæ Parabolicæ Rectificatio; seu Recta huic curvæ æqualis. M.

Item, Superficie Curvæ Conoideos Parabolici Expansio; seu Plana huic Curvæ æqualis. N.

Aliaque multa, quæ Curvas alias tum Lineas tum Superficies spectant, ad Rectas & Planas reducendas, (earumque Centra gravitatis,) subungi possent. O.

Sit Hh Hyperbola, cujus Asymptotæ AS , $A\sigma$, (angulum ad A utcumque facientes,) Axis AX , vertex V : Alterique ex A Fig. 210, asymptotis, puta $A\sigma$, parallela SH , aliæque quotlibet sh (æqualibus intervallis distitæ) spatium curvæ & asymptotis interjectum complentes; quibus ex adverso respondeant totidem sicut complentes AST triangulum, adeoque ipsis As proportionales. 211.

Ostendimus jam olim ad prop. 88, 91, 92, 94, 95, 103, *Aritmetica Infinitorum* Figuram (nili *Spatium* appellare malis) curvæ & asymptotis interjectam, ex *Primariorum Reciprocis* conflata esse; adeoque natura sua utrinque interminabilem esse, (tum ad partes $h\sigma$ tum

Fig. 210,
211.

tum ad partes HS , & magnitudinis infinitæ, sive utrinque sive ex alterâ tantum parte interminata censeatur; sed, utrinque truncatam, adeoque undique terminatam, magnitudinis esse finitæ.

Nempe; propter inscripta Parallelogramma $ASH\sigma$, $Ash\sigma$, &c. omnia inter se æqualia, (quæ nota est Hyperbolæ proprietates, per prop. 12. lib. 2. *Apollonii*,) erunt ubique rectæ SH , sh , ipsis AS , As , (adeoque ipsis ST , st ,) reciprocè proportionales; hoc est, reciprocæ Primanorum (seu arithmeticè proportionalium;) ex talibus itaque Figura seu Spatium illud conflatur. Quod erat primo demonstrandum.

B. Cum itaque ita sumi possit s punctum, ut recta As ad AS , seu st ad ST , sit in ratione quantumvis exiguâ, (donec tandem in ipsum A punctum degeneret,) erit propterea (quæ illi respondeat) sh ad SH in ratione quantumvis magnâ, (donec tandem quæ ipsi A puncto respondere intelligatur evadat infinita:) Unde sequitur, respectiva puncta h, σ , nonnisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) coitura: (Utut intervallo tandem distent quod dato minus sit, quantillum scilicet est As .) Adeoque Spatium illud esse, ad partes $h\sigma$, interminabile: rectamque $A\sigma$ asymptotam esse.

Similiter; Cum ita sumi possit (in AS continuatâ) punctum s , ut sit As ad AS , seu st ad ST , in ratione quantumvis magnâ (nec unquam eò perveniri possit ut non possit major sumi,) erit propterea quæ ipsi respondeat reciprocè proportionalis sh ad SH , in ratione quantumvis exiguâ, (nec eò tamen pervenietur ut non possit sumi minor.) Unde sequitur; neque unquam coitura esse puncta H, S , (utut, ad distantiam datâ quâvis minorem, continuè accedant:) Adeoque Spatium idem, ad partes etiam HS , interminabile esse: rectamque AS similiter esse Asymptotam. Quæ itidem erant demonstranda.

C. Intelligatur autem Spatium illud ex alterâ parte truncatum (putà ad partes HS ,) recta HS (ipsi $A\sigma$ parallelâ) terminatum, interminatum verò ad partes $h\sigma$: Erit (propter seriei ex primanorum reciproci Indicem — 1, per def. 2. hujus,) Spatium illud $ASHh\sigma$, ad inscriptum Parallelogrammum $ASH\sigma$, ut 1 ad — 1 — 1, (per prop. 1. vel 7. hujus;) hoc est, ut 1 ad 0: adeoque magnitudinis Infinitæ. Quod item erat demonstrandum.

Atque similiter ostendetur, Spatium idem, rectâ $h\sigma$ terminatum, & interminatum ad partes HS , magnitudinis esse infinitæ. Adeoque, à fortiori, si utrinque fuerit interminatum. Quæ itidem probanda erant.

Si

PROP. XXX. De Calculo Centri Gravitatis. 547

Si verò utrinque truncatum, adeoque & terminatum, fuerit ; purè, Fig. 210 ;
 rectis HS , $h\sigma$; vel HS , $s\sigma$; (vel aliàs utrunque :) Manifestum
 est, figuram illam sic truncatam, (utpote undique terminatam,) puta
 SH $h\sigma A$, vel SH $h\sigma$, magnitudinis esse finitæ. Quod etiam erat
 propositum.

Intelligatur itaque Basis SH , parallela recta CI , portio nem
 CSH abscindere. Sitque basis $SH = B$, latus AS (vel, in obli-
quangulis, figurae altitudo, AP) = A , adeoque parallelogrammum
inscriptum $ASH\sigma = AB$: Item CS (vel, in obliquangulis, ut fig.
211. hujus altitudo, CP) = C : Ipsiusque A , vel C ; particulæ infinitæ
exiguæ, a, a , &c. Cum itaque rectæ sh , planum complentes, sint
ipsis As (feu harum altitudinibus,) hoc est, suis à vertice distantiiis, re-
ciprocè proportionales; Hoc est, $As, AS :: SH, sh$: Erunt ipsæ
 sh , (à vertice deorsum,) $\frac{AB}{0}, \frac{AB}{a}, \frac{AB}{2a}, \frac{AB}{3a}$, &c. usque ad
basin $\frac{AB}{A} = B$: Vel (à base sursum) $\frac{AB}{A}, \frac{AB}{A-a}, \frac{AB}{A-2a},$
 $\frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $\frac{AB}{A-A} = \frac{AB}{0}$ (si ad ipsam verticem
procedatur;) vel (si tantum ad CI) usque ad $\frac{AB}{A-C}$. Quorum
itaque omnium Aggregatum, sunt ipsum quod complent planum.

Exdemque rectæ, in suas singulæ à vertice distantias ductæ; puta, $\frac{AB}{a}$ in a , $\frac{AB}{2a}$ in $2a$, &c. hoc est, totidem AB ; sunt ipsæ Ash parallelogramma; (quæ itaque omnia, ut prius dictum est, sunt invicem æqualia.)

Sed & eadem rectæ in eisdem distantias ductæ, sunt earundem
 Momenta respectu rectæ $A\sigma$: Vel etiam, parallelogramma, iisdem
 s^h rectis insistentia, Semiquadrantalem Ungulam complementia, aciem
 habentem $A\sigma$: Quæ itaque sunt totidem AB . Et propterea quæ
 toti $ASHh\sigma$ (figuræ in terminatæ) insistit, aciem habens $A\sigma$, (seu
 Plani $ASHh\sigma$ momentum respectu $A\sigma$), est ipsum AB in A
 (totius altitudinem) ductum: Hoc est, A^2B . Et similiter ejusdem
 Ungulæ portio ipsi $ACIH\sigma$ insistens (seu plani hujus Momentum
 respectu $A\sigma$), est AB in $A-C$; hoc est, A^2B-ABC : Quæ-
 que portioni $SHIC$ insistit, aciem itidem habens $A\sigma$, (seu plani
 momentum respectu $A\sigma$), est AB in C ; hoc est ABC .

Habetur itaque, quæ plano interminato, magnitudinis Infinitæ,
 $A a a a$ $A S H h$,

Fig. 210, A S H σ , insistit Ungula (aciem habens A σ) magnitudinis Finitæ; nempe Solido A^2 æqualis. Eiusdemque Plani (magnitudinis infinitæ) quod conversione circa A σ describitur, Solidum Magnitudinis Finitæ: Quippe, ad ungulam illam, ut (P ad R, hoc est) ut Circuli Peripheria ad ejusdem Radium; (per prop. 12. hujus:) Estque hoc Torricellii Solidum Hyperbolicum Acutum.

F. Hinc etiam sequitur; istius Ungulæ (aciem habentis A σ) sive quæ toti A S H h σ , sive quæ utrivis portioni A C I h σ , vel S C I H, insistit, Centrum gravitatis (nempe si quod sit) seu Planum Æquilibrii, esse in eo plano quod inter extrema medium est. Nempe, primæ, in eo quod medium est inter A σ & S H, (quodque ab A σ seu H S distat $\frac{1}{2} A$;) secundæ, in medio inter A σ & C I, (quodque ab A σ seu C I distat $\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} C$;) tertiæ, in medio inter C I & S H, (adeoque à C I vel S H distat $\frac{1}{2} C$.) Quippe, cum singulæ rectæ h s planum complentes æqualiter onerantur (nempe parallelogrammo A B,) Centrum gravitatis seu Æquilibrii planum in ipso medio erit (non minus quam si Parallelogrammi plano insisteret Parallelepipedum, altitudinem habens ipsi A æqualem;) per prop. 2. vel 3. hujus.

Atque in quo per aciem plano situm sit, jam supra sæpius ostensum est; (nempe, in eo quod Ungulæ altitudinem bifecat.) Ergo, in eâ rectâ quæ est utrique communis: quæ itaque recta, est Axis Æquilibrii.

In quo autem hujus rectæ puncto sit Centrum gravitatis (quod ungulam respiciat ipsi A σ contiguam) si inquiratur: Invenietur, (secundum ea quæ tradita sunt ad prop. 8. hujus) nusquam esse: seu (quod eodem recidit) in distantia (ab A S) infinitâ. Est enim Series Magnitudinum, series Æqualium (propter æqualia parallelogramma ipsis s h rectis insistentia,) cujus Index, 0; adeoque Magnitudo, verbi gratia, N P: Series verò Distantiarum (Centrorum gravitatis) ab A S, (utpote in mediâ longitudine rectarum s h,) Series est reciproca primanorum (qualis est ipsa rectarum series) cujus Index, -1: Et propterea Series Momentorum (ex illis conflata) series item reciproca primanorum; (propter -1-0=-1.) Adeoque Momentum integrum, $\frac{1}{-1-1}$ N P D = $\frac{1}{2}$ N P D,

N P) $\frac{1}{2}$ N P D ($\frac{1}{2}$ D. Hoc itaque per Magnitudinem N P divisum, exhibebit distantiam ab A S, $\frac{1}{2}$ D; hoc est, quæ sit ad D (distantiam centri gravitatis basis ab A S;) seu, in hoc casu, ad $\frac{1}{2}$ B; ut 1 ad 0. Quæ ratio est infinita.

Sed,

PROP. XXXI. De Calculo Centri Gravitatis. 549

Sed, (ut ad Planum redeamus,) ostensum est, (§ D.) CSHI, G. (planum interminatum,) æquale esse aggregato omnium sh, hoc est, Fig. 210, omnium $\frac{AB}{A} + \frac{AB}{A-a} + \frac{AB}{A-2a} + \frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad ²¹¹.

$$CI = \frac{AB}{A-C}$$

$$\text{Est autem } \frac{A}{A-a} = 1 + \frac{a}{A-a} A \left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3} \&c. \right)$$

$$+ \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3} \&c.$$

in infinitum. (Quod dividendo A per $A-1$

patebit.) Adeoque $\frac{AB}{A-a}$

$$= 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$$

&c. in B . Et similiter o-

stendetur $\frac{AB}{A-2a} = 1 +$

$$\frac{2a}{A} + \frac{4a^2}{A^2} + \frac{8a^3}{A^3} \&c.$$

in B . Et $\frac{AB}{A-3a} = 1 +$

$$\frac{3a}{A} + \frac{9a^2}{A^2} + \frac{27a^3}{A^3} \&c.$$

in B . Et similiter in cæteris usque ad $\frac{AB}{A-C} = 1 + \frac{C}{A} + \frac{C^2}{A^2} +$

$\frac{C^3}{A^3} \&c.$ in B . Vel, posito $A=1$, (quo ipsius A potestates omnes

deleantur,) B in, $1+a+a^2+a^3 \&c.$ Et B in, $1+2a+4a^2$

$+8a^3 \&c.$ Et B in, $1+3a+9a^2+27a^3 \&c.$ Et sic deinceps

usque ad B in, $1+C+C^2+C^3 \&c.$

Aaaa 2

Erunt

Fig. 110, Erunt ergo, omnes s h
211. (spatium CSHI complen-
tes) posito $A=1$,

$$\left. \begin{array}{l} 1 + A + A^2 + A^3 + A^4 \&c. \\ 1 + 2A + 4A^2 + 8A^3 + 16A^4 \&c. \\ 1 + 3 + 9A^2 + 27A^3 + 81A^4 \&c. \\ \text{Et sic deinceps usque ad} \\ 1 + C + C^2 + C^3 + C^4 \&c. \end{array} \right\} \text{in } B.$$

Quorum omnium Aggre-
gatum (seu ipsum CSHI
planum) est (per prop. 1.
hujus, vel prop. 64. *A-*
rithmet. Infinitorum)

$$\left\{ \begin{array}{l} C + \frac{1}{2}C^2 + \frac{1}{3}C^3 + \frac{1}{4}C^4 + \frac{1}{5}C^5 \&c. \text{ in } B. \\ = \text{Plano.} \end{array} \right.$$

Si verò non ponatur $A=1$, sed cujuscunque magnitudinis: Erit
saltem Planum, seu PL , $= C + \frac{1}{2} \frac{C^2}{A} + \frac{1}{3} \frac{C^3}{A^2} + \frac{1}{4} \frac{C^4}{A^3} + \frac{1}{5} \frac{C^5}{A^4} \&c.$
in B .

Vel, posito $\frac{C}{A} = E$; erit PL , $= 1 + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}E^2 + \frac{1}{4}E^3$
 $+ \frac{1}{5}E^4 \&c.$ in CB .

Res autem ad calculum sic commodissime referetur.

Cum C (per constructionem) semper minor sit quàm A (propter
 CI rectam, rectis $A\sigma$ & HS interjectam; adeoque hujus à CI
distantiam minorem quàm ab $A\sigma$;) Posito $A=1$, erit C in par-
tibus decimalibus quamlibet proximè exprimenda. Hujusque prop-
terea potestates, C^2 , C^3 , &c. (quod semper obtinet ubi Radix seu
Latus minus est quàm 1,) continuè decrescunt, adeoque in remotiora
loca decimalia continuè detruduntur. Quamquam igitur, in plano
designando, intelligantur ipsius C potestates, C^2 , C^3 , C^4 , &c. in in-
finitum continuandæ: Postquam tamen aliquousque processum est (&
quidem plus minúsve prout major minorve *aplicata* spectetur,) reli-
quæ, utpote in loca decimalia altius detrusæ quàm ut magni sint mo-
menti, meritò possunt negligi.

Exempli

PROP. XXXI. De Calculo Centri Gravitatis. 551

Exempli gratia;
Positâ $AS = A = 1$.
Sit $SC = C = 0,21$.
 $SH = B = 0,01$.

Erunt	$C = 0,21$
$\frac{1}{2}C^2$	$= 0,02205$
$\frac{1}{3}C^3$	$= 0,003087$
$\frac{1}{4}C^4$	$= 0,000486203$
$\frac{1}{5}C^5$	$= 0,000081682$
$\frac{1}{6}C^6$	$= 0,000014294$
$\frac{1}{7}C^7$	$= 0,000002573$
$\frac{1}{8}C^8$	$= 0,000000473$
$\frac{1}{9}C^9$	$= 0,000000083$
$\frac{1}{10}C^{10}$	$= 0,000000017$
$\frac{1}{11}C^{11}$	$= 0,000000003$

Fig. 210,
211.

Horum Summa, $0,235722333$
Ducta in $B = 0,01$

Exhibet planum CSHI, seu $PL = 0,00235722333$ proximè.

Atque ad eandem formam procedendum erit, positâ $A = 1$, quæcunque fuerit C (quæ tamen semper minor est quàm A .) & B (quæ vel major esse potest, vel minor, quàm vel A vel C ;) prout expostus casus postulaverit.

Atque huic non multùm abfimilem Hyperbolæ quadraturam exhibuit nuper in *Logarithmotechniâ* suâ D. Nicolaus Mercator. De quâ verba fecimus in binis literis ad D. Vice-comitem Brouncker, (Societatis Regiæ Lond. præsidem dignissimum, & harum rerum scientissimum,) datis, Julii 8. & Augusti 5. 1668. atque in *Transactionibus Philosophicis Londinensibus*, sub idem tempus, insertis.

Habitâ verò, ut dictum est, Figuræ Hyperbolicæ Exterioris magnitudine: Etiam Interioris magnitudo facile obtinetur. H.

Intelligatur utique ab V vertice, recta VO , ipsi A & parallela; portionem abscindens $SHVO$. Cujus plani magnitudo, (sic ut jam traditum est inventa,) dicatur PL . Estque $AVO = \frac{1}{2} AOV = \frac{1}{2} AB$. Item $AXS = \frac{1}{2} A^2$ (nempe si sit Triangulum rectangulum; adeoque XS set A ipsi A , figuræ altitudini, æqualis;) vel saltem (posito $SX = F$), $AXS = \frac{1}{2} AF$: Ergo $HVX = AXS - AVO - OVHS = \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} AB - PL$, seu $\frac{1}{2} AF - \frac{1}{2} AB - PL$. Sed & hinc etiam, si opus sit, abscindi poterit (per HD ordinatim - applicatam) HDX triangulum; ut habeatur portio $H.DV$.

Si.

Fig. 210,
211.

Si verò, non quidem ad Axem, sed ad aliam quamvis Diametrum, ponatur hyperbola: Mensuram ejus non minus assequemur.

Nempe; Sumpto, ubivis in Hyperbolâ, vertice I, cui respondeat Diameter A I d x. Quippe hic limititer habebitur Magnitudo Triangulorum A C I, A S x, H d x, & spatii S C I H: Adeoque & I H x, I H d.

I. Sed &, Propter cognita triangulorum A S x, A O V, A D x, vel A S x, A C I, A d x, tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, horumve momenta respectu rectæ A σ; (per prop. 8. hujus:) Atque etiam (per jam tradita, § G.) Spatii S C V H vel S C I H magnitudinem, Centrique gravitatis ab A σ distantiam, ejusque (respectu ejusdem A σ) momentum: Habebitur etiam portionum H V x, H D V, vel H I x, H d I, momentum. Cùmque (ut jam ostensum est) habeatur & harum magnitudo; habetur (momentum per magnitudinem dividendo) earundem distantia Centri gravitatis ab A σ.

K.

Porro: Si consideretur eadem V H D semi-hyperbola, tanquam ex rectis ipsi H D parallelis, ad axem V D ordinatim-applicatis, conflata. Manifestum est, singularum H D ordinatim-applicatarum momenta, seu Triangula ipsis insistentia Semiquadrantalem Ungulam complementia, aciem habentem V D; earundem Semi-quadratis esse æqualia. Adeoque semisumma quadratorum illorum, erit totius V H D semi-hyperbolæ respectu ipsius V D momentum: (seu semi-quadrantis Ungula aciem habens V D.)

Posito itaque pro Axe Transverso, T; pro Latere Recto, L; sumptis Diametris interceptis, d, arithmetice proportionalibus, ut 1, 2, 3, &c. usque ad maximum D = V D: Erunt quæ his respondent ordinatim-applicatarum (semi-hyperbolam complementium) Quadrata (ut in tractatu meo *De Conicis Sectionibus*, prop. 33. ostensum est:)

totidem $dL + \frac{d^2L}{T}$ seu $\frac{dT+d^2}{T}L$, sumptis d arithmetice-proportionalibus, usque ad maximum $\frac{DT+D^2}{T}L = \text{Quadr. H D}$. Adeoque (propter *Omn. d, = $\frac{1}{2}D^2$; & Omn. d², = $\frac{1}{3}D^3$; per prop. 1. hujus;*) Omnium quadratorum summa $\frac{\frac{1}{2}D^2T + \frac{1}{3}D^3}{T}L$, seu $\frac{3T+2D}{6T}D^2L$: & semi-summa, seu plani momentum, $\frac{3T+2D}{12T}D^2L$. Atque

PROP. XXXI. De Calculo Centri Gravitatis. 553

Atque hoc Momentum, per plani magnitudinem (modò exhibi- Fig. 210,
tam) divisum; exhibet ejusdem ab VD distantiam Centri gravi- 211.
tatis.

Sed ejusdem Centri distantia ab $A\sigma$, jam exhibita est: Ergo
(propter $A\sigma$, AVD , non invicem parallelas,) exhibetur ipsum
Plani VHD Centrum gravitatis; per prop. 26. Cap. præced.

Et, consequenter; (propter data etiam triangulorum ASX , AOV ,
 HDX , Magnitudines & Centra gravitatis, per prop. 5. vel 6. hujus;
ipsiusque $SOVH$ magnitudinem, jam ostensam;) datur etiam plani
 $SOVH$ Centrum gravitatis; per prop. 27. Cap. præced.

Vel etiam, in Fig. 214. ubi Hyperbolæ AO , vertex A , Centrum C , Fig. 214.
Diameter conjugata $C\delta$, Semissis diametri transversæ $CA = S$
 $= \frac{1}{2}T$; Ordinatum applicatæ ad hyperbolæ diametrum $DO = h$;
Ordinatum applicatæ ad diametrum conjugatam $\delta O = c$. Osten-
sum est (in Tractatu meo *De Conicis sectionibus*, prop. 35, 41.) Re-
ctas $\delta O = c$, esse totidem $\sqrt{S^2 + \frac{T}{L}h^2}$: (Sumptis $C\delta = DO$
 $= h$, arithmetice proportionalibus.) Earum itaque quadrata, sunt
totidem $S^2 + \frac{T}{L}h^2$; quorum summa (per prop. 1. hujus) $AS^2 +$
 $\frac{AT}{3L}h^2$, (posito A pro altitudine figuræ;) Cujus itaque semissis,
 $\frac{AT}{6L}h^2$, est plani $C\delta OA$ (curvæ & diametro conjugatæ interjecti)
momentum respectu CA .

Sed & magnitudo cognoscitur, ex jam traditis; propter cogni-
tam Spatii $MCAO$ fig. 214. hoc est $SAVH$ fig. 210, 211. mag-
nitudinem; & magnitudinem trianguli MCD fig. 214; adeoque
& totius $C\delta OA$.

Hujus itaque momentum per magnitudinem dividendo, habetur Cen-
tri gravitatis ejusdem distantia à $C\delta$.

Verum & Totius Parallelogrammi $CDO\delta$, tum magnitudo tum
& Centri gravitatis à $C\delta$ distantia habentur. Habetur itaque &
partis reliquæ AOD , tum magnitudo tum Centri gravitatis ab ea-
dem $C\delta$ distantia; per prop. 27. cap. præced.

Sed & ejusdem distantia sive à CM , sive ab AD , fig. 214.
(hoc est ab AS , vel VD fig. 210, 211.) jam ante data est. Ergo
& ipsum gravitatis Centrum datur, per prop. 26. cap. præced.

Quæque

Fig. 212, Quæque de Semi-hyperbolâ Rectâ VHD jam ostensa sunt; eadem
213. Scalenzæ I H d, facile accommodantur. Est utique Semi-hyperbolæ
I H d fig. 213. Centrum gravitatis in eâ rectâ (puta GR) diametro
I d parallelâ, quæ ita dividit basin H d, ac si anguli ad basin recti
essent: Puta, ut recta GR fig. 212. (parallela rectæ V D) dividit ba-
sin H D.

L. Hinc etiam colligitur Conoidis (vel Pyramidoidis) Hyperbolici
tum Magnitudo tum Centrum gravitatis. Cum enim similia plana
solidum complementia, basi parallela, sint in duplicatâ ratione ordina-
tim-applicatarum, seu ut harum quadrata, hoc est, ut totidem
 $\frac{dT + d^2}{T} L$, sumptis d arithmetice-proportionalibus; Solidumque
Cylindricum seu Prismaticum super eâdem base, æque altum, com-
pleant plana totidem maximo æqualia, $\frac{DT + D^2}{T} L$: Erit Conoides
illud seu Pyramidoides, ad Solidum hoc Cylindricum seu Prismaticum,
(propter T, L eadem perpetuò utrobique,) ut omnia $dT + d^2$,
(sumptis d arithmetice-proportionalibus,) ad totidem $DT + D^2$,
(sumptis D maximo æqualibus,) hoc est (ut modò ostensum est, ex
prop. 1. hujus,) ut $\frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3$ ad $D^2 T + D^3$; seu ut $3T + 2D$
ad $6T + 6D$. Quod ipsum jam olim demonstravimus, ad prop.
163. *Arithmetica Infinitorum*. Et perinde obtinet sive Conoides hoc
vel Pyramidoides, Erectum sit, sive Scalenum.

M. Sunt autem planorum horum Distantiæ à Vertice, ipsi d diametris
interceptis proportionales; adeoque eorum Momenta respectu plani
tangents in vertice, ut totidem $d^2 T + d^3$, sumptis d arithmetice pro-
portionalibus; qualia totidem $D^2 T + D^3$ sunt momentum Solidi
istius Cylindrici seu Prismatici in maximâ distantia suspensi; adeoque
illorum omnium summa, seu Momentum Solidi (per prop. 1. hujus)
 $\frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3$. Quod quidem momentum, per magnitudinem
 $\frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3$ divisum; exhibet $\frac{4T + 3D}{6T + 4D} D$ Distantiam Cen-
tri gravitatis à vertice
 $\frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3 : \frac{1}{2} D^2 T + \frac{1}{3} D^3 :: \frac{4T + 3D}{6T + 4D} D : D$.
Conoidis vel Pyrami-
doidis (sive Erecti, sive
Scaleni,) in ipso Solidi
Axe constituti. Eademque est distantia à Plano Verticem tangente, in
Erecto,

PROP. XXXI. De Calculo Centri Gravitatis. 555

Ereſto, (cujus Altitudo eadem eſt cum D , maximâ diametro inceptâ:) Fig. 212;

In Scaleno verò, $\frac{4T+3D}{6T+4D} A$; poſito A pro figuræ altitudine, ſeu di-^{213.} ſtantiâ maximâ.

Cum Hyperbolæ verò Quadraturâ, conjunctam eſſe Curvæ Pa-
rabolicæ *Ευθύστης*, ſeu Rectæ huic Curvæ æqualis exhibitionem; jam
olim demonſtravimus in Tractatu Epistolari de *Κυρτωτήρι* *Ευθύστης* &
Πλατυμῶ, Tractatui de *Cycloide* ſubjuncto. Ubi etiam, Conoidis
Parabolici Superficie Curvæ, æqualem Planam exhibuimus.

Atque hic quidem pateret Campus ſatis amplus; ſi ad Curvarum
aliarum Linearum Rectificationem, & Superficierum Complanatio-
nem, (vel Rectarum illis, Planarum his, æqualium exhibitionem,) N.
liberet procedere: (Qualia non pauca in illo de *Ευθύστης* & *Πλατυμῶ*
tractatu ſtriſtim indicavimus, & multò plura in promptu eſſet exhi-
bere:) Centrique gravitatis in illis investigationem.

Aliæque multa, conſimilis argumenti, de figurarum aliarum, aut
etiam linearum curvarum, Magnitudinibus, Momentis, & Centris gra-
vitatſis, Solidiſque aut Superficiebus earundem variâ converſione factis,
magnâ varietate adjungi poſſent.

Verùm, ex his non pauca, ibidem (ſaltem breviter) inſinuata
ſunt: Aliæque, juxta methodos hic ſupra traditas, cum opus fuerit,
excogitari poterunt, & Calculo ſubjici. Atque tandem aliquando
ſiſtendum videtur, ne in immenſum excreſcat volumen, quod jamjam
multò ultra quàm ſperaveram excrevit.

Miſſis itaque aliis; Unam adhuc de Hyperbolâ Speculationem ſub-
jungam, quam *Wrenn*o noſtro debemus: Qui Solidum Hyperbolicum,
convexo-concavum, Torni ope acie Dolabræ rectilineâ obliquo
ad Axem ſitu poſitâ, conficere docuit. Quam rem, ad mæas metho-
dos reduſtam, ſic viſum eſt exponere, & paulò fuſius proſequi: Ejus-
que Solidi Sectiones, & Centra gravitatſis, conſiderare.

PROP. XXXII.

- A.B. Si in quacunque ab Axe Torni distantia, ponatur Acies Dolabræ recta, in situ ad illum Axem (non parallelo, ut in Tornado Cylindrum, sed) quocunque obliquo: Formabitur torno Cylindroides Hyperbolicum Convexo-concavum.
- C. Et quidem ea Hyperbola; cujus Semi-axis transversus æquatur minimæ distantia aciei dolabræ ab Axe Cylindroidis (seu Semi-diametro basis inscripti Cylindri;) Axisque conjugatus cum Asymptotâ eum faciat angulum, quem facit Dolabræ Acies recta, cum rectâ axi torni parallelâ.
- D. Unde patet methodus, Cylindroides torno formandi, cujus sectio per axem, sit data Hyperbola.
- E. Solidi hujus sectiones Plano factæ; si planum illud sit, ad Axem Solidi, Rectum; sunt Circuli.
- F.L. Si, ad Axem, minus obliquum quam est Asymptota; Ellipses.
- F, H, I. Si similiter inclinatum sit atque ipsa Asymptota; sunt Parabolæ; vel (si etiam per Centrum sit) Parallelogrammum.
- F, G, K. Si adhuc Obliquius secet Axem, vel etiam sit Axi Parallelum; Oppositæ Hyperbolæ; vel (si axi parallelum atque per verticem Hyperbolæ Genetricis) opposita Triangula.
- M. Solidi sit constructi (à Centro utrinque æqualiter continuati) Magnitudo, nota est: Quippe ad Cylindrum circumscriptum, ut $3LT + 4H^2$, ad $3LT + 12H^2$. Et Centrum gravitatis in Centro solidi, seu Axis medio.
- Semisolidi

PROP. XXXII. De Calculo Centri Gravitatis. 557

Semisolidi (plano per Centrum, ad Axem recto, abscissi,) N.
Centrum gravitatis, in Axe situm, abscindit axis sui
partem ad Centrum, quæ sit ad totum, ut $3LT + 6H^2$,
ad $6LT + 8H^2$.

Hoc quò commodius absolvatur; Lemma præmittam, in meo A.
de 'Ευθύων Tractatu; modò memorato, insinuaturn; Demon- Fig. 214.
stratione ex meo de Conicis sectionibus tractatu, prop. 35, 40, petirà.
Ad hunc sensum;

Si ad Recta alicujus puncta quolibet, equalibus intervallis sumpta, ordinatim-applicentur Recta, quarum Quadrata sint, ut numerorum continue consequentium 1, 2, 3, 4, &c. quadrata, eodem aliquo vel equalibus quadratis aucta: Quæ per harum extrema reliqua transit Curva, est Hyperbola.

Quippe, (in fig. 27. ibidem, quam hic repeto fig. 214.) Manifestum est rectas δA , tales esse quales innuit Lemma; (propter $C\delta$, $C\delta$, $C\delta$, &c. ut 1, 2, 3, &c. & CA communem:) Quæ si in situm δO transferantur, ad $C\delta$ ordinatim-applicatæ; Hyperbolam AOO designabunt.

Quodsi, manentibus CA , δO , ordinatim-applicatis, intervalla $C\delta$, $\delta\delta$, minora fuerint vel majora quàm nunc sunt; vel etiam angulus $AC\delta$, qui jam rectus intelligitur, fiat obliquus quilibet; prodibit utcunque AOO Hyperbola; sed cujus aliud erit Latus-rectum, aliùsque ad Asymptoton CM angulus δCM , aliùsque angulus quem cum diametro faciant conjugata diameter & ordinatim-applicatæ.

Demonstratio petitur, ex meis de Conicis Sectionibus prop. 35, 41. ubi ostenditur, rectas ad Hyperbolæ diametrum conjugatam ordinatim-applicatas δO ; hoc est, CD distantias, punctorum applicationis ad diametrum, à Centro, quas illic c dicimus; (ex Semidiametro transversâ, & diametro interceptâ aggregatas, seu $\frac{1}{4}T + d$;) esse $\sqrt{\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2}$: Quarum itaque quadrata sunt, $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2$: (Positis T pro diametro transversâ, L pro latere recto, & h pro ordinatim-applicatâ ad hyperbolæ diametrum.) Adeoque, (propter T , L , quantitates permanentes,) si sumantur h , hoc est DO , seu $C\delta$, arithmetice-proportionales ut 1, 2, 3, &c. manifestum

Bbb b 2

festum

festum est, quadrata illa, $\frac{1}{4}T^2 - \frac{T}{L}b^2$, esse, ut *Quadrata equalia, quadratis arithmetice-proportionalium aucta*. Quæ itaque cum sit Hyperbolæ generalis proprietas, (quæcunque fuerit ratio Diametri-transversæ ad Latus-rectum, & quemcunque ad diametrum angulum faciant ordinatim-applicata;) Lemma constat.

B. His præmissis, Intelligatur (fig. 215.) Acies Dolabræ rectæ, Fig. 215. A O O, in quacunque ab Axe Cylindroidis (torno conficiendi) distantia, situ quocunque obliquo (ad axem illum) posita. Manifestum est, per rectam illam A O O, transcurram esse planum aliquod, ut O A a, cui parallelus sit Cylindroidis axis C d: Rectamque aliquam in eo plano, axi parallelam, ut A a a, (nempe, ex parallelis eam quæ sit axi proxima,) lineam contactûs esse quâ planum illud tangat Cylindrum, (Cylindroidi inscriptum,) cujus Axis C d; & basis radius C A; (quæ est minima distantia aciei dolabræ, quantum opus sit continuata, ab Axe Cylindri seu Cylindroidis formandi.) Sumptisque in Axe C d d, partibus continne æqualibus C d, d d, &c. atque ad eum perpendicularibus C A, d a, &c. erectisque itidem ad planum C A a perpendicularibus a O, a O, &c. Manifestum est, rectas a O, esse ut 1, 2, 3, &c. numeros continuè consequentes; earumque quadrata, ut quadrata horum: Et propterea (propter angulum d a O rectum, rectasque a d invicem æquales,) junctis omnibus O d, quadrata harum esse, ut quadrata numerorum illa æqualibus quadratis aucta.

C. Adeoque, Si Torni ope, circa axem C d (fig. 215.) describi intelligantur in Cylindroide Circuli, quorum radii sint ipsæ d O rectæ: Sectio per axem exhibebit ipsum d C A O (fig. 214.) planum. Erunt utique Circulorum illorum radii, planum complentes, ipsis d O, utriusvis figuræ, æquales. Nempe si, in binis figuris, sumptis tum A C æqualibus, tum æqualibus C d respectivis; sumantur a O fig. 215. ipsis C d fig. 214. respectivis æquales: Quod fit, sumpto O A a fig. 215. angulo semi-recto; (qualis est, in fig. 214. d C M, quem cum axe conjugato C d facit Asymptota C M:) Si verò alius sit angulus O A a quam semirectus; illi congruet Hyperbolæ quæ similem habeat angulum, d C M; ut nempe C d fig. 214, 215. sint respectivis a O fig. 215. æquales.

D. Constat itaque, non modò Cylindroides hujusmodi torno formari posse cujus sectio per axem sit hyperbola; sed &, quæ sit data Hyperbola. Quippe exponatur Hyperbola A O O (fig. 214.) quælibet, cujus Centrum C, semi-axis transversus C A, axis conjugatus C d, &

PROP. XXXII. De Calculo Centri Gravitatis. 559

& C M asymptota ; cui similem imperatum sit torno exhibere : Hoc tantum curandum erit ; nempe ut C A fig. 215. sit æqualis ipsi C A fig. 214. sitque angulus α A O fig. 215. ipsi δ C M, fig. 214. (quem cum Asymptotâ facit axis conjugatus) æqualis.

Solidum verò sic constructum cum varias admittat sectiones plano factas ; eas ut ordine exquiramus , considerabimus hoc idem solidum ut aliâ constructione formatum ; conversione scilicet Hyperbolæ O A O fig. 216. circa conjugatum axem δ C δ . Quippe hoc, idem esse solidum atque illud quod Torno constructum iri modo docuimus, ex dictis satis patet.

Cumque Solidi hujus sectio quælibet plano facta, sit alicui per Axem sectioni recta, seu perpendicularis : Esto ea per Axem sectio O o O, in quâ oppositæ Hyperbolæ (Genetrices) A O, a o ; quarum Centrum, C ; Axis conjugatus (qui & Solidi Axis est) δ C δ ; Asymptotarum altera, C M ; Axis Transversus, A a = 2 C A = T = 2 S ; Axis interceptus, A D = d ; à Centro distantia, C D = c = $\frac{1}{2}$ T + d = S + d ; Ordinatum-applicata ad hyperbolæ axem, D O = h ; cujus quadratum, $h^2 = L d + \frac{L}{T} d^2 = \frac{T d + d^2}{T} L = \frac{c^2 - S^2}{T} L$; (quæ sunt itaque, ut series Primanorum aucta serie Secundanorum ; aut etiam, ut Series Secundanorum multiplicata serie Æqualium :) Adeoque $c^2 = S^2 + \frac{T}{L} h^2$: Quod itaque est quadratum rectæ C D (distantiæ à Centro) vel (huic æqualis) O δ , ordinatum-applicatæ ad Axem conjugatum. (Quæ omnia olim demonstravimus, *Con. Sect. prop. 35, 41.*) Et, propterea, sumptis C δ , hoc est D O = h, arithmetice proportionalibus ; erunt omnia rectarum δ O, ordinatum-applicatarum ad Axem conjugatum, (spatium O δ C A complementium,) quadrata, totidem $S^2 + \frac{T}{L} h^2$, sumptis h arithmetice proportionalibus : Hoc est, Series Æqualium aucta serie Secundanorum.

Sed &, sumpto M in Asymptotâ C M, erit (per *prop. 39. ibidem*.) ut L ad T, sic quadratum C δ seu D O, hoc est h^2 , ad quadratum δ M. Adeoque quadrata omnium δ M (spatium M C δ complementium) sunt totidem $\frac{T}{L} h^2$; sumptis C δ = h ; arithmetice proportionalibus.

Ma.

Fig. 216.

Manifestum autem est, (ex constructione solidi,) quæ rectis Aa , Oo , insunt erecta plana (solidum complementa) totidem esse circulos; quorum diametri sunt ipsæ Aa , Oo , rectæ. Quippe Radii CA , δO , circa Axem $\delta C \delta$ conversi, totidem describunt Circulos.

F. Intelligatur autem, sumpto, ubivis in δO rectâ, puncto m , recta per Centrum Cm , cui erectum insitat Planum sectionem faciens, quam itaque compleant rectæ m (ipsis m punctis insistentes:) Quarum quadrata (utpote, in suis respectivè circulis, inter diametri segmenta Om , mo , mediarum proportionalium, seu ordinatim-applicatarum ad Circuli diametrum,) sunt totidem quadrata δO , demptis respectivis quadratis δm , seu $m^2 = \delta Oq - \delta m q$.

Sitque 1°, punctum m in δ ; adeoque $\delta m = o$, & $\delta Oq - \delta m q = \delta Oq$: Et propterea, quæ rectæ $C\delta$ insitit sectio, eadem erit atque δOAC hyperbola.

Sit 2°, puncto m in M , (nempe Cm eadem existente atque CM asymptota;) adeoque $\delta m = \delta M$, & $\delta m q = \delta M q = \frac{T}{L} h^2$: Et

propterea $\delta Oq - \delta m q = S^2 + \frac{T}{L} h^2 - \frac{T}{L} h^2 = S^2 = m^2$: ipsæque m , totidem S , invicem æquales. Adeoque, quæ Asymptotæ insitit sectio, est Parallelogrammum Rectangulum.

Sit 3°, punctum m inter δ & M ; adeoque δm minor quam δM , sed eidem ubique proportionalis; putà in ratione n ad h . Adeoque $\delta m q = \frac{T}{L} n^2$: Et $\delta Oq - \delta m q = S^2 + \frac{T}{L} h^2 - \frac{T}{L} n^2 = S^2 + \frac{h^2 - n^2}{L} T = m^2$. Quæ itaque (propter n minorem quam h)

sunt quadrata ordinatim-applicatarum ad hyperbolæ axem conjugatum, (utpote series Æqualium aucta serie Secundanorum;) Quæ quidem Hyperbola Semi-axem transversum habet $S = CA$, seu transversum Axem $T = Aa$; & latus rectum $\frac{h^2}{h^2 - n^2} L$: Estque conjugatus axis ipsa Cm , recta; Centrum, C .

Sit 4°, punctum m inter O & M , (inter Curvam & propiorem Asymptotam; adeoque Cm , continuata, curvam secabit; & quidem utrinque continuata, sectiones oppositas:) Adeoque (propter δm majorem quam δM , seu n majorem quam h ,) erunt $\delta Oq - \delta m q$

PROP. XXXII. De Calculo Centri Gravitatis. 561

$= S^2 + \frac{T}{L} h^2 - \frac{T}{L} m^2 = m^2$, hoc est $S^2 - \frac{n^2 - b^2}{L} T = S^2$, quadrata Fig. 216.

ordinatim-applicatarum ad Ellipseos conjugatum axem, (per *Con. Sect. prop. 28.* utpote series Aequalium multiplicata Serie Secundanorum;) cujus axis transversus, T , seu $2S = Aa$; & Latus rectum,

$\frac{b^2}{n^2 - b^2} L$: Et conjugatus axis, ipsa CM recta, quæ curvam AO

secabit in eo puncto cui respondet $\frac{n^2 - b^2}{L} T = S^2$.

Omnis igitur hujus solidi sectio, plano per Centrum facta, erit vel Circulus, nempe si super rectam CA , vel Ellipsis, si inter CA & CM (seu inter curvam & asymptotam proximam;) vel Parallelogrammum, si in ipsâ Asymptotâ; vel Hyperbola (seu potius Oppositæ Hyperbolæ, infra supraque,) si per CM inter CM & CA , vel ipsa quidem Genitrix hyperbola, si per Axem CD .

Intelligatur deinde, Sectio rectæ $\kappa\mu$, axi parallelæ, insistent. G.
Eruntque, & hic, omnia quadrata rectarum punctis μ insistentium Fig. 217.
(planum complementium,) puta $\mu^2 = \delta Oq - \delta\mu q = \delta Oq - C\kappa q$
(propter $\delta\mu = C\kappa$.)

Ideoquæ, si κ sit in C , erit (ut prius) sectio per $\kappa\mu$, eadem quæ per CD , hoc est δOA Genitrix hyperbola (propter $\delta\mu = 0$.)

Si κ sit in A vel a , adeoque $C\kappa = CA = S$: Erunt $\delta Oq - C\kappa q$
 $= S^2 + \frac{T}{L} h^2 - S^2 = \frac{T}{L} h^2 = \mu^2$. Quæ itaque sunt quadrata
ordinatim-applicatarum in triangulo, (utpote Series Secundanorum;) seu potius binis triangulis communem verticem A habentibus, quæ sunt rectis decussantibus eundem angulum facientibus quem faciunt Asymptotæ se mutuo in plano decussantes.

Si κ sit inter C & A , vel C & a , adeoque $C\kappa = \sigma$ minor quàm
 S , Erunt $\delta Oq - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L} h^2 - \sigma^2 = \mu^2$, quadrata or-
dinatim-applicatarum ad conjugatum axem hyperbolæ; (quippe se-
ries Aequalium aucta serie Secundanorum;) cujus Semi-axis transver-
sus est $\sqrt{\frac{1}{S} : S^2 - \sigma^2}$: (Nempe, quæ puncto κ insistit ordinatim-ap-
plicata in Semicirculo Aa ;) Latus rectum, $\frac{2L}{T} \sqrt{\frac{1}{S} : S^2 - \sigma^2}$, seu
 $\frac{L}{S} \sqrt{\frac{1}{S} : S^2 - \sigma^2}$: atque axis conjugatus, ipsa $\kappa\mu$ recta.

Si

Fig. 217. Si κ sit extra Solidum, puta ultra A vel a, (adeoque plani secantis pars media etiam extra solidum,) Planum secans in iis punctis occurret ubi est δO (vel δo) = $C\kappa = \delta\mu$; (quæ itaque puncta sunt vertex oppositi:) Atque ultra hæc puncta, existente μ intra solidum, erunt $\mu^2 = \delta O q - \delta\mu q = \delta O q - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L}h^2 - \sigma^2$; hoc est (propter σ majorem quam S), $\frac{T}{L}h^2 - \sigma^2 + S^2 = \mu^2$; quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola (seu Oppositis hyperbolis) ad suum axem: (utpote Series Secundanorum multiplicata serie Aequalium:) Cujus Axis transversus est $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{T}}L$, & Latus rectum, $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{L}}T$. Centrum verò, ipsum κ ; atque Axis, $\kappa\mu$.

Omnis igitur hujus Solidi Sectio, plano quod Axi sit parallelum facta, est, vel Opposita Triangula ad eundem vertexem, nempe si per vertexem hyperbolæ Genitricis, vel Hyperbolæ Oppositæ, si alibi.

H. Intelligatur denique, ubivis in Hyperbolæ Genitricis axe Aa, quantumvis producto, sumi punctum κ ; unde ducatur (cui inscribat sectio) in plano per Axem solidi, recta $\kappa\pi$, solidi Axi $C\delta$ non parallela, sed eidem alicubi occurrens.

Et quidem si sumatur κ in C, fiet sectio per Centrum, de qua jam supra dictum est: In qua quadrata ordinatim-applicatarum sunt $m^2 = S^2 + \frac{T}{L}h^2 - \frac{T}{L}n^2$: Adeoque sectio ipsa, vel Hyperbola, vel Parallelogrammum, vel Ellipsis; prout n minor est, vel æqualis, vel major quam h .

Jam verò, cuivis prædictarum Cm, parallela intelligatur $\kappa\pi$. Sitque $C\kappa$ (= $m\pi$) = $\sqrt{\frac{T}{L}}F^2 = F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (uti prius erat $\delta m = \sqrt{\frac{T}{L}}n^2 = n\sqrt{\frac{T}{L}}$.) Adeoque $\delta\pi = \delta m + m\pi$, vel $\delta m - m\pi$; vel $m\pi - \delta m$, (pro vario situ punctorum m, π ;) hoc est, æqualis summæ vel differentiæ rectarum $\delta m, m\pi$; hoc est, ipsarum $n\sqrt{\frac{T}{L}}, F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (nempe, Summæ, si punctum m sit intermedium inter δ & π : Differentiæ, si secus.) Adeoque ipsarum $\delta\pi$ quadrata, $\delta\pi q = \frac{n^2 + 2nF + F^2}{L}T$.

Cum

PROP. XXXII. De Calculo Centri Gravitatis. 563

Cum itaque Quadrata rectarum punctis π insistentium (señionis Fig. 218. planum ipsi π insistentis complementum,) puta π^2 sint (per prius ostensa) $\delta Oq - \delta \pi q$; erunt ipsa, $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T$; (Nempe;

$2nF$ cum signo $-$, si m sit intermedium; cum signo $+$, si secus.) Ubi S^2 & t^2 sunt series Æqualium; $2nF$, series Primanorum; $b^2 - n^2$, series Secundanorum.

Et quidem 1° , sit π parallela ipsi CM asymptotæ: Adeoque I. (propter $\delta m = \delta M$), $b^2 = n^2$, se mutuo perimentes.

Quo casu; si sit etiam $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, (existente scilicet π in A vel a ; adeoque $CA = C\pi$;) his item se perimentibus mutuo, solum superest $\frac{2nFT}{L}$, & quidem cum signo $+$: (Nam, posito π in A vel a , non potest punctum m intermedium esse inter δ & π , quin π erit extra Solidum:) seu (propter $n = b$), $\frac{2bFT}{L}$; seu (propter

$$S^2 = \frac{F^2}{L} T, \text{ adeoque } F^2 = \frac{L}{T} S^2, \text{ \& } F = S \sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2} T \sqrt{\frac{L}{T}} =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{LT}, b T \sqrt{\frac{T}{L}}, \text{ series Primanorum; (ut quadrata ordinati-}$$

tim-applicatarum in parabola.) Adeoque quæ rectæ π , per verticem A vel a transeunti, utrivis Asymptotarum parallelæ, insistit Sectio, est Parabola. Cujus vertex, π ; Axis interceptus, $\pi\pi$

$$= Cm = \sqrt{C\delta q + \delta M q} = \sqrt{b^2 + \frac{T}{L} b^2} = b \sqrt{\frac{L+T}{L}}:$$

$$\text{Latus-rectum, } \frac{2FT}{\sqrt{L^2 + LT}}; \text{ vel (propter } F = \frac{1}{2} \sqrt{LT},) T \sqrt{\frac{T}{L+T}}.$$

$$\text{Sin (manente } \pi \text{ parallela } CM \text{ asymptotæ) punctum } \pi \text{ sit extra}$$

solidum (ultra A vel a), adeoque $\frac{F^2}{L} T$ majus quam S^2 : Erit etiamnum $2nF$ seu $2bF$ cum signo $+$, (quippe posito π extra Solidum, non poterit m intermedium esse, quin π etiam erit extra solidum:) Et $\pi^2 = S^2 + \frac{2bF - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{2bF}{L} T -$

$$\frac{F^2 T - S^2 L}{L}, \text{ series Primanorum multata serie Æqualium: Adeoque,}$$

$$\frac{F^2 T - S^2 L}{L}, \text{ series Primanorum multata serie Æqualium: Adeoque,}$$

$$\frac{F^2 T - S^2 L}{L}, \text{ series Primanorum multata serie Æqualium: Adeoque,}$$

Cccc

&

Fig. 218. & hic, sectio erit Parabolâ; sed cujus vertex sit non in κ , sed (ubi $\kappa\pi$, intrando, curvam secat) in V; & κ , in axe continuato extra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{L^2 - LT}}$: Verticis distantia $\kappa V = \frac{2F^2 - SL}{4F} \sqrt{\frac{L+T}{L}}$.

Si autem (manente $\kappa\pi$ parallelâ CM asymptotæ) punctum κ sit intra solidum, (sive inter A & C, sive inter C & a,) erit C κ minor quàm CA; adeoque $\frac{F^2 T}{L}$ minus quàm S^2 : Potestque m vel m intermedium esse inter δ & π (nempe si $\kappa\pi$ sumatur citra CM,) vel (si ultra) non esse: adeoque $2nF$ seu $2hF$, vel signo —, vel signo + affici. Adeoque $\pi^2 = S^2 - \frac{F^2 T}{L} + \frac{2hF}{L} T$; series Æqualium, illic mulctata, hic aucta, serie Primanorum: utrobique, sectio erit Parabolâ, & κ in axe intra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{L^2 - LT}}$; & verticis distantia $\kappa V = \frac{SL - 2F^2}{4F} \sqrt{\frac{L+T}{L}}$; illic sursum, hic deorsum.

Omnis itaque Solidi hujus sectio, plano Asymptotæ parallelo facta; est Parabola, verticem habens in rectâ $\kappa\pi$ illo puncto quo Curvam genitricem secat.

K. 2°. Si Cm cui parallela est $\kappa\pi$, non sit ipsa CM asymptota, sed Fig. 219. quæ obliquius secet solidi Axem C δ ; sumpto scilicet puncto m inter δ & M: erit n minus quàm h .

Quo casu, si sit $S^2 = \frac{F^2 T}{L}$, adeoque C κ = CA, sumpto scilicet κ in A vel a: His ita se perimentibus mutuò, erunt $\pi^2 = \frac{h^2 - n^2 + 2nF}{L} T$, quadrata ordinatim applicatarum in oppositis hyperbolis, (utpote series Secundanorum, mulctata vel aucta serie Primanorum;) quarum quidem axis transversus κV est extra solidum, vertices habens in eadem Curva genitrice: Signa verò — + respicient, hoc unum; illud, reliquum verticem.

Idem accidet, si sit S^2 minus quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque κ extra solidum: nisi quòd jam κ non erit in verticum altero, sed in axe transverso alicubi intra

PROP. XXXII. De Calculo Centri Gravitatis. 565

intra vertices. Quippe tum $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T$, hoc Fig. 219.

est, $\frac{b^2 - n^2}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L} + \frac{2nFT}{L}$, erit series Secundanorum mulctata serie Æqualium, mulctata vel aucta serie Primanorum. Qui etiam est Locus ad Hyperbolam: Cujus Axis est ipsa π , verticisque illius ea puncta quæ sunt in curva genitrice.

Si S^2 majus sit quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque π intra solidum: erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{S^2 L - F^2 T}{L} + \frac{b^2 - n^2}{L} T + \frac{2nFT}{L}$; series Secundanorum aucta serie Æqualium, & mulctata vel aucta serie Primanorum; adeoque Sectio, oppositæ Hyperbolæ: Ipsaque π earundem Axis si curvam genitricem secet, vertices habens in ipsis intersectionibus, vel, si curvam illam non secet, Axis conjugatus.

Omnis igitur hujus Solidi sectio, plano facta quod obliquius secat axem solidi, quam eam secat Asymptota, sunt Oppositæ Hyperbolæ.

3°. Si C in cuius parallela est π , minus obliquè secet axem solidi quam Asymptota CM , adeoque sit in punctum intra M & O : erit Fig. 220.

π majus quam b : rectaque π oppositas curvas genitricis secabit. Quo casu, si $S^2 = \frac{F^2 T}{L}$, posito scilicet π in A vel a , (cum non possit in cadere inter δ & π ,) erit $\pi^2 = \frac{b^2 - n^2 + 2nF}{L} T$; hoc est, $+\frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T$; eritque sectio, Ellipsis; cujus Axis πV , & verticum alter in π , reliquis in opposita hyperbola.

Si verò π sit extra Solidum; adeoque S^2 minus quàm $\frac{F^2 T}{L}$; (nec possit in cadere inter δ & π ;) Erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T$; hoc est, $+\frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$; Sectio item Ellipsis erit, cujus axis & ipsa π , sed neuter verticum in puncto π , quod est in axe continuato extra Ellipsin: Verticesque in illis rectæ π punctis quibus oppositas curvas genitricis secat.

Sin S^2 majus quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque π intra solidum, erunt $\pi^2 =$
C c c c 2 S^2

Fig. 220. $S^2 + \frac{b^2 - n^2 + 2nF - F^2}{L} T = \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T + \frac{S^2 L - F^2 T}{L}$

Sectioque Ellipsis erit; cujus axium alter est ipsa π recta, punctumque π in neutro verticum, sed in axe illo intra ellipsin, cujus vertices sunt in eis ejusdem punctis quibus oppositas curvas genitricis AO, a o, secat.

Omnis itaque hujus Solidi sectio, plano facta quod ad Axem solidi minus obliquum sit quam est Asymptota; est Ellipsis; vel saltem (si rectum sit ad axem) Circulus.

M.
Fig. 214. Solidi hujus Centrum Gravitatis quod spectat; si totum spectemus, æqualiter utrinque continuatum, non est quod ambigamus in ipso C centro positum esse; propter tum δCA totius axem (in quo propterea Centrum gravitatis situm esse liquet, ex prop. 5. hujus;) tum Circuli planum A a, quod tum axem tum solidum etiam ita dividat ut singulæ segmenti unius particulæ; singulis alterius respectivè sumptis, æquiponderent; utpote æquales, & æqualiter utrinque remotæ; quare & in hoc etiam plano situm esse constat, per prop. 3. vel 4. hujus: adeoque in ipso C puncto quod est utrique commune.

Si verò alterutrum segmentum consideremus; puta O A a o, à dividente plano A a quantumlibet continuatum, vel hujus etiam segmenta quælibet planis ipsi A a parallelis abscissa, vel interjecta: Hic etiam rem facile obtinebimus.

Cum enim, verbi gratiâ, in Plano C A O δ , fig. 214. cujus conversione circa C δ axem, istiusmodi semisolidum formatur; rectarum δO quadrata (quibus & circuli his radiis descripti sunt proportionales)

sint, (per § A.) $S^2 + \frac{T}{L} b^2$, vel $\frac{1}{4} T^2 + \frac{T}{L} b^2$, hoc est, series Æqua-

lium aucta serie Secundanorum: Sintque (per prop. 1. hujus) T^2 idem atque T^2 (in altitudinem) H ductum, seu HT^2 , & omnia $\frac{1}{4} T^2 = \frac{1}{4} HT^2$: atque omnia b^2 , idem atque $\frac{1}{3} H^3$; & omnia

$\frac{T}{L} b^2 = \frac{T}{3L} H^3$: Erunt omnia $\frac{1}{4} T^2 + \frac{T}{L} b^2 = \frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$, (po-

sito, H pro $DO = b$ maximo:) Solidumque conversione vel Semi-conversione factum, ad hanc quadratorum summam, ut Circulus vel Semicirculus ad quadratum radii. Adeoque ad Cylindrum æque altum cujus basis æquetur Circulo radii DO maximi, ut $\frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$ ad $\frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{L} H^3$, seu ut $\frac{1}{4} LT^2 + \frac{1}{3} TH^2$ ad $\frac{1}{4} LT^2 + TH^2$

Hoc est, & $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$.

N. Sed & rectarum, adeoque & quadratorum aut circulorum δO , à CA distantia, sunt ut b arithmeticè proportionales: Adeoque (verbi

PROP. XXXII. De Calculo Centri Gravitatis. 567

(verbi gratia) quadratorum δ O momenta respectu C A, sunt totidem $\frac{1}{4}T^2b - \frac{T}{L}b^3$ (sumptis b arithmetice proportionalibus usque ad H maximum;) Adeoque (per prop. 1. hujus) omnium (sive quadratorum sive circulorum) in suis locis suspensorum Momentum, ad momentum totidem maximo æqualium in distantia maximâ suspensorum, ut $\frac{1}{8}T^2H^2 - \frac{T}{4L}H^3$ ad $\frac{1}{4}T^2H^2 - \frac{T}{L}H^3$; hoc est $\frac{1}{2}LT^2 - \frac{1}{4}TH^2$ ad $\frac{1}{2}T^2 - \frac{1}{4}TH^2$, seu $LT - \frac{1}{2}H^2$ ad $2LT - 8H^2$.

Cum itaque Magnitudinum ratio sit, ut $3LT - \frac{1}{4}H^2$ ad $3LT + 12H^2$; & Momentorum ratio, $LT - \frac{1}{2}H^2$ ad $2LT + 8H^2$; sitque Momentorum ratio ex rationibus Magnitudinum & Distantiarum composita: erit Distantiarum ratio, (hoc est, distantie Centri gravitatis a C A, ad distantiam totam seu altitudinem figuræ,) ut $3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4$ ad $6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4$ vel (abbreviando per $LT - \frac{1}{4}H^2$) ut $3L7 - 6H^2$ ad $6L1 + 8H^2$.

$$\frac{3LT + 4H^2}{3L1 + 12H^2} \cdot \frac{LT + 2H^2}{2L1 + 8H^2} = \frac{3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4}{6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4} = \frac{3L7 + 6H^2}{6L1 + 8H^2}$$

Adeoque (cum in Axe Solidi situm esse certum sit,) erit in Axe sic diviso.

Verbi gratia, si ponantur $L = T = H$: Erit ut $3 + 18 + 24 = 45$, ad $6 + 32 + 32 = 70$; seu, ut $3 + 6 = 9$, ad $6 + 8 = 14$; hoc est, ut 9 ad 14: Sic, Solidi Centri gravitatis (in C δ siti) à C distantia, ad totam C δ . Atque similiter judicandum erit (mutatis mutatis) quæcunque ponatur ipsorum L, T, H , ad invicem ratio.

Quæque hic de Magnitudine & Centro gravitatis Solidi Erecti, ejusve rectâ Portione ipsi A a plano adjacente dicta sunt: ad Scalena facile transferuntur; (posito A loco H pro figuræ altitudinæ;) Atque ad segmenta duobus utcumque planis plano A a parallelis interjecta, utpote quæ sunt duorum ipsi Plano A a adjacentium, vel Summa vel Differentia.

SCHOLIUM.

Atque hic tandem pedem figo; neque hoc De Calculo Centri-Gravitatis Caput ulterius produco. In quo si quispiam causetur me satis aliquando perplexum fuisse; utut id non negem, perplexo (siquod

(siquod aliud) subjecto imputandum erit. Nec dubito quin, qui intricatissimam rerum traditarum naturam intelligunt, me satis dilucidè pro subjectâ materiâ tradidisse, existimabunt; nec speraverint forsan carius hoc olim ab aliis traditum iri. Si cui nimis fuisse videar; (utut ego is sim qui de hoc omnium maximè conqueri debeam, qui incredibilem intricatissimi calculi laborem, ne dicam infinitum, sustinui solus:) qui tamen multiplicem rerum traditarum copiam perpendit, atque succinctam tradendi methodum; facile pro me sponsor erit, me, pro tantâ materiæ varietate, etiam brevem fuisse: Dum ea, unico hoc capite, tradi videat, quæ, si, aliorum quorundam exemplum sequutus, in longum protrahere velim, ad ipsa satis volumina, neque pauca, materiam altatim suppeditarent. Contra vero, si quis istiusmodi alia non pauca adungi potuisse queratur, quæ tanquam omissa desiderat: neque ego hoc negaverim, (neque id mihi in animo fuit, sic omnia undecunque corradere, ut nullum superesset sequenti spicilegium:). Addo tamen, etiam ea forsan ipsa, quæ tanquam desiderata causantur illi, si rite animum adverterint, ita universaliter tradi perspiciant, ut nihil ultra desit, quàm ut, universaliter tradita, ad particulares casus applicentur: Saltem eas hic methodos tradi, quæ si ad quæsitâ particularia accommodentur, etiam alia innumera, quæ hætenus pro difficilibus fuerint habita expedire poterunt.

Superfunt adhuc plura ad hanc, quæ præ manibus est, *De Mechanicis*, sive *De Motu* doctrinam spectantia: Sed preli moras atque difficultates jam expertus, hæc interim pramittenda iudicavi, dum *Partem Tertiam*, jam inchoatam, absolvant operæ.

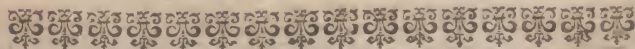
FINIS PARTIS SECUNDÆ.

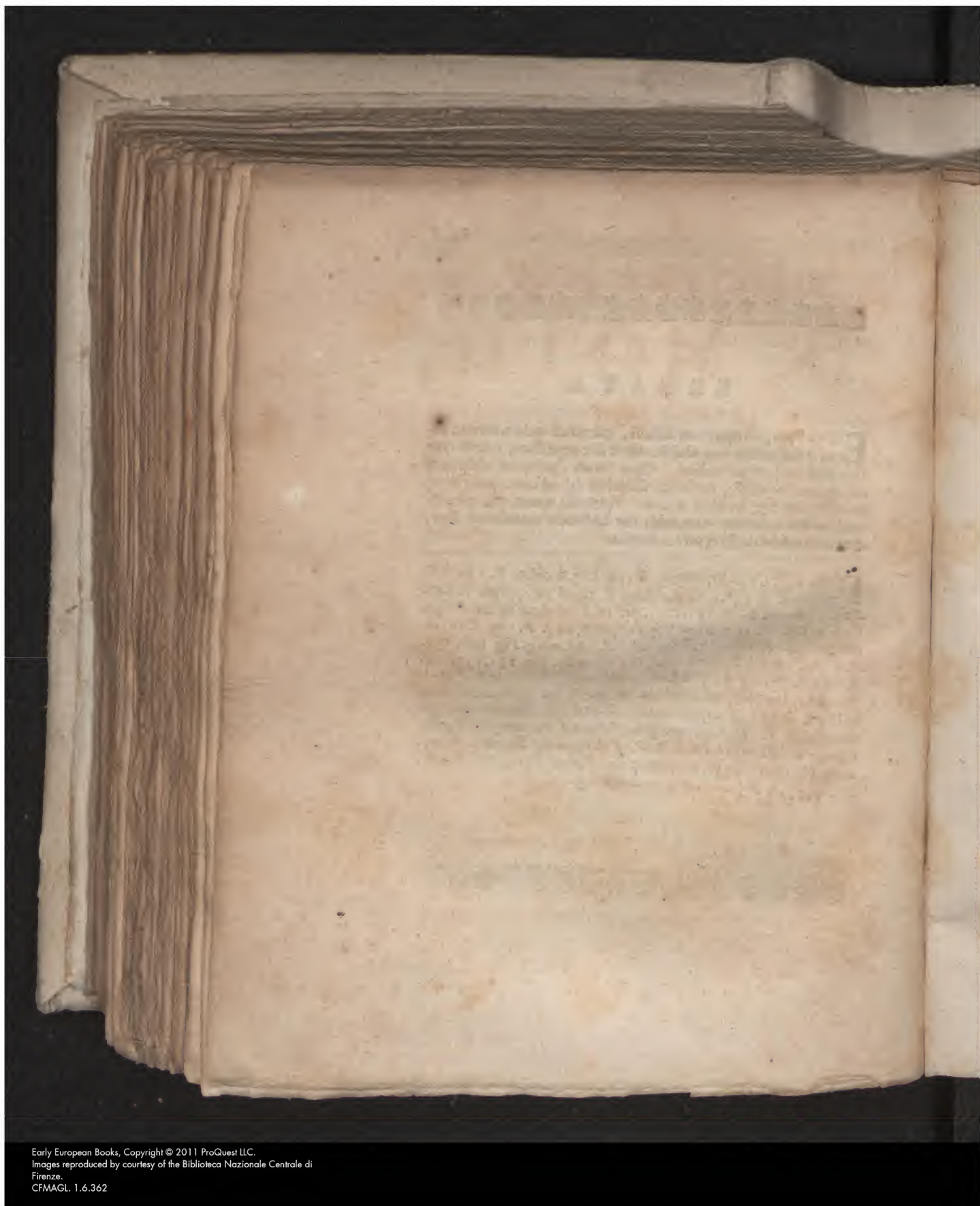


ERRATA.

Errata Preli, in opere tam difficili, mirum est quin occurrant aliqua; sed summa cura adhibita est ut sint paucissima, saltem quæ Calculum aut Sensum turbent. Opus totum (postquam absolutum est) accurate recensere, totumque Calculum (quod tamen putaverim) iteratò examinare, nondum vacavit. Nonnulla tamen quæ animadverti menda quomodo emendanda sint Lectorem monendum duxi, cætera vel emendabit ipse, vel condonabit.

PAg. 123. l. 15. Æquilibrii. P. 125. l. 25. incedat. P. 139. l. 6. notantur. P. 142. l. 32. duo Axes. P. 144. l. 12. quæ ex. P. 146. l. 19. Cuborum se- P. 151. l. 23. per 26. l. 26. datur ipsum. P. 154. l. 16. n. DP. P. 159. marg. Fig. 127, 128, 129. P. 160. l. 16. interceptarum. P. 162. l. 5. usque ad. P. 166. marg. Fig. 129, 131. P. 170. l. 16. dele si. l. 26. illis. P. 173. marg. Fig. 131, 133, 134. P. 175. marg. Fig. 127, 128, 129, 131, 133. P. 184. l. 28. $\frac{1}{2} s - 2$. P. 186. l. 25. plusquam infinitum. P. 191. l. 16. prismatici similiter inclinati. P. 207. l. 13. quadratorum. P. 210. l. 30. Semicirculo. l. 32. Semicirculi. P. 212. l. 32. marg. S. P. 224. l. 22. marg. S. P. 229. l. pen. 2 s3. P. 233. l. 18. $-\frac{1}{2} e R^2$. P. 239. marg. Fig. 163. P. 249. marg. Fig. 164. P. 251. l. 35. prop. 27. P. 252. l. 32. $\frac{1}{2} e^2 R$. P. 254. l. 9. $+\frac{1}{12} s^2 v P -$. Cætera nondum perlegi.





MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore JOHANNE WALLIS S.S. Th. D.
Geometriæ Professore *saviliano* in Celeberrima Aca-
demia OXONIENSI; Regalis Societatis LONDINI, pro
Scientiæ Naturali promovenda, Sodali; & REGIÆ
Majestati à Sacris.

PARS TERTIA.

IN QUA,

*De Veste; aut unico, aut binis pluribusve Ful-
cris sustentato.*

De Axe in Peritrochio, cum Potentiis cognatis.

De Trochleâ, seu Polyspasto.

De Cochleâ.

*De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis,
& Projectorum.*

De Percussione.

De Cuneo.

De Elastere, & Resilitione seu Reflexione.

De Hydrostaticis, & Aeris Æquipondio.

Variisq; Quæstionibus Mechanicis.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid; Impensis Mosis Pitt, ad Insigne
Albi Cervi in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXXI.

DE MOTU
MACHINARUM

TRACTATUS

IN QVO
DE MOTU
MACHINARUM
TRACTATUR

LIBER PRIMUS

DE MOTU
MACHINARUM

IN QVO

DE MOTU

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

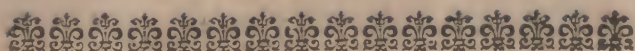
TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR

IN QVO

TRACTATUR



MECHANICORUM,

SIVE

Tractatus DE MOTU.

PARS TERTIA.

AD LECTOREM MONITIO.



Ur Partem hanc Tertiam, (ut prius Secundam,) tanquam ex abrupto inchoemus; continuatis tum Capitulum, tum Figurarum, Numeris: Ad Partem Secundam jam dictum est: Nempe, ut Citationes commodius peragantur.

Dddd

CAP.



CAP. VI.

De Vecte.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Vectem (nota significationis in usu vulgari) hic consideramus, tanquam Lineam Rectam Inflexilem, Ponderibus vehendis, sustinendis, vel levandis accommodatam: Ponderisque vel nullius, vel saltem aequabilis. Græcis *μοχλὶς* dicitur.

II.

Fulcrum (Græcis *ὑπομόχλιον*) illud est quo Vectis sustinetur: Vel etiam super quo, tanquam immobili, movetur.

VECTIS nomen, a *Vehendo* dici videtur, (ut *vector*, *vectio*, *vectura*, *vestigal*, *convexum*, *vexo*, *vexillum*, quæque his cognata sunt;) eumque præsertim ipsius usum respicere, quo Bajuli (seu *Palangarii*) utrinque adhibiti, *Vecti* (*Palanga* itidem dictæ) impositum Onus *vehunt*; Aut etiam (quod eodem recidit) quo Vectis, Trabs, seu Tignum, Fulcris utrinque sustentatum, incumbens Grave sustinet.

Vox Græca *μοχλὶς*, sive à *μόχθος* labor, molestia, sive (ut *ὀχλεῖν* ejusdem significatus) ab *ὀχλεῖν* moveo, dicatur; alterum potius Vectis usum respicit (quem Mechanici potissimum tractant) quo, unius Fulcri ope, Vis alteri Vectis extremo applicata, reliquo impositum Grave, facilius sublevar: Quo respicit & nostratum vox *Leaver*, tanquam a *levando* dicta, quod nostri dicunt *to lift*, vel etiam *to heave*, (quasi à *veho* diceretur inversis literis;) unde & nostratum vox *Heaven*, Cœlum denotans; tanquam *Elatum*, *Altum*, *Elevatum*; (quomodo

(quomodo & Caelum *convexum* dicunt Poetæ.) Eodem sensu nautæ, speciatim de Anchorâ sublevandâ, dicunt *to swell the Anchor*, hoc est, Anchoram sublevare, atque *invehere*; (cui contrarium est *to cast the Anchor*, hoc est, projicere.)

A *μολις* dicitur *μολαία*, quod primâ significatione est *veste moveo*, (unde ad alia etiam molimina transfertur;) atque hinc Latinorum *molior*, *molimen*, *moles*, *molestia*, &c. dici videntur; nisi quis hæc à *moveo* dicta malit.

Nos, utrumque Vestis usum respicientes, quo & Vehendis seu sustinendis ponderibus, & Levandis etiam accommodatur; utrique definitionem accommodavimus.

Quod autem, à *μολις*, *ὑπομόχιον* dicunt Græci (utpote quod Vesti subiacere solet,) Latinis *Fulcrum* dicitur, quod à *Fulcio*, *fulsi*, *fulsum*, formatur eadem analogiâ quâ à suis Verbis, eorûmve Supinis, formantur alia; nam prout à *lavatum*, *simulatum*, *ambulatium*, *involutum*, *sepultum*, formantur *lavacrum*, *simulacrum*, *ambulacrum*, *involacrum*, *sepulcrum*, (& siqua sunt similia) à *fulsum* formabitur *Fulcrum*. Sed & à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum*, etiam *Fulcimen* dicitur, & *Fulcimentum*, eodem significatu. Significat autem vel illud immobile super quo moveri Vestis intelligitur, ubi submovendis ponderibus adhibetur; vel bina illa (sive plura sint) fulmina, quibus utrinque incumbens Trabs, seu Vestis, fulcitur seu sustinetur: Prout scilicet vel unico, vel binis (pluribûsve) Fulcris Vestis sustinetur.

III.

Applicationum puncta, Centrum Æquilibrii, aliâque hujusmodi, si ubi hic occurrunt, eodem sensu intelligenda erunt quo suprà de Librà, definitum est.

Sic, (Fig. 221.) A B, Vestis; O, Onus levandum seu submo- Fig. 221.
vendum, vel etiam Obex amoliendus; V, Vis motrix adhibita;
B, punctum applicationis ponderis; A, punctum applicationis Vis
motricis; F, Fulcrum quo sustinetur; cujus apex C est Centrum mo-
tus, Axique Libræ respondet; Onûsque & Vis motrix, oppositis ad
Libram Ponderibus respondent.

Item, (Fig. 222.) A B Vestis, duobus fulcris seu bajulis F, F, susten- Fig. 222.
tatum; O pondus seu onus impositum.

Vestem autem tanquam rectam lineam (sed non flexilem) eadem
ratione hic habemus, quâ Libram suprà sic habuimus: Quoniam
Dddd 2 tanquam

tanquam nullius ponderis æstimatur. Et siquid, reverâ ponderis habeat, id vel oneri movendo, vel Vi motrici, vel partim huic partim illi, (pro vario situ) accensendum erit.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Vectis, (unico fulcro Oneri & Viribus intermedio nixus,) tanquam Libra consideretur; quæ de Librà supra dicta sunt, eadem & Vecti accommodantur.

Fig. 221. **P**Ultà, si Vectis A B, Fulcro sustineatur in C, atque applicentur Onus in B, & Vis in A, (utraq; deorsum prementia;) Vis & Onus contra-ponderant; (seu invicem contra nituntur,) hoc est, Vis deorsum in V, elevat O. per 1. Cap. 3.

Item, tantundem simul gravant seu premunt Fulcrum, quantum est utriusque simul (cum ipso Vecte) Vis (dum suspensum onus in quiete libratur;) per 2. Cap. 3. dumque est in motu, quantum per 16. Cap. 3. determinatur.

Item, tantundem utrumque suum afficit seu gravat applicationis punctum, cui vel directè imminet, vel directè subest, (vel ipsum, vel ejus Centrum gravitatis,) atque si in ipso esset applicationis puncto. (Quod & alibi perinde obtinet.) Per 30. Cap. 2. vel 4. Cap. 3. & 16. Cap. 4.

Item, in ea ratione valent (Vis agendo, & Onus resistendo,) quæ ex rationibus Graduum (puta Ponderum & Virium,) & Distantiarum punctorum applicationis à Fulcro seu Centro motus (cæteris paribus;) per 12. Cap. 3.

Item, si Vis (sic æstimata) oneri præpolleat; movebit: Si minus, non movebit. per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad fulcrum sit Onus O, & Vis V remotius, eo minori Vi majus movebitur Onus. per 12. Cap. 3.

Item, si, propter curvatum Vectem (quem rectum supponimus;) vel (quod eodem recidit) propter Centrum motus extra ipsum Vectem, (hoc est, extra rectam applicationum puncta jungentem;) vel

vel propter non easdem Oneris & Virium Directiones; vel aliàs undecunque, contingat; pro vario Vestis situ, inæquales subinde futuras esse motuum (Oneris & Virium motricium,) Obliquitates: Eadem hic anomalix contingent, quæ de Libra ostenduntur, prop. 14. Cap.

Aliæque de Librà tradita, etiam de Veste intelligenda erunt. Vestis enim Libra est; & Fulcri vertex, est Libræ Axis, seu Centrum Motûs: Onûsque & Vis Motrix, sunt ut Pondera utrinque Libræ applicata. Adeoque quæ illic de Libra universaliter demonstrantur; speciatim Vestis conveniunt.

S. C H O L I U M.

NOtandum interim est, quamquam Vestium præcipuus usus esse soleat ad onera in altum levanda, (quem itaque vocabula horum accommodata potissimum respicere videantur;) tamen eadem omnino ratio est, mutatis mutandis, Vestium in alio situ adhibitorum, ad quoscunque obices amoliendos; (eademque & hic demonstratio.) Fig. 223.
Putæ, si, in situ horizontali, Vestis AB, firmiori fulcro F ad dextram posito nixus, adhibeatur (vi in A applicatâ) ad amoliendum obicem O ad sinistram positum; aut ad fores ibidem perfringendas; aliudve huiusmodi perficiendum. Eodem modo; si fulcro F, superne Fig. 224. posito, adhibeatur AB vestis, quo Clavus superne fixus subducatur, vi adhibita in A quæ sursum præmat. Et sic alibi.

Dico autem, *firmiori Fulcro F.* Nisi enim satis firmum sit Fulcrum; Manente O, movebitur F, (ut fiat O fulcrum, & F mobile; de quo in Propositione sequente dicendum erit.) Sicut &, nisi vestis AB sit satis firmus; frangetur vestis AB, vel curvabitur. (Quæ & alibi similiter intelligenda erunt.)

Et quidem sic aliquando inter plura distribuitur motus, ut in ambiguo sit, quod Fulcrum dicatur, quod Mobile. Sic in Navium Remis; dum Vis Manubrio applicatur, Palmula Aquæ ut Fulcro innixa, Scalmum cum conjunctâ Nave submover: Verum, cum neque ita firmum fulcrum sit Aqua, quin & ipsa nonnihil pressa cedat; ratione motûs huius, Scalmus pro Fulcro erit, eritque Aqua pro Mobili: Sed &, cum neque Remus ipse tam validus aut firmus sit, quin Electatur nonnihil seu Incurvetur, (etiam cum non frangitur;) tertius hinc oritur motus: Qui quidem tres motus se minuunt invicem. Quippe Aquæ Cessio, & Remi Flexio, motui Navis nonnihil demunt, qui major esset si non adessent illæ; sicut ex adverso, Motus Navis, eademque Remi Flexio, Cessione Aquæ; duoque motus reliqui, Flexioni

Flexioni Remi nonnihil demunt: Adeo quidem ut Vis eadem adhibita, quæ jam flectit, si nec Aqua cederet, nec submoveretur Navis, Remum frangeret. Et simile esto in aliis iudicium.

Fig. 225,
226.

Sed & nonnunquam gemini Vectes, decussatim positi, eidem communi Fulcro nitantur. Ut in Forficibus, & Forcipibus, ad interjectum obicem vel scindendum vel comprimendum adhibitis. Ubi duo Vectes A B, $\alpha\beta$, communi fulcro F nixi, (adhibitâ vi in A, α), comprimunt interjectum obicem O; & quidem eo fortius, quo vel O propius est ad F, vel A α inde remotius,

Quæ autem ad hanc propositionem monemus; etiam in sequentibus obtinent.

Possent quidem hæc omnia deduci, ex prop. 4, 5, 6. Cap. 2. (ubi fundamenta jacta sunt pro Machinarum omnium viribus æstimandis:) Cum autem id de *Libra* jam factum sit, Cap. 3. potius duxi, ea quæ de *Libra* dicta sunt, ad Vectem hic transferre, propter similes utrobique affectiones ab iisdem principiis deductas.

PROP. II.

Si Onus, Vecti applicatum, Fulcro & Vi motrici interjaceat: Quæ de *Libra* traduntur, etiam huc faciliè transferentur. Aut etiam, si Vis Fulcro & Oneri interjaceat.

Fig. 227. **N**Empe; Si ad A B vectem, inter Vires in V, & Fulcrum in F, applicetur Onus in O: Vis sursum in V, secundum directionem suam procedens, elevat O contra directionem suam; (propter inflexilem A B:) Adeoque contra-nituntur vis & onus. Per 1. Cap. 3.

Fulcrum verò non utrâque vi premitur (vi scilicet oneris, & vi motricæ,) quia vis motrix non est deorsum, nec Fulcro impeditur (ut in casu propositionis præcedentis;) sed sursum: Sed neque toto Onere premitur F, sed auxilio virium in V partim sublevatur. (Cui consonum occurrit ad prop. 18. Cap. 3.) Quantam autem oneris partem sustinet F, determinandum erit ex iis quæ post tradentur de Vecte duobus Fulcris sustentato.

Sed

Sed & hic in eâ ratione valent, Vis sursum nitendo, & Onus reintendo, quæ ex rationibus Graduum, & Distantiarum puncti applicationis à Fulcro, componitur. per 11 & 12. Cap. 3.

Atque si Vis (sic æstimata) præpolleat; submovebit Onus: Secus; non movebit. Et quidem si minus polleat, ne sustinebit quidem. Per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad Fulcrum sit Onus, vel Vis remotior; eò minore Vi movetur majus Onus. Quippe sic Oneris Vis minuitur, Vis motrix augetur.

Quæque ad Prop. præcedentem, ex prop. 14. Cap. 3. notantur: etiam hic locum habent.

Eadem fere omnia dicenda veniunt, si Vis V, Fulcro & Oneri intercedat. Hoc saltem interest, quod Fulcrum jam superne ponendum erit; & minus Onus, non nisi majore Vi elevabitur: Sed neque tam Onere premitur Fulcrum, quam Virium parte. Fig. 228.

PROP. III.

Si (ad Vectem cum unico Fulcro applicatorum) ratio Vis motricis, ad Onus, major sit quam reciproca distantiarum (punctorum applicationis) à Fulcro; Vis Onus movebit: Secus; non movebit: Si minor; ne sustinebit quidem.

$$\begin{array}{r} n \quad m \\ m \quad n \\ \hline mn = nm \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \\ \hline 6 = 6 \end{array}$$

Verbi gratia. Si Vis Motrix ad Vim Oneris, sit ut 2 ad 3; seu n ad m , Fig. 229, sique distantia VF ad OE, ut 3 ad 2, seu ut m ad n : Æquæ pollebunt quidem Vires (propter $2 \times 3 = 3 \times 2$, seu $mn = nm$;) illarum valores sunt utique (ut jam ostensum est, ad prop. 1 & 2.) illarum valores in ratione ex graduum & distantiarum rationibus compositâ. Adeoque, nondum movebit. Sed si Vis motrix vel tantillum augeatur, aut minuatur Onus: Vis præpollebit, adeoque movebit Onus. Sin mi-
nuatur

mutatur Vis, vel Onus augeatur; Vis Onus ne sustinebit quidem, per 9, & 11. Cap. 1.

Demonstratio perinde valet, siue Onus ultra fulcrum intelligatur; ut in fig. 229. siue citra; ut in fig. 230. Aut etiam (ut in fig. 231.) si Vis utrique intercedat; nili quod, hoc casu, Vis motrix semper major esse debeat quam Vis Oneris (propter minorem à Fulcro Distantiam) quò possit Vis Oneris æquipollere; sicut, ex aduerso, ubi Onus citra Fulcrum est (Vi motrici & fulcro interjectum) Vis motrix minor, majori Vi ponderis, æquipollet; (propter minorem Oneris à Fulcro Distantiam:) Ubi autem Fulcrum intermedium est, potest utrumvis contingere.

PROP. IV.

Datum Pondus, datâ Vi, Vecte movere.

$$\begin{array}{cccccc} n & m & nV & mO & 2V & 3O \\ m & n & mD & nD & 3D & 2D \\ \hline nm = mn & mnDV = mnDO & 6DV = 6DO \end{array}$$

Fig. 229. Intelligatur vis V , oneri O , æquipollere, sitque expositum Onus mO (quod utique sit ad O ut m ad 1;) & nV vis exposita, (puta quæ sit ad V , ut n ad 1;) sitque onus mO , vi nV movendum. Si Vectis AB (fig. 229) ita dividatur in puncto F , (quod Fulcro incumbat,) ut sit AF ad FB , ut m ad n ; Vis nV in A adhibita, Oneri mO applicato in B æquipollebit; per 3. hujus. (Propter rationem virium ad onus, n ad m , reciprocam rationis distantiarum m ad n ; adeoque, quæ ex utrisque componitur, momenti ad impedimentum rationem æqualitatis, per 6. Cap. 1.) Si itaque, vel tantillum ad Fulcrum versus admoveatur Onus, (quo minuatur Impedimentum,) vel inde remotius applicetur vis (quo Momentum augeatur,) vel denique Fulcrum tantillum promoveatur ad Onus (quo utrumque fiat,) Momentum Impedimento præpollebit, & Vis exposita (sic adhibita) expositum Onus movebit. Per 9 & 11. Cap. 1.

Fig. 230, Idem fiet, si Vectis AB ita in O dividatur, ut sit AB ad OB ut
231. m ad n . Quippe tum, posito Fulcro in B , æquipollebit vis nV in A ,
ponderi

ponderi m O in O ; (propter Vis & Oneris à Fulcro distantis ipsis reciprocas ;) Adeoque si vel Fulcrum Oneri , vel Onus Fulcro , tantillum admoveatur , vel remotius applicetur Vis ; hæc Oneri præpollebit , adeoque movebit. Quippe tribus saltem hisce modis (ne plures nominem) augebitur ratio distantiarum A F ad O F.

Pater autem , in hac posteriori via , si Vis Oneris major sit quam Vis morrix ; debere Onus Fulcro & Vi Motrici intercedere , ut in Fig. 230. Si Vis Morrix Vi Oneris major sit , potest Vis illa Fulcro & Oneri interponi , ut in Fig. 231. Verùm ubi hoc contingit , Vecte non opus erit ; quippe Vis Motrix , Oneri immediatè applicata , movebit Onus.

PROP. V.

Si Vectis (Tignum, Palanga, seu Trabs oblonga,) situ Horizontali jacens, utroque sui extremo Fulcris sustineatur : Fulcra bina sustentia, onus inter se partiuntur ; idque in ea ratione quæ est reciproca distantiarum suarum à Vectis Centro gravitatis : Et quidem utrumvis eam totius portionem sustinet quæ ad totum eam habeat rationem, quam habet contrarii Fulcri distantia ad distantiam totam, seu Vectis longitudinem.

Adeoque, si Vectis, vel Trabs illa, sit æquabiliter gravis ; & propterea Centrum gravitatis habeat in media longitudine ; (aut etiam, si hoc propter aliam causam contingat ;) Onus inter se æqualiter partiuntur.

Si verò Centrum gravitatis in mediâ longitudine non sit : Fulcrum illud magis premitur cui propius est Centrum gravitatis ; atque in ea ratione quæ hac propositione determinatur.

Idemque valet, si Vecti ubivis applicetur Ponderis quodvis. Nempe, si Ponderis præcisè Vectis medio applicetur ; æqualiter ab utroque Fulcro sustinetur. Si non in ipso medio, in eâ ratione premitur, ab incumbente

E e e e

bente

bente Pondere, utrumvis Fulcrorum, quæ est reciproca distantiarum suarum à puncto applicationis. In ea verò ratione ad totum Pondus absolute considerata, qua est contrarii Fulcri Distantia (à puncto applicationis ponderis) ad Fulcrorum ab invicem Distantiam, seu Vectis longitudinem.

Si autem in pluribus punctis, plura applicentur Pondera; de singulis seorsum simile fiet iudicium (nempe, quantam partem cuiusque Ponderis, utrumvis ferat Fulcrum;) atque inde de omnibus simul sumptis. Vel etiam (quod eodem recidet) ibidem omnia applicata censeantur, ubi est commune omnium Centrum gravitatis.

Fig. 232. **E**ſto duobus Fulcris in A & B, Vectis AB sustentus; cuius Centrum gravitatis sit O punctum medium: Vel (quod eodem recidit, per prop. 16: Cap. 4.) Intelligatur AB Vectis tanquam linea recta nullius ponderis, quæ in sui puncto medio O, onusta intelligatur totius Vectis (Tigni seu Trabis) pondere, cuius Centrum gravitatis ibidem esse intelligatur: Vel denique (nam & hoc tantundem valet) Vectis puncto medio O, intelligatur Pondus quodlibet applicatum. Dico utrumvis Fulcrum semisse totius Ponderis onerari; adeoque Fulcra duo totum onus æqualiter inter se partire.

Manifestum utique est, Onus fulcro A incumbens, tantum esse, quanta Vis est quæ ibidem foret necessaria huic sustinendo oneri, si (manente fulcro B) fulcrum A abesset. (Quippe tantum Onus est, quanta Vis est quæ sustinendo sufficit: per prop. 11. Cap. 1. vel prop. 18. Cap. 2.) Hoc est, (propter distantiam AB, duplam distantiam OB,) quæ dimidio Oneri æquipollet, (per prop. 3. hujus.) Idemque similiter ostendetur de Fulcro B. Adeoque totum onus æqualiter inter se partiuntur duo Fulcra A, B. Quod ostendendum erat.

Fig. 233. Si verò Punctum O (quod sit vel totius Vectis seu Trabis Tigrive aut Palangæ Centrum gravitatis, vel punctum applicationis impositi Ponderis) non sit in ipso Vectis puncto medio: Utcunque tanto Onere premitur fulcrum A, quanta Vis est quæ huic ibidem sustinendo par esset, si abesset A fulcrum: Hoc est, (per prop. 3. hujus,) quod sit, ad totum Pondus, in ea ratione quæ est reciproca distantiarum AB, OB; hoc est, ut OB ad AB. Et similiter ostendetur eo onere præmi fulcrum B, quod sit ad Pondus totum, in ratione reciproca distantiarum

tiarum B A, O A; hoc est, ut O A ad eandem A B. Et propterea (ob eundem utrobique consequentem) onera fulcrorum A, B, sunt ad invicem, ut O B ad O A; hoc est, in reciproca ratione suarum (ab applicationis puncto) distantiarum. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin plura applicentur Pondera, puta alterum in O, alterum in I: Fig. 234. Similiter ostenderetur, Fulcrum A, eam partem ponderis O sustinere, quæ sit ad totum ut O B ad A B; eamque partem ponderis I, quæ ad totum sit ut I B ad A B: Et Fulcrum B, eam sustinere ponderis O partem, quæ sit ad totum, ut O A ad B A; eamque partem ponderis I, quæ sit ad totum ut I A ad B A.

Vel etiam si per prop. 27. Cap. 4. quæraturre commune simul-utriusque Centrum gravitatis; atque ibidem utraque censeantur tanquam unum Pondus applicari: Hujus eam partem sustinebit utrumvis fulcrum, quam indicant reciproca distantia; (per modò demonstrata) Tantundem utique gravant utcumque applicata pondera atque si ibidem essent ubi est commune omnium Centrum gravitatis: per prop. 16. & 27. Cap. 4.

S C H O L I U M.

Dico autem disertè, *In situ Horizontali jacens.* Quamquam Fig. 235. Denim de hac conditione prorsus tacere soleant Mechanicorum Scriptores (quantum scio, Omnes:) rationem onerum ad A & B, eandem assignent in Obliquo Vectis situ, quam assignant in situ Horizontali: Est tamen onerum, alia plane ad invicem ratio, in hoc, atque in illo, situ. (Ut ex dicendis ad prop. 8. patebit.) Quod quidem eousque verum est, ut, prout alterutrum Vectis extremum A altius elevatur, ita continuo minuatur Onus; donec tandem, Vecte ad situm perpendicularem redacto, Fulcrum A nihil prorsus oneris sustineat, sed B totum. Quod in erigendâ prælongâ Perticâ, vel Scalâ, facile quis deprehendat.

Eccc 2

PROP.

PROP. VI.

Hinc sequitur; Ita posse ad eundem Vectem (duobus Fulcris sustinendum, vel duobus Bajulis ferendum,) applicari Pondus; ut unius Fulcri (seu Bajuli) onus, ad onus reliqui, eam habeat rationem quam quisque velit.

Fig. 233. **P**Utà, si Gigas & Infans (seu Fulera firmitudinum utcumque inæqualium) adhibeantur (ille quidem in B, hic in A,) eidem portando oneri, imponendo Vecti AB: quod ita moderandum sit ut ferentium viribus iustâ proportionem consulatur: Id fiet, si ita dividatur, in O, vectis AB, ut sit distantia BO ad OA, ut sunt vires A ad vires B. Quippe, tum erunt Onera Viribus proportionalia: per præced. Sed ipsius Vectis hic nulla habetur ratio.

PROP. VII.

Inde etiam Calculo colligetur; Quanta cuique Vectis puncto Firmitas requiratur, ne rumpatur.

Fig. 233. **E**xempli gratia. Vectis AB, duo segmenta BO, OA, firmitate conjunctionis suæ in communi O puncto, impediuntur ne rupto Vecte ruant. Tanta igitur conjunctionis firmitudo ibidem requiritur, quanta si disjuncta essent vis fulcri foret necessaria utriusque segmenti extremo sustinendo. Si autem, disjunctione in O factâ, supposito Fulcro sustinendum esset utriusque segmenti extremum; onerandum foret (per prop. 5. hujus) fulcrum illud, tum semisse ponderis BO (propter Vectem BO, duobus fulcris in B & O sustentum;) tum semisse ponderis OA, (ob similem causam:) Hoc est, semisse totius AB. Tanta itaque firmitudinis Vis in O requiritur, ne Vectis suo pondere rumpatur.

Intelligatur deinde, eidem O puncto (præter ipsum Vectis seu Trabis pondus) imponi vel suspendi pondus aliud quantumvis. Manifestum est onerandum fore subiectum fulcrum illud, tum semisse totius

totius AB, (ob causam jam dictam,) tum toto onere Ponderis ibidem incumbentis. Tanta itaque Vectis firmitudo ibidem requiritur, quæ simul utrique (sui semissi, & toti ponderi imposito) æquipolleat.

Intelligatur demum proponi punctum quodvis aliud expendendum (extra punctum applicationis appenli ponderis) ut I. Manifestum est, si disjunctione ibidem factâ supponendum esset in I Fulcrum, onerandum fore fulcrum illud (ob causam modò dictam) tum semisse ponderis B I, tum semisse ponderis I A, (hoc est, semisse totius BA,) tum etiam (per prop. 5. hujus) ea parte oneris O (inter B & I suspenso) quæ sit ad totum ut BO ad BI; (atque similiter, si plura adhuc pondera sive inter B & I, sive inter I & A, imponi aut suspendi intelligantur, de singulis fiet judicium; adeoque, additione factâ, de omnibus:) tanta itaque firmitas in I requiritur quæ oneribus illis æquipolleat. Atque sic alibi, prout res tulerit.

S C H O L I U M.

Atque hinc, in re Architectonicâ, facienda erit æstimatio, quam Attabis cujusque partem oporteat forriorem facere, prout imponendi oneris & disponendi ratio postulaverit.

PROP. VIII.

Si intelligatur Vectis obliquo situ positus; Fulcrum elatius, eam totius Oneris impositi partem sustinebit, quæ sit ad totum, in ea ratione quæ componitur ex ratione Distantiæ Oppositi Fulcri ab applicationis puncto, ad totam Fulcrorum ab invicem Distantiam; &, ratione quam habet ad Radium Sinus rectus istius anguli quem cum recta ad horizontem perpendiculari facit Vectis; seu Co-sinus inclinationis Vectis ad horizontem: Reliquumque oneris sustinebit inferius fulcrum.

Nempe (in fig. 236.) Oneris O eam partem sustinet Fulcrum A, quæ sit ad totum ut B ω ad BH; B verò, quæ est ω H ad BH. Adeoque Onus Fulcri A, ad Onus Fulcri B, ut B ω ad ω H.

Intelligatur

Fig. 236. **I**ntelligatur enim Veſtis $AB = R$, ſitu ad Horizontem Obliquo poſitus, fulcris A, B , ſuſtentus; cui applicetur, in O , pondus quodvis; Veſtem dirimens in duo ſegmenta, $AO = a$, & $OB = b$. Maniſteſtum eſt (per demonſtrata ad prop. 5.) Onus fulcri elatioris A , tantum eſſe, quanta Viſ eſſet eidem ibidem ſuſtinendo neceſſaria, ſi (manente fulcro B) abeſſet A fulcrum. Hoc eſt; propter rectæ AB diſiſionem in O ; in ea ratione ad totum pondus, quæ eſt diſtantiarum BO ad BA , ſeu b ad R : per prop. 2. hujus, vel prop. 7. Cap. 2. & prop. 11. Cap. 3. Sed & porro; propter Obliquum ſitum ad Horizontem, adeoque Obliquum Deſcenſum ſi (manente B) moveretur A , (puta in arcu AH , cujus Tangens AT ;) in ea ratione quam ad Radium habet Sinus rectus anguli quem facit Veſtis cum perpendiculari, vel Coſinus anguli Inclinationis ad Horizontem: per prop. 13. Cap. 3. vel prop. 21. Cap. 2. Hoc eſt Ab ad BA ; ſeu Ob vel B ad BO ; puta ut s ad R . Adeoque; propter ſimul utramque cauſam; in ea ratione quæ ex utriſque componitur; s ad R , & b ad R ; hoc eſt, ut $s b$ ad R^2 : Seu ex BO ad BO , & BO ad BA ; hoc eſt, ut BO ad BA , ſeu B ad BH .

Adeoque Oneris reliquum quod ſuſtinet B fulcrum, eſt ad totum, ut H ad BH .

Et propterea Onus fulcri A , ad Onus fulcri B , ut B ad H . Quæ erant demonſtranda.

Hic nota; rectam Ba (Coſinum anguli inclinationis ABH) in eadem ratione ſecari in a , qua ſecatur BA in O .

SCHOLIUM.

Fig. 236. **C**auſa diverſæ rationis in Obliquo Veſtis ſitu, ab ea quæ eſt in ſitu Horizontali; hinc oritur, quod, manente B fulcro, fulcrum A impedit tantummodo Rotationem puncti O circa B centrum, quæ in hoc ſitu æquipollet Obliquo Deſcenſui ſecundum tangentem OT , (per prop. 15. Cap. 2.) non deſcenſui recto in recta OO .

Fig. 235. Fulcrum verò B , (ut in fig. 235.) impedit, non tantum Rotationem ipſius O circa centrum A ; ſed etiam ejuſdem Deſcenſum Obliquum ſecundum rectam AOB , cui fulcrum A non obſtat. Nam, niſi obſtaret B fulcrum, poſſet, manente fulcro A , non modo punctum O circa A rotari, ſed etiam totus AB Veſtis deorſum labi; adeoque punctum O ferri in motu compoſito ex motu Rotationis & motu Veſtis Labentis, cui utrique obſtat Fulcrum B .

Si verò intelligatur Veſtis AB , non tantum fulcro A inniti, (quod impediatur

impediatur rotatio,) sed & (ut fig. 237.) cum illo sic ligari, aut unco Fig. 237.
aliasve sic conjungi, ut, etiamsi B abesset, non posset alias, quam circa
A rotando, moveri punctum O: alia prodibit ratio. Quippe jam
fulcra A, B, obliquum lapsum secundum AB rectam æqualiter im-
pediunt: rotationem vero impediunt in oppositarum distantiarum ra-
tione.

Sed & porro; si intelligatur, non modò A fulcrum, sed & ful- Fig. 238.
crum B, sic esse comparata, ut non impediunt obliquum illum se-
cundum rectam AB Descensum (quia si intelligatur AB Vectis ex-
tremo tantum fulcri B angulo incumbere:) labetur Vectis simul cum
annexo pondere, descensu illo obliquo. Rotationem verò impediunt
in ea ratione Fulcra quæ est Oppositarum Distantiarum; (quæ con-
tinuè variabitur prout O propius ad B feretur.) Totumque quod
inter se partiuntur Onus, non est totius Ponderis impositi, sed ea pars
totius quæ determinanda erit ex diminuto descensu in obliqua recta
OB (fig. 235.) præ eo qui esset in O perpendiculari (fig. 236.) juxta
leges prop. 17. & 21. Cap. 2. traditas. Puta, quæ sit ad totum, ut (in
fig. 42.) PR ad PF, propter obliquum descensum in FB recta:
hoc est (in fig. 236.) ut BO — O ad BO.

Si verò, (fulcro B id permittente,) intelligatur Vectis AB, ful- Fig. 239.
cro A sic suspendi (aliasve cum illo sic connecti) ut hoc solo impedi-
diatur Vectis AB, ne secundum AOB rectam descendat; (fulcro B
nonnisi rotationem circa A impediante:) erit onus fulcri B, ad onus
totius ponderis impositi in ea ratione, quæ ex s ad R , & a ad R ,
componitur; hoc est, ut s ad R^2 , (quod similiter de B probabitur,
atque supra probatum erat, in casu propositionis, rationem oneris A,
esse ad totum, ut s ad R^2 ;) reliquumque oneris sustinebit A.

Denique; si intelligatur Fulcri B facies superior horizontalis, sic Fig. 240.
ab omni asperitate lævigata, ut quamvis non permittat Vecti descensum
per AOB rectam, permittat saltem ut Vectis extremum B (verbi
gratia) in horizontali recta HB labetur, (neque huic obstat aliqua
connexio cum A fulcro,) unde aliqualis saltem descensus puncto O
permittatur: minus propterea premetur fulcrum B, propter descen-
sum non penitus impeditum. Idem verò est quod prius fulcri A
Onus; sed quod continuò variabitur, partim Auctum (propter situm
Vectis minus obliquum) partim Diminutum (propter majorem ratio-
nem distantie AO ad OB) prout Vectis extremum B remotius in
HB recta retro lapsum fuerit; dummodò (quod hic intelligendum
erit) Vectis pars O A intelligatur ultra A quantum opus fuerit pro-
longata; secus enim, retro labente extremo B, alterum A fulcrum
suum deferet, nec eo sustinebitur. Et

Et quidem ſimiliter, mutatis mutandis, in aliis caſibus judicandum erit, quos omnes ſigillatim proſequi nimis moleſtum eſſet.

PROP. IX.

Si pluribus Fulcris (Veſtium invicem commiſſarum ope) ſuſtineatur impoſitum Pondus; Onus cujuique, prout ſingulorum ſitus poſtulaverit, calculo æſtimabitur, cui ferendo par eſſe debet ne fatiſcat.

Fig. 241. **E**xempli gratia: Si tribus Veſtibus ſeu Tignis, AO, BO, CO , in communi O puncto firmiter conjunctis, impoſitum pondus O , tribus fulcris in A, B, C , ſuſtineatur. Maniſeſtum eſt, ſi ABC ſit triangulum æquilaterum, ſique O in Trianguli medio, æqualiter à ſingulis angulis remoto; Onus hoc inter tria Fulcra (ob ſimilem omnium ſitum) æqualiter diſtribui; adeoque quodlibet Fulcrum trientem totius Oneris ſuſtinere.

Si ſecus fuerit; ſingulorum tamen Onus ſic habebitur. Intelli-gatur (verbi gratia) Veſtis AO continuari, donec in D occurrat rectæ BC . Cùmque fulcri A id unicum munus ſit, ut impediatur Oneris O rotatio circa BC rectam (ut ex prop. 1. Cap. 4. liquet;) perinde eſt (quantum ad fulcrum A) ſive id fiat ope continuati Veſtis AOD , in ejuſdem BC rectæ puncto D ſuffulti, ſive fiat ope duorum BO, CO : Utrovis enim modo eadem præciſè Rotatio impeditur. Si vero id fiat (ſublatis fulcris B, C) ope continuati Veſtis AOD (ſuppoſito Fulcro ipſi D puncto;) erit Oneris A , ea pars totius quæ ſit ad totum ut OD ad AD ; per prop. 5. hujus. Tantundem itaque erit, ſi, ſublato D , fulcris B, C , idem obtrineatur. Atque ſimiliter oſtendetur, (continuatis BO ad E in recta AC , & CO ad F in recta AB , onus fulcri B , eam eſſe totius O partem, quæ ſit ad totum in ratione OE ad BE ; onusque fulcri C , ad totum, ut OF ad CF : Cujuscuſque formæ fuerit Triangulum ABC .

Et ſimili modo procedendum erit, prout res poſtulaverit, quocun-que Fulcris quomodocunque ſitis, ſuſtineri intelligatur Pondus O . Quippe id ſemper proſpiciendum erit, Quam Rotationem impediat quodlibet Fulcrum; & quidem, Num Unum aliquod an Plura id præſtent. Quippe ſi Plura ſint; utut unum eorum non ſati valeat Oneri ſuſtinendo, tamen ſi ſimul omnia (ſuis cujuſque Viribus ritè compu-ratis) ferendo Oneri ſaltem æquipolleant; Onus ſuſtinebitur.

Porà;

Putà; ſi non tantum in A, B, C, (ut modò) ſed & in G, H, I, intelligantur Fulcra; (cæteraque conſtructa ut in fig. 242.) Quo- Fig. 242.
rum reſpectivæ Vires ſunt a, b, c, g, h, i .

Stantibus Fulcris A, B, vel A, G, B; non aliter Descendendo movebitur Pondus O, quàm circa A B rectam rotando, (ut modò oſtenſum eſt ex prop. 1. Cap. 4.) Huic autem obſtant Tria Fulcra C, H, I. Quorum quidem C, Pondus in O ſuſtinebit, quod ad Vires ſuas ſit ut CF ad FO; puta $\frac{CF}{FO} c$: per 2 vel 3 hujus: (tantundem utique

eſt, acſi continuata Veſtis C O F, fulcrum haberet F, in ea recta A B circa quam facienda eſſet Rotatio.) Similiter Fulcrum H, ſuſtinebit

Pondus in O, quod ſit ad Vires ſuas, ut HA ad HO; puta $\frac{HA}{AO} h$.

Et Fulcrum I, ſimiliter Pondus in O ſuſtinebit quod ſit ad Vires ſuas ut IL ad LO, puta $\frac{IL}{LO} i$. Si itaque totum Pondus O (ſimpliciter

conſideratum) majus non ſit quam $\frac{CF}{FO} c + \frac{HA}{AO} h + \frac{IL}{LO} i$; valebunt hæc tria Fulcra C, H, I, onus in O ſuſtinere ne circa A B rotetur. Sin majus fuerit Pondus O, quàm ut dictum eſt, fatiſcent Fulcra C, H, I, ponderi ſuſtinendo imparia.

Similiter; Stantibus Fulcris A, C, ſeu A, I, C; non deſcendet O, niſi circa A C rectam rotando. Huic autem obſtant Tria Fulcra

B, G, H. Quorum, Fulcrum B, ſuſtinebit $\frac{BE}{EO} b$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO} g$:

Fulcrum H, $\frac{HA}{AO} h$: (ut ex modò dictis, & Schematis inſpectu

patet.) Si itaque majus non ſit Pondus O, quàm $\frac{BE}{EO} b + \frac{GC}{CO} g +$

$\frac{HA}{AO} h$; ſatis valebunt B, G, H, Fulcra, Oneri ſuſtinendo ne circa A C rotetur: Si ſecus, fatiſcent.

Item; Stantibus Fulcris B, C; non deſcendendo movebitur O, niſi circa B C rectam rotando. Huic verò obſtant Quatuor Fulcra,

A, G, H, I. Quorum A, ſuſtinebit (per ante dicta) $\frac{AD}{DO} a$: Fulcrum

G, $\frac{GC}{CO} g$: Fulcrum H, $\frac{HD}{DO} h$: Fulcrum I, $\frac{IK}{KO} i$. Si itaque ma-

ffff

jus

jus non ſit Pondus O, quàm $\frac{AD}{DO}a + \frac{GC}{CO}g + \frac{HD}{DO}b + \frac{IK}{KO}i$; ſatis valebunt Fulcra A, G, H, I, ne circa BC rotetur O: ſi ſecus; ſub onere fatiſcent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, inſtituetur Calculus, quotcunque fuerint Fulcra, & quomodocunque ſita.

S C H O L I U M.

NOtandum hic, (quo rectius intelligantur omnia,) Onus ſeu Pondus quod intelligitur ad punctum O applicari; & Veſtibus A O, B O, &c. invicem compactis ſuſtineri; poſſe vel Tabulatum eſſe (gravatum vel non gravatum incumbente aut dependente pondere quovis alio) vel aliud quodvis Grave coharens; cujus ſaltem Centrum gravitatis vel ſit in ipſo O puncto, vel huic directe ſubſit aut immineat: per prop. 18. Cap. 2. & prop. 16. Cap. 4.

* Item Veſtes, A O, B O, &c. non ſemper alios eſſe ab ipſo onere; ſed vel ipſius Tabulati ſeu Gravis rectas, vel imaginarias ſaltem rectas à ſuis reſpective Fulcris ad O pertingentes, & prout opus fuerit continuatas, ſecundum quas Fulcrorum A, B, &c. diſtantias tum ab O onere, tum ab oppoſitis reſpective Fulcris imaginariis in Axe Rotationis, æſtimemus. Neque aliud innunt, quàm quod Gravis partes ita ſint inter ſe ſat firmiter coherentes ut puncti O, ab ipſis A, B, C, &c. diſtantiis, eadem maneant: ſive id fiat totidem rectis inde in O coeuntibus ibique connexis, ſive per curvos circuitus, aliàſve, id fiat.

Fulcra verò, quæ punctis A, B, C, &c. ſuppoſita intelligimus; conſiderantur ſolummodo ut Fulcra, non item ut Retinacula: impeditia ſcilicet ne quod illis imponitur ibidem Descendat, non autem ne inde Aſſurgat. Adeoque, utut Fulcrum H (verbi gratia) intelligatur impeditivum Rotationis circa B C, (quoniam non deprimitur O, niſi depreſſo H;) non tamen intelligitur Fulcrum G, impeditivum rotationis circa A B, quoniam ut hæc fiat rotatio (descendente O) non fiet Fulcri G depreſſio, ſed ſurſum aſſurget quod illi incumbit, cui Fulcrum non obſtat.

Si verò, quod huic impoſitum eſt, non tantum ſubjecto fulcro incumbat, ſed cum eo ita connexum ſit ut nonniſi rupta copulâ poſſit aſſurgere; (aliòve quovis Retinaculo, aut Impedimento, vel onere ſuperimpoſito idem eveniat:) Hoc quicquid eſt Retinaculi, Impeditivum erit Rotationis circa A B, fulcrisquæ C, H, I, ſuppetias feret: (quippe,

(quippe, stante recta AB, non poterit O descendere nisi ascendente Gravis puncto G; propter rectam OG quam supponimus inflexilem, seu totum Grave ita compactum ut non luxetur; per Schol. prop. 1. Cap. 4.) Cujus quidem Retinaculi vires si ponantur r ; sustinebunt illæ, pondus in O, quod sit ad r , ut GF ad FO, (per prop. 1. vel

3. hujus,) puta $\frac{GF}{FO}r$. Adeoque jam, non modò, si O non sit majus

quàm $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}b + \frac{IL}{LO}i$; (ut priùs;) sed si majus non sit

quàm $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}b + \frac{IL}{LO}i + \frac{GF}{FO}r$: Satis valebunt Fulcra

C, H, I, unà cum Retinaculo in G, impediendæ rotationi Oneris O circa AB. Simileque erit in reliquis judicium.

Rotationes autem nonnisi Tres in Calculo consideravimus; nempe circa AB, AC, BC: non quòd plures esse non possint, (ut circa AG, GB, &c.) sed quoniam instituto sufficiant hæ tres; in quibus considerandis Fulcrorum omnium vires sub calculo veniunt. Quippe si saltem tria puncta, (ut A, B, C,) intra quæ sit ipsum Grave ejusve Centrum gravitatis O, satis sustineantur, (live suis singula fulcris, ut in fig. 241. live cum succenturiatorum subsidiis, ut in fig. 242.) totum sustinebitur Grave: per prop. 1. Cap. 4.

PROP. X.

Contignationem planam ex Tignis multò Brevioribus
quàm sit Area Latitudo invicem conjunctis construere:
Et computo æstimare, Quantum cuique Juncturæ
Onus incumbat.

Contignationis seu Tabulati Constructio.

Potest quidem hoc variis modis fieri. Eam verò formam præ Fig. 243.

cæteris seligendum putavi, quam jam olim Anno 1644. *Cantabrigia* primum delineabam, in Collegio *Reginensi*, in quo tum temporis *Socius* eram: & quam non ita multò post Tigillis ligneis construendam curabam, (quò manifestius indicarem Theoriam posse in Praxin reduci:) eamque in Vesperis Comitiorum *Oxonia* Anno 1652. (postquam ad munus illud quod etiamnum sustineo vocatus eram)

F f f 2

eram) solenni Prælectione exponebam; ejusque Calculum Vesperis Comitiorum Anni sequentis, 1653. similiter explicabam: Quamque ex eo tempore tum Nostratum tum Exterorum non pauci satis approbarunt, aliqui etiam imitati sunt: Quam & Serenissimus Rex noster, CAROLUS Secundus, post auspiciatum suum in Angliam reditum, oblatam sibi Octobr. 18. 1660. inter Καμήλια sua dignatus est reponere.

Specimen exhibet Areæ quadratæ, cujus Latitudo est fere quadrupla longitudinis Tignorum longissimorum; quæ ita sunt invicem intertextæ, ut se mutuo sustineant. Et quidem, quo supra planitiem non assurgant, quâ parte tignum quodvis aliud sibi supernè impositum sustinet (quod sui partibus intermediis fit) supernè (ad mediam quasi partem) excavatur: quâ parte verò aliè impositum sustinetur, (quod in sui extremis fit) tantundem quali excavatur inferne: quò fit, ut, sibi mutuo impactæ, aream planam faciant. Si tamen metuendum videatur, ut, propter ligni naturam flexilem partes mediæ, onere pressæ, nonnihil subsidant: huic incommodo cavebitur, si excavationes non præcisè ad mediam tigni crassitiem pertingant, sed paulo citra medium desinant. Quippe, hoc pacto, assurgat paululum in singulis juncturis contignatio, quò compensetur illa exigua depressio quæ ex curvaturâ oriatur.

Fig. 244. Faciem lateralem Tigni Longioris, exhibet fig. 244. Brevioris, fig. 245. Facies superna in ipsa fig. 243. satis apparet.

Fig. 243. Quo autem ordine disponantur; ex Schematis intuitu (fig. 243.) facilius intelligatur, quam possit multis verbis explicari.

Videre enim est, si ab Extremis ordiri libeat, totam Aream Muro circumseptam; vel etiam (si quis id malit) Muri loco, totidem quot opus erit Columnis, quibus imponantur Trabium live Tignorum exteriora Capita. Quorum capita altera, introrsum spectantia, Tignis aliis imposita sustinentur; atque horum porro, ab aliis; atque hæc ab aliis; & sic deinceps donec ad oppositos muros perveniatur.

Verbi gratia, Tigni S &, extremum alterum muro sustinetur, alterum tigno & Z: Hujus alterum extremum muro itidem sustinetur, reliquum tigno QP. Sed & tigni UY, extremum alterum muro sustinetur; reliquum eodem QP tigno. Hujus verò QP sed & tigni ON, extrema altera tigno SR, altera tigno KI sustinentur. Atque horum item extrema (uti videre est) tignis alteris superimposita sustinentur; horumque alteris, & sic porro, prout ex inspecto Schemate luculentius patet quam ut multis verbis explicatum opus sit.

Si;

Similiter, ſi à medio libeat ordiri, quodlibet Tignorum AB, ut & tignorum CD, ſuſtinentur alteris extremis in altero AB, alteris in tigno EF: atque huius item, ut & tigni LM, extrema altera tigno GH, altera tigno NO: atque horum, aliis; & ſic porro uſquedum ad muros perveniat; ut ex Schemate liquet.

Notandum interim, eàdem methodo, aream iſtiusmodi conſtrui poſſe vel ex paucioribus, vel etiam ex pluribus tignis; ſed & in alia formâ, (puta oblongâ non minùs quam quadratâ;) prout res poſtularerit.

Verbi gratia; poterit ibidem continuus Murus collocari, ubi jam habentur Tigna SR, VU, & S; aut ubi Tigna & Z, ML, PQ; quo area reddatur minus lata, ut paucioribus tignis à muro in murum perveniat: idque eoſque ut non niſi *Quaternis* tignis opus ſit, ut in fig. 246. Vel etiam (quæ eſt forma omnium ſimpliciſſima) *Ternis* tignis; ut in fig. 247.

Verùm etiam, ſi id opus erit, poterunt tigna XR, WV, (cæteraque quæ reliquis breviora ſunt, atque hic in muro terminantur,) ad parem cum reliquis longitudinem protrahi, tignaue ſecunda (iſtis SR, VU, parallela, & extra hæc poſita) ſuſtinere; eorumque ſic protractorum extrema, vel muris (extra promotis) ibidem tranſeuntibus ſuſtineri, vel etiam (ampliata adhuc areâ) tignis aliis, (iſtis ML, PQ, parallelis;) atque ſic porro prout opus videbitur.

Hoc autem ne in infinitum protrahi poſſit, impediunt, non tam rationes Mathematicæ, (quæ in contrarium non eunt,) quàm Materiæ Phyiicæ conditio. Quippe in protractâ areâ, auctâ Tignorum multitudine, augetur Onus; donec eò tandem perveniat, ut majus evadat, quàm ut, quæ ſuſtinendo paria ſint, Tigna conquiri poſſint, quæque ſub tanto onere non fatiſcant & rumpantur.

Quoſque autem tutò liceat hac ratione procedere; ex calculo faciendâ eſt æſtimatio. Quippe ſi conſtet tum quanto oneri ferendo ſufficiant Tigna quæ adhibenda veniant; (quod periti Architecti, experimento docti, docebunt;) tum quantum oneris, prout ſitûs ratio poſtulat, cuique Tigno ferendum imponatur; (quod calculus indicabit;) hinc optimè fiet iudicium, quid tutò fieri poſſit. Qui quidem calculus, in tignis numero paucioribus, faciliùs inſtituetur; operoſius autem in pluribus.

Quò autem quâ methodo fieri poſſit oſtendam; expoſitæ contiguationis juncturas ſingulas calculo ſubjici; perplexo quidem, propter tignorum multitudine; ſed qui in paucioribus tignis multò citius ad exitum perveniſſet.

Calculus

Calculus, expoſita Contignationi accommodatus.

Fig. 243. Quò Calculus (Synopſi ſequente tradendus) rectius intelligatur; notandum eſt (quod oculi iudicium ſatis indicabit,) Tignorum alia aliis longiora; atque ita quidem ut longiora ſint breviorum quaſi ſeſquialtera. Et propterea, cum Tigni cuiuſque ex longioribus ponpus designemus ſymbolo T ; cuiuſque ex brevioribus ſymbolum erit $\frac{2}{3}T$.

Onus autem cuique Tignorum juncturæ incumbens, eâ literâ indicatur quam ſibi in Schemate aſcriptam habet ea junctura.

Notandum porro erit; cùm manifeſtum ſit, (Schema vel mediocriter conſideranti,) quaterna ſemper puncta eſſe, quæ (propter ſimilem ſitum reſpectu totius contignationis) æqualiter onerata cenſenda ſint: ea ſemper (ne, præter neceſſitatem, ſymbolorum numerus creſceret, & calculus proinde redderetur multò perplexior,) eiſdem ſymbolis designamus. Unde habeantur quatuor A , (ſimiliter ſita, atque æqualiter onerata,) atque totidem B , & ſic de reliquis.

Cum itaque habetur, verbi gratia, (ad Num. 2. ſeu Æquationem ſecundam,) $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}C + \frac{1}{3}A$; tantundem eſt atque ſi diceretur, ſubjecti Tigni AB , punctum B , (præter eam firmitatem quæ ibidem requiritur ne ſuo pondere rumpatur tignum, quam hæc æquatio non involvit,) tantum onus impoſitum ſuſtinere, quantum eſt tum $\frac{1}{2}T$ (ſemiſſis ponderis incumbentis tigni longioris AB), tum $\frac{2}{3}C$ (beſſis oneris eidem AB tigno impoſiti in C puncto; utpote quod in C , A , punctis triſariam ſectum intelligitur;) tum $\frac{1}{3}A$, (triens oneris eidem AB tigno, in A , impoſiti.) Item ubi habetur (ad num. 21.) $W = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}V$: innuit hoc, Tigni, L M , puncto W , onus impoſitum tantum eſſe, quantum eſt tum $\frac{1}{2}T$ (ſemiſſis incumbentis tigni brevioris, qui idem eſt atque tigni longioris triens,) tum $\frac{1}{2}V$ (ſemiſſis oneris quod incumbentis tigni puncto medio V ſuper imponitur.) Quæ omnia ſingulatim demonſtrantur ex prop. 5. vel 7. huius Capituli. Quod ſimiliter obtinet in Æquationibus primoribus

Æquatio 26. & quæ ſequentur; ex præcedentibus derivantur, (quas per numeros æquationibus illis adſcriptos citavimus, quò dilucidior eſſet totius proceſſus ratio.) Quæ inſerviunt partim ad abbreviandas fractiones, (quoties tum numeratores tum denominatores poſſunt communi aliquo diviſore dividi,) partim verò (& quidem poſſiſſimum) ad reducendas & exponendas æquationes præcedentes (ſubſtituto

stituto symboli alicujus valore, aliis symbolis explicato, (quo, dis-
punctis subinde aliquot symbolis, symbolorum numerus residuorum
sensim minuat, donec tandem unum aliquod symbolorum à prin-
cipio ignotorum, per notam quantitatem T (pondus unius signi
longioris, simpliciter considerati,) exponatur; ejusque demum ope
(repetendo præcedentium aliquot æquationum vestigia) reliquorum
etiam symbolorum (onerum primitus ignotorum) valores innotescant.

Verbi gratia; cum habeatur (num. 1.) $A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C$;
manifestum est (propter A in æquationis utraque parte repertum)
sublato utrinque $\frac{1}{3}A$, superesse $\frac{1}{3}A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C$; hoc est (utrinque
per 3 multiplicando) $A = \frac{1}{2}T + C$; quam itaque æquationem
(num. 26.) habemus, tanquam derivatam ex æquatione prima,
(num. 1.) quam itaque citamus.

Similiter; cum sit (num. 2.) $B = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}A$; sitque (per Fig. 243.
num. 26.) $A = \frac{1}{2}T + C$; adeoque $\frac{1}{3}A = \frac{1}{6}T + \frac{1}{3}C$; erit $B (= \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}A)$
 $= \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C + \frac{1}{6}T + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}T + \frac{2}{3}C = T + C$. Quam itaque æqua-
tionem ($B = T + C$) habemus num. 27. tanquam ex num. 2, 26, deri-
vatam. Et similiter in aliis.

Nonnunquam verò (ut modo dictum est) sola sit Fractionis abbre-
viatio (seu ad minores terminos per communem divisorem reductio.)

Utr, cum (num. 64.) habeatur $H = \frac{6912T + 672G + 552I + 279O}{2907 = 3 \times 969}$;
possintque omnia membra per 3 dividi: habetur, num. 65. (tanquam
ex num. 64. derivata) æquatio, $H = \frac{2304T + 224G + 184I + 93O}{969}$.

Et sic alibi.

Quoniam autem has omnes æquationum reductiones atque abbre-
viations singulatim exponere (prout has paucas exposuimus) Lectori
tædium crearet, (cum illud possit suo Marte quilibet præstare:) con-
tenti sumus omnes unâ Synopsi breviter exhibere; indicatis iis æqua-
tionibus antecedentibus ex quibus quæque immediate dependeat.

Calculi Synopsis.

$$\begin{array}{l} 1 | A = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}C. \\ 2 | B = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}A. \\ 3 | C = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}G + \frac{1}{3}I. \\ 4 | D = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}I + \frac{1}{3}G. \\ 5 | E = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}D. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 | F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D + \frac{1}{3}B. \\ 7 | G = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}E + \frac{1}{3}L. \\ 8 | H = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}L + \frac{1}{3}E. \\ 9 | I = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}N + \frac{1}{3}P. \\ 10 | K = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}N. \end{array}$$

$$11 | L =$$

- 11 $L = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}X.$
 12 $M = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}W.$
 13 $N = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}F + \frac{1}{3}M.$
 14 $O = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}M + \frac{1}{3}F.$
 15 $P = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}Y + \frac{1}{3}Z.$
 16 $Q = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}Z + \frac{1}{3}Y.$
 17 $R = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}O + \frac{1}{3}Q.$
 18 $S = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}O.$
 19 $V = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}H + \frac{1}{3}K.$
 20 $U = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}K + \frac{1}{3}H.$
 21 $W = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}V.$
 22 $X = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}R.$
 23 $Y = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}U.$
 24 $Z = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}\&.$
 25 $\& = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}S.$
 Per Prop. 5. vel 7. hujus Cap.
 26 $A = \frac{1}{2}T + C.$ per 1.
 27 $B = T + C.$ per 2, 26.
 28 $B = \frac{1}{2}T + \frac{1}{3}G + \frac{1}{3}I.$ per 27, 3.
 29 $E = \frac{15T + 5G + 4I}{9}.$ per 5, 28, 4.
 30 $F = \frac{12T + 4G + 5I}{9}.$ per 6, 4, 28.
 31 $W = \frac{7T + 4H + 2K}{12}.$ per 21, 19.
 32 $X = \frac{7T + 4O + 2Q}{12}.$ per 22, 17.
 33 $Y = \frac{7T + 2H + 4K}{12}.$ per 23, 20.
 34 $\& = \frac{7T + 2O + 4Q}{12}.$ per 25, 18.
 35 $Z = \frac{7\frac{1}{2}T + O + 1Q}{12}.$ per 24, 34.
 36 $L = \frac{39T + 8H + 4K + 4O + 2Q}{36}.$ per 11, 31, 32.
 37 $M = \frac{39T + 4H + 2K + 8O + 4Q}{36}.$ per 12, 31, 32.
 38 $P = \frac{39\frac{1}{2}T + 4H + 8K + O + 2Q}{36}.$ per 15, 33, 35.
 1391 $Q =$

$$39 \quad Q = \frac{20T + H + 2K + O + 2Q}{18} \text{ per } 16, 33, 35.$$

$$40 \quad Q = \frac{20T + H + 2K + O}{16} \text{ per } 39.$$

Fig. 243.

$$41 \quad N = \frac{24\frac{1}{2}T + 16G + 2H + 20I + K + 4O + 2Q}{54} \text{ per } 13, 30, 37.$$

$$42 \quad O = \frac{45T + 4G + 2H + 5I + K + 4O + 2Q}{27} \text{ per } 14, 30, 37.$$

$$43 \quad O = \frac{45T + 4G + 2H + 5I + K + 2Q}{27} \text{ per } 42.$$

$$44 \quad G = \frac{213T + 40G + 8H + 32I + 4K + 4O + 2Q}{108} \text{ per } 7, 29, 36.$$

$$45 \quad G = \frac{213T + 8H + 32I + 4K + 4O + 2Q}{68} \text{ per } 44.$$

$$46 \quad H = \frac{48T + G + 4H + 4I + 2K + 2O + Q}{27} \text{ per } 8, 29, 36.$$

$$47 \quad H = \frac{48T + 5G + 4I + 2K + 3O + Q}{23} \text{ per } 46.$$

$$48 \quad I = \frac{65\frac{1}{2}T + 64G + 20H + 80I + 28K + 19O + 14Q}{324} \text{ per } 9, 38, 41.$$

$$49 \quad I = \frac{65\frac{1}{2}T + 64G + 20H + 28K + 19O + 14Q}{244} \text{ per } 48.$$

$$50 \quad K = \frac{294T + 16G + 14H + 20I + 25K + 7O + 8Q}{162} \text{ per } 10, 38, 41.$$

$$51 \quad K = \frac{294T + 16G + 14H + 20I + 7O + 8Q}{137} \text{ per } 50.$$

$$52 \quad G = \frac{1724T + 65H + 256I + 34K + 33O}{8 \times 68 = 544} \text{ per } 45, 40.$$

$$53 \quad H = \frac{788T + 80G + H + 64I + 34K + 33O}{16 \times 23 = 368} \text{ per } 47, 40.$$

$$54 \quad H = \frac{788T + 80G + 64I + 34K + 33O}{367} \text{ per } 53.$$

$$55 \quad I = \frac{5408T + 512G + 167H + 238K + 159O}{244 \times 8 = 1952} \text{ per } 49, 40.$$

$$56 \quad K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 2K + 15O}{137 \times 2 = 274} \text{ per } 51, 40.$$

Gggg

157, K=

Fig. 243.

- 57 $K = \frac{608T + 32G + 29H + 40I + 15O}{272 = 8 \times 34}$. per 56.
- 58 $O = \frac{380T + 32G + 17H + 40I + 10K + O}{23 \times 8 = 184}$. per 43, 40.
- 59 $O = \frac{380T + 32G + 17H + 40I + 10K}{183}$. per 58.
- 60 $G = \frac{14400T + 32G + 549H + 2088I + 279O}{544 \times 8 = 4352}$. per 52, 57.
- 61 $G = \frac{14400T + 549H + 2088I + 279O}{4320 = 9 \times 480}$. per 60.
- 62 $G = \frac{1600T + 61H + 232I + 31O}{480}$. per 61.
- 63 $H = \frac{6912T + 672G + 29H + 552I + 279O}{367 \times 8 = 2936}$. per 54, 57.
- 64 $H = \frac{6912T + 672G + 552I + 279O}{2907 = 3 \times 969}$. per 63.
- 65 $H = \frac{2304T + 224G + 184I + 93O}{969}$. per 64.
- 66 $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H + 280I + 1377O}{1952 \times 8 = 15616}$. per 55, 57.
- 67 $I = \frac{47520T + 4320G + 1539H + 1377O}{15336 = 27 \times 568}$. per 66.
- 68 $I = \frac{1760T + 160G + 57H + 51O}{568}$. per 67.
- 69 $O = \frac{54720T + 4512G + 2457H + 5640I + 75O}{183 \times 136 = 24888}$. per 59, 57.
- 70 $O = \frac{54720T + 4512G + 2457H + 5640I}{24813 = 3 \times 8271}$. per 69.
- 71 $O = \frac{18240T + 1504G + 819H + 1880I}{8271 = 3 \times 2757}$. per 70.
- 72 $G = \frac{13799040T + 46624G + 529920H + 1977152I}{480 \times 8271 = 3970080}$. per 62, 71.
- 73 $G = \frac{13799040T + 529920H + 1977152I}{3923456 = 64 \times 61304}$. per 72.
- 74 $G = \frac{215610T + 8280H + 30893I}{61304}$. per 73.

175, H =

- 75 $H = \frac{6917568T - 664192G - 25389H + 565568I}{969 \times 2757 = 2671533}$ per 65, 71.
- 76 $H = \frac{6917568T + 664192G - 565568I}{2646144 = 64 \times 41346}$ per 75.
- 77 $H = \frac{108087T - 10378G - 8837I}{41346}$ per 76.
- 78 $I = \frac{15487200T + 1400064G - 513216H - 95880I}{568 \times 8271 = 4697928}$ per 68, 71.
- 79 $I = \frac{15487200T + 1400064G - 513216H}{4602048 = 96 \times 47938}$ per 78.
- 80 $I = \frac{161325T - 14584G - 5346H}{47938}$ per 79.
- 81 $G = \frac{9809571420T - 85929840G - 1350472338I}{61304 \times 41346 = 2534675184}$ per 74, 77.
- 82 $G = \frac{9809571420T - 1350472338I}{2448745344 = 162 \times 919 \times 16448}$ per 81.
- 83 $G = \frac{65890T - 9071I}{16448}$ per 82.
- 84 $I = \frac{7247976552T - 658470852G - 47242602I}{47938 \times 41346 = 1982044548}$ per 80, 77.
- 85 $I = \frac{7247976552T - 658470852G}{1934801946 = 18 \times 919 \times 116963}$ per 84.
- 86 $I = \frac{438156T - 39806G}{116963}$ per 85.
- 87 $I = \frac{9829607228T - 361080226I}{116963 \times 16448 = 1923807424}$ per 86, 83.
- 88 $I = \frac{9829607228T}{1562727198 = 4594 \times 340167}$ per 87. Hoc est, ordine Alphabetic.
- 89 $I = \frac{2139662}{340167} T$ per 88.
- 90 $G = \frac{2542709}{340167} T$ per 83, 89.
- 91 $C = \frac{2578443\frac{1}{2}}{340167} T$ per 3, 89, 90.
- 92 $D = \frac{2444094\frac{1}{2}}{340167} T$ per 4, 89, 90.

Fig. 243.

$$A = 9 \frac{27191}{340167} T.$$

$$B = 8 \frac{197274\frac{1}{2}}{340167} T.$$

$$C = 7 \frac{197274\frac{1}{2}}{340167} T.$$

$$D = 7 \frac{62925\frac{1}{2}}{340167} T.$$

Gggg 2

193 B =

Fig. 243.

93	$B = \frac{2918610\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 27, 91.	E = $8 \frac{209186}{340167} T.$
94	$A = \frac{3088694}{340167} T.$	per 26, 91.	F = $8 \frac{51014}{340167} T.$
95	$E = \frac{2930522}{340167} T.$	per 5, 92, 93.	G = $7 \frac{161540}{340167} T.$
96	$F = \frac{2772350}{340167} T.$	per 6, 92, 93.	H = $5 \frac{283977\frac{1}{2}}{340167} T.$
97	$H = \frac{1984812\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 77, 89, 90.	I = $6 \frac{98660}{340167} T.$
98	$O = \frac{189541\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 71, 89, 90, 97.	K = $4 \frac{529646\frac{1}{2}}{340167} T.$
99	$K = \frac{1690314\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 57, 89, 90, 97, 98.	L = $3 \frac{236331\frac{1}{2}}{340167} T.$
100	$V = \frac{2056730}{340167} T.$	per 19, 97, 99.	M = $3 \frac{181326\frac{1}{2}}{340167} T.$
101	$U = \frac{1958564}{340167} T.$	per 20, 97, 99.	N = $7 \frac{37757}{340167} T.$
102	$W = \frac{1141704}{340167} T.$	per 21, 100.	O = $5 \frac{194583\frac{1}{2}}{340167} T.$
103	$Y = \frac{1092671}{340167} T.$	per 13, 101.	P = $3 \frac{50382\frac{1}{2}}{340167} T.$
104	$Q = \frac{879012\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 40, 97, 98, 99.	Q = $2 \frac{198678\frac{1}{2}}{340167} T.$
105	$R = \frac{1726700}{340167} T.$	per 17, 98, 104.	R = $5 \frac{25865}{340167} T.$
106	$S = \frac{1387898}{340167} T.$	per 18, 98, 104.	S = $4 \frac{27230}{340167} T.$
107	$X = \frac{976732}{340167} T.$	per 22, 105.	V = $6 \frac{15728}{340167} T.$
108	$\& = \frac{807228}{340167} T.$	per 25, 106.	U = $5 \frac{257729}{340167} T.$
109	$Z = \frac{517052}{340167} T.$	per 24, 103.	W = $3 \frac{121253}{340167} T.$
110	$I = \frac{1256832\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 11, 102, 107.	X = $2 \frac{296405}{340167} T.$
			111 M=

111	$M = \frac{1201827\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 12, 10, 107.	$Y = 3 \frac{72170}{340167} T.$	Fig. 243.
112	$N = \frac{2418926}{340167} T.$	per 13, 96, 111.	$Z = 1 \frac{176891}{340167} T.$	
113	$P = \frac{1070883\frac{1}{2}}{340167} T.$	per 15, 103, 109.	$\& = 2 \frac{127004}{340167} T.$	

Onera Columnis seu Muris incumbencia, non erat necesse distincto calculo designare; utpote quæ eadem planè sunt quæ eorundem tignorum alteris capitibus conveniunt. Cum enim (verbi gratia) Tignum XR, non nisi in medio sui puncto R oneretur; sustinet utrumvis Fulcrum (tum quod est ad X, tum quod est in Muro,) tum semissem Tigni, tum semissem oneris in R impositi: per prop. 5. hujus.

Pater, ex hoc calculo, juncturas A, medio proximas, omnium maximè urgeri. Utpote quorum onus peculiare, est plusquam *Novem* Tignorum longiorum; (reliquorum verò, minora saltem quam novem:) Cui quidem adhuc addendum erit (per prop. 7. hujus) onus *Unius* tigni pro firmitate debitâ ne suo pondere rumpatur: Atque porro semissem oneris juncturæ B incumbens, (per eandem prop. 7.) paulò plus quam *Quatuor* tignorum. Adeoque (computatis omnibus) firmitas ibidem requisita ne rumpatur tignum, plus quam æquipollet ponderi Tignorum *Quatuordecem*: Nempe $1-19 \frac{27191}{340167}$

$+4 \frac{394549}{1360668} = 14 \frac{503313}{1360668}$: (tigni sui pondere computato.)

Cum itaque nulli dubium esse possit, quin Tigna, etiam satis longa, tantæ firmitudinis esse possint, ut valeant Onus longè gravius in eodem sui puncto sustinere quam est *Quatuordecuplum* sui ponderis: Neque poterit esse dubium, quin hujusmodi Contignatio tuto possit usui accommodari.

Alia Constructionis Forma.

Aliam formam exhibet, Fig. 248. Quæ à præcedente in hoc differt, quod quæ illic duorum Tignorum Capita Tigno tertio incumbunt, ejusdem duobus distinctis punctis applicantur (quibus triariam secatur tignum;) ipsaque Tigna sic suffulta ad easdem partes jacent: Hic, Hic,

Hic, ad idem subjecti Tigni punctum medium applicantur utraque; sed ad contrarias partes.

Fig. 249. Tignorum Faciem Lateralem exhibet fig. 249. Facies superna, in ipsa fig. 248. satis apparet. Sunt autem omnia longitudine invicem æqualia, atque inter se similia.

Fig. 248. Potest autem hæc, ut præcedens, plus minusve continuari prout opus videbitur; atque materiæ conditio ferre poterit. Quippe hic etiam, prout, protractâ areâ, augetur trabium multitudo; sic & augetur Pondus.

Habet autem hæc forma, præ præcedente, hoc incommodum; quod, propter utrumque ponderum incumbentium eidem substrati tigni puncto applicatum, hoc fortius premitur, (utpote quod sustinet utrumque onus integrum; cum, in formâ præcedente, punctum idem sustinuerit onus alterum integrum, alterum dimidium;) sed & propterea etiam eodem loci plus excavandum erit tignum sustinens, quo admittantur utriusque incumbentium capita. Quod quadantenus fortè compensari videatur, propter tigna incumbentia ad contrarias partes posita; quæ, in præcedente forma, jacebant ad easdem partes utraque: Quamquam & hoc non multum interfit; præsertim si incumbentium tignorum capita, non ad subjecti mediam tantum latitudinem, sed usque ad remotiorem marginem, aut etiam ultra, extendantur; quod pro Architecti arbitrio vel fieri potest, vel non fieri.

Sed neque admodum metuendum erit illud incommodum; nam, eo non obstante, satis valere poterunt tigna oneri sustinendo; prout ex subjecto calculo patebit.

Fig. 243. Aspectum quod attinet; præcedens fortè gratior videbitur: tum propter tigna sic disposita ut totius operis textura sit oculo magis conspicua, (quæ in posteriore forma vix aut ne vix observabitur;) tum propter intervalla, ibidem, uniformi difformitate variata; quæ, hic, sunt quadrata omnia.

Calculus, iisdem principiis nititur in hac formâ atque in præcedente: Sed expeditior hic est, propter tigna omnia ejusdem longitudinis, eademque in uno tantum puncto medio onerata, pluraque puncta æqualibus oneribus pressa: Quæ omnia conducunt ad reddendum calculum expeditiorem.

Calculus huic constructioni accommodus.

Ad calculum hic expeditius instituendum, notandum erit; non tantum ea puncta (live bina, sive quaterna,) quæ sunt respectu totius Schematis

Schematis similiter sita (& propterea æqualiter onerata) eodem symbolo designari; (quod in calculo præcedente factum erat:) Sed etiam, propter tigna singula in medio tantum sui puncto onerata, utraque ejusdem tigni capita æquali onere subjecta fulcra gravare, (per prop. 5. hujus;) quæ itaque analogis symbolis designavimus, onera invicem æqualia indicantibus. Cætera quæ de præcedente Calculo dicta sunt, etiam hic (prout opus erit) locum habent.

Calculi Synopsis.

- 1 $A = \alpha = \frac{1}{2}T + B.$
 - 2 $B = \beta = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}F.$
 - 3 $C = \frac{1}{2}T + A$
 - 4 $D = \delta = \frac{1}{2}T + L.$
 - 5 $E = \epsilon = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}R.$
 - 6 $F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}G.$
 - 7 $G = \gamma = \frac{1}{2}T + E.$
 - 8 $H = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}D.$
 - 9 $I = \iota = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}N.$
 - 10 $K = \kappa = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}I.$
 - 11 $L = \lambda = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\kappa.$
 - 12 $M = \mu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}P.$
 - 13 $N = \nu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}M.$
 - 14 $P = \pi = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\iota.$
 - 15 $Q = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\gamma.$
 - 16 $R = \varsigma = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}Q.$
- Per prop. 5 vel 7 hujus Cap.
- 17 $C = T + B.$ per 3, 1.
 - 18 $D = T + \frac{1}{2}\kappa.$ per 4, 11.
 - 19 $F = \frac{1}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}E.$ per 6, 7, 17.
 - 20 $H = \frac{1}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}\kappa.$ per 8, 1, 18.
 - 21 $M = \frac{1}{4}T + \frac{1}{4}\iota.$ per 12, 14.
 - 22 $N = T + \frac{1}{4}\kappa + \frac{1}{4}P.$ per 13, 11, 12.
 - 23 $N = \frac{3}{8}T + \frac{1}{4}\kappa + \frac{1}{8}\iota.$ per 22, 14.
 - 24 $Q = \frac{1}{4}T + \frac{1}{2}E.$ per 15, 7.
 - 25 $R = \frac{3}{8}T + \frac{1}{4}E + \frac{1}{4}\iota.$ per 16, 14, 24.
 - 26 $B = \frac{3}{8}T + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}K.$ per 2, 19.
 - 27 $B = \frac{9}{16}T + \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}K.$ per 26.
- 6
- 28 $E = \frac{1}{16}T + \frac{1}{24}E + \frac{1}{8}I + \frac{1}{3}K.$ per 5, 25, 27.
- H h h h 2

|29|E=

Fig. 248.

- $29 \quad E = \frac{87T + 6I + 16K}{34}$. per 28.
 $30 \quad H = 2T + \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}K$. per 20, 27.
 $31 \quad I = \frac{1}{16}T + \frac{1}{2}E + \frac{1}{16}I + \frac{1}{8}K$. per 9, 23.
 $32 \quad I = \frac{17T + 8E + 2K}{15}$. per 31.
 $33 \quad K = \frac{1}{15}T + \frac{1}{15}E + \frac{1}{15}K$. per 10, 30, 32.
 $34 \quad K = \frac{248T + 42E}{77}$. per 33.
 $35 \quad I = \frac{361T + 140E}{3 \times 77 = 231}$. per 32, 34.
 $36 \quad E = \frac{11389T + 952E}{34 \times 77 = 2618}$. per 29, 34.
 $37 \quad E = \frac{1627T + 136E}{34 \times 11 = 374}$. per 36.
 $38 \quad E = \frac{1627T}{238}$. per 37.
 $39 \quad G = \frac{1248T}{238}$. per 7, 38.
 $40 \quad Q = \frac{222T}{238}$. per 15, 39.
 $41 \quad K = \frac{1614T}{238}$. per 34, 38.
 $42 \quad L = \frac{248T}{238}$. per 11, 41.
 $43 \quad D = \frac{1061T}{238}$. per 4, 42.
 $44 \quad B = \frac{2002T}{238}$. per 27, 38, 41.
 $45 \quad A = \frac{1121T}{238}$. per 1, 44.
 $46 \quad C = \frac{242T}{238}$. per 3, 45.
 $47 \quad F = \frac{1121T}{238}$. per 6, 39, 46.
 $48 \quad H = \frac{1212T}{238}$. per 8, 43, 45.
 $49 \quad I = \frac{1212T}{238}$. per 32, 38, 41.
 $50 \quad P = \frac{128T}{238}$. per 14, 49.
 $51 \quad M = \frac{214T}{238}$. per 12, 50.
 $52 \quad N = \frac{111T}{238}$. per 13, 42, 51.
 $53 \quad R = \frac{1014T}{238}$. per 16, 40, 50.

Hoc est.

$A = \frac{8117T}{238}$	$E = \frac{6122T}{238}$	$I = \frac{161T}{238}$	$N = \frac{311T}{238}$
$B = \frac{822T}{238}$	$F = \frac{822T}{238}$	$K = \frac{622T}{238}$	$P = \frac{322T}{238}$
$C = \frac{922T}{238}$	$G = \frac{722T}{238}$	$L = \frac{322T}{238}$	$Q = \frac{422T}{238}$
$D = \frac{411T}{238}$	$H = \frac{722T}{238}$	$M = \frac{222T}{238}$	$R = \frac{422T}{238}$

Pater,

Pater, ex hoc calculo; Ponderum ſingularium maximum eſſe $A = 8\frac{2}{3}\frac{1}{8}T$. Cum itaque eidem puncto (tigni CC medio) incumbant duo A, (utrinque unum,) hoc eſt $17\frac{1}{3}\frac{2}{8}T$; idemque porro (ne pondere tigni ſui rumpatur) Uno adhuc tigno onerari cenſendum ſit, (per prop. 7. huius Cap.) Firmitas ibidem requiſita, (ne rumpatur tignum) æquipollet ponderi Tignorum $8\frac{2}{3}\frac{1}{8} + 8\frac{2}{3}\frac{1}{8} + 1 = 18\frac{2}{3}\frac{2}{8} = 18\frac{1}{3}$.

Quod quidem Onus non tantum eſt ut propterea metuamus ne non ferendo ſufficiat tignorum robur: Quippe tigna, etiam ſatis longa, multò gravius onus ſuſtinere valebunt quam eſt *Octodecuplum*, ſeu *Novendecuplum* ſui ponderis.

Eſt autem gravius quam onus maximum formæ præcedentis; utpote quod ad *Quindecuplum* ponderis unius tigni non pertigiffe, ſupra deprehenſum eſt.

Paucioribus interim Tignis in hac forma res abſolvitur, (utut aræ huius latitudo intra muros, duodecima ſui parte ſuperet latitudinem illius, eâdem manente longiſſimi tigni longitudine:) Quippe hic adhibentur tigna omnino 49 æqualia; illic verò, ex longioribus 40, ex brevioribus 10.

Conſtructiones adhuc alia plures.

Tertia conſtructionis forma, quam exhibet fig. 250. in hoc poſiſſimum à Primâ differt, quod quæ diverſis ejuſdem ſubjacentis tigni punctis ſuſtinentur tigna incumbentia; ſint, illic, ad eaſdem partes poſita; hic, ad contrarias. Fig. 250.

A Secundâ verò, in hoc poſiſſimum differt, quod, quæ ad contrarias partes ſubjecti tigni jacent tigna incumbentia, applicentur illic ad idem ſubjecti tigni punctum medium; hic verò, ad diverſa puncta, quibus tigni longitudo trifariam ſecatur.

Quarta, Quinta, & Sexta, ſimiliter ex figura trilatera fig. 247. derivantur; ut, ex quadrilatera fig. 246. derivantur prima, ſecunda, & tertia.

Forma Quarta, quam exhibet fig. 251. eſt analoga Tertiæ; mutatis Quadratis (propter angulos non rectos) in Triangula & Hexagona. Fig. 251.

Forma Quinta, quam exhibet fig. 252. eſt magis analoga primæ; propter duo tigna incumbentia, ad eaſdem partes tigni ſuſtinentis poſita: In hoc autem cum ſecunda covenit, quod ad idem ſuſtinentis punctum medium, applicentur utraque. Fig. 252.

Forma Sexta, quam exhibet fig. 253. eſt Secundæ plane analoga; propter incumbentium ad contrarias partes tignorum capita, eodem ſubjecti Fig. 253.

subiecti tigni puncto medio suffulta: Atque in hoc potissimum à Quartâ differt; quod, hic, ad idem sustinentis punctum applicantur utraque; illic, ad diversa. In Schemate autem, necesse habui tignorum capita amputare, paulò citra tigni sustinentis puncta media, (quibus suffulcienda intelliguntur:) Quippe aliàs, coeuntibus ad idem punctum tignis contrariis, una fieret continua recta, nec ad oculum pateret tigni sustinentis ab incumbentibus distinctio, nisi vellem in maiori forma Schema dilineare (ut in fig. 248. factum est) quo possint tignorum oppositorum capita sustinentis medio determinari.

Posunt autem hæ Formæ (sicut præcedentes) plus minusve continuari, prout opus erit, atque expedire videbitur.

Posuntque, quæ singulis incumbunt juncturis onera sustinenda, similiter ad calculum revocari, ut ad formam primam & secundam factum est.

Sed & aliis mille modis possunt hæc omnia variari, prout vel conditio loci, vel scopus Architecti postulaverit. Nobis, hæc pauca sufficiat exhibuisse specimina.

CAP.



CAP. VII.

De Axe in Peritrochio, & Machinis cognatis.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Axem in Peritrochio vocant *Machinam*, seu *Instrumentum Mechanicum*, ponderibus levandis aptum; in quo *Cylindrus* (quem Axem vocant,) Fulcris per extrema sustinetur, circumpositum habens *Tympanum*, (quod *Peritrochium* vocant,) in cujus ambitu, foraminibus ad id factis, insiguntur *Scytalæ*; quibus applicata *Vis*, *Peritrochium* una cum *Axe* vertit, cui convoluti *Funes* *Onus* elevant. Fig. 254.

Cylindrus (κύλινδρος) à κύλινδω seu κυλινδω dicitur, (atque hoc à κύλιω *volvo*,) ob formam teretem, aptè volubilem: quam autem in Geometriâ figuram sic appellant, notum est.

Cylindri autem, saltem qui pro magnitudine breves sunt, (in Mechanicis præsertim) etiam *Tympana* (τύμπανα) dici solent: ob similitudinem, credo, Instrumentorum pulsatiliū sic dictorum, quæ & etiamnum in usu sunt. Ea verò sive à τύμπα sic dicantur (unde Scholiastes Aristophanis τύμπεον deducit, cum pro *fuste* sumitur quo quis verberetur,) seu potius ab Hebræo תוף (quod tantundem significat) non disputo. Certè à Syrorum תופ, Græcorum τύμπανα originem traxisse, non videtur ambigendum; quæ Romanis postea aliisque gentibus in usum venerunt. Neque satis convenit inter interpretes num illud τύμπανίδης Hebr. c. 11. innuat quod *fustigati* fuerint seu

Fig. 254. seu *fusibus casti*, an quod fuerint quasi in equaleo *torti* atque *extensi*, haud secus atque Membranæ Tympanorum capitibus inpositæ.

Cylindrum autem (in Mechanico hoc Instrumento) minorem, sed & longiorem, *Axem* (*ἄξονα*) appellant. *Axis* autem seu *ἄξων*, ab *ἄγω*, *ἄξω*, videtur devenisse; utpote circa quem *agatur* Rota. Quippe de rotarum axe vox ea primâ significatione dicitur; atque inde ad Circulorum, Sphærarum, aliorumque Solidorum Axes transfertur.

Tympanum verò sive Cylindrum majorem, sed & breviorē, *Peritrochium* (*περιτρόχιον*) vocant; (quod quia à *τρόχος* *rota*, atque hoc à *τρέχω* *curro* dicatur, non est ambigendum;) quod Rotarum instar circa Axem (*περιτρέχει*) circumcurrit: cum eo tamen discrimine, quod curruum Rotæ circa manentem Axem (hoc est, non conversum,) convertuntur; hoc autem Peritrochium una secum & Axem suum volvit.

Et quidem Axem hunc, utut alibi tornatum, eâ tamen parte quâ Peritrochio infigitur, quadratum reliquum vult Pappus, (aptatum simili in Peritrochio Foramini quadrato,) quò Peritrochio firmitus jungatur, certiusque cum eo converso convertatur.

Axis autem Extrema, (quæ & axis *Capita* dicuntur, aut etiam *Poli*;) in foramina (*πημαλα*) immoti Pegmatis quo sustinentur immissa, circumpositis axique fixis munimentis æneis armari jubet quas *Chœnicidas* (*χοινικίδας*) vocat, (dicitur autem *χοινίς* à *χοῖνιξ*, ab *formæ*, ut videtur, similitudinem; atque in eodem sensu usurpatur *χρῆν*;) Sed &, in pegmatis foraminibus, eisdem Chœnicidibus subjectos vult *πῆξας* æneos, sic enim est in codicibus græcis; Commandini versio *πῆξας* habet; quod à *πῆξω* *tero*, dictum videtur: In eum verò finem utraque, tum ut Axium extrema in Foraminibus expeditius vertantur, tum ut minus terantur utraque.

Idem verò, ubi *Glossocomum* describit, pro Axium extremis, habet *Digitos* æneos *Pyxidibus* æneis acceptos, *Δακτύλους* dicit ob formæ similitudinem; & *πυξίδας* similiter. Utut enim *πυξίς* à *πύξω* dicatur, quoniam primitus è *buxo*, ut videtur, fiebant *pyxides*; postea tamen non ex quovis ligno tantum sed ex quavis materia cum fierent, idem tamen nomen retentum est.

Eosdem idem ibidem etiam *Tormos* *πέρας* videtur appellare: quod sive a *τέρω* *tero* dicatur, (quod versando *teratur*) sive a *τέρω* vel *τέρω* *terebo*, *perforo*, perinde est; sive etiam cognatæ significationis sint *τόρμος*, *τέρμα*, *τέρας*, *τέρας*, & *terminus*. Vitruvius, *Cnodacas* appellat; Hero, *κνώδακας*; ut ejusdem forte originis sint *κνώδαξ*, &

& κνώδων, *micro* seu *cuspis gladii*, quod à καίνα & ἰδέσ dictum volunt.

Hi autem sive ἀκνύλοι, sive πέμοι, sive κνώδες dicantur; non tam videntur fuisse continuati axis (qui ligneus esse solebat) partes, in minorem formam tornatæ; quam Clavi ferrei vel ænei ibidem impacti, adaesti, aut etiam implumbati; quò fortius axem sustinerent quam si lignea essent hæc axis Capita. Quare & *subscendes* quædam seu *subscudicula* rotundæ dicuntur esse. *Subsens* autem à succudendo dici perhibetur; quòd quasi *cusendo*, mallei ictibus percussa, immitatur.

Scytala (σκυτάλαι) dicuntur, Fustes seu Baculi teretes, qui pro Manubriis sunt, in foramina in Peritrochii ambitu facta immissi fixique. Α σκῦτ (corium) σκυτάλῃ dictum volunt; eo præsertim significato quo *Flagrum coriaceum* seu *scuticam* significat. Sed & *clavam corio obductam* significare volunt; (atque, hinc, simpliciter *clavam* vel *fustem*.) Et quidem fieri potest, ut hæc manubria non rarò fuerint corio obducta (quò tractantium manus minimè læderentur,) indèque *Scytala* dicta. Sed (quicquid sit de origine seu causa nominis) *Scytala* vox pro baculo seu *lignotereti* passim adhibetur. Atque hinc *Lacedæmoniorum Scytale*, (à multis passim scriptoribus memorata,) modum innuit oculte scribendi. Quippe Segmentis Membranæ (quod quasi Corii genus est) bacillo tereti circumpositis, sive Spirali forma circumvolutis, Epistolam inscribebant: quibus inde solutis confusæ literæ non legerentur nisi baculo simili similiter circumdarentur.

Quæ autem Pappo σκυτάλαι, Aristoteli (in quæstionibus Mechanicis) κόλλοπες vocantur. Habetque & hæc vox, nescio quo pacto, cum Corio connexionem. Quippe κόλλος primâ significatione Corium durius significat, quod in boum cervicibus & dorsis est; quod ita dictum volunt quòd ex eo costis fiebat κόλλα *gluten*. Hinc & *Citharæ verticilla*, quibus chordæ intenduntur, κόλλοπες dici volunt; *ex materia quâ fiebant*: nisi potius dicendum sit, *quâ tegebantur*. Hoc utique putaverim potius; quippe corium utcumque durum & callosum, non tantæ firmitatis est ut ex eo fiant hæc verticilla; quæ lignea saltem esse debent, aut si mavis metallina. Sed tum hæc *Verticilla* tum illa *Manubria corio recta* fuisse nihil impedit; atque inde tum κόλλοπες dici, tum & σκυτάλας.

Dum verò *Collopas* appellat Aristoteles hæc manubria; idem σκυτάλας vocat instrumenta quædam alia; Qualia scilicet nos exhibemus fig. 260. item, qualia innuit figura 258, R, S, oneribus trahendis supposita, quo

quo minus in subjectam terram offensent; eaque vel rotulis quasi capitibus affixis, vel etiam sine his. Cum enim *Scytala* pro *ligno xereti* habebatur, mox ea pluribus instrumentis ex ligno Cyliandræo factis accommodata est.

Funes xereti, quæ Axi circumposita etiam ad Onus sublevandum (*φορτίον* dictum) annexa erant, *ἔπλα* appellat Pappus; hoc est *Arma*; (pro quo in Commandini versione, errore credo Typographi, *Arna* legitur: quod quid sit, nonnullis forsan facefiat negotium.) Sic enim & Rudentes seu funes nautici majusculi *ἔπλα* dicebantur; & Latine, *navis Armamenta*. Quæ & *Sparta ἀράξα* dicebantur; hoc est, ut quibusdam videtur *Sata*; (tanquam à *ἀράξα*, pro *sero*, *sevi*;) quia ex *cannabe* aliisque rebus sativis fiebant: malim à *ἀράξα* *necto*, hoc est, *sero*, *serui*. Nam, ut *ἀράξα*, sic *sero* (quod inde factum videtur) utrumque significatum habet; sed in altero est *sevi*, *satum*, ubi pro *semino* usurpatur; in altero, *serui*, *serum*, ubi pro *jungo*, aut *necto*, dicitur; (quâ significatione etiam ab *ἀράξα* *necto* dici poterit; ut & *sermo*, *series*, &c. & quidem *serere sermones*, fortassis ab *ἔρα* dico.) Idemque & in compositis videre est; quia ab *infero*, pro diversâ significatione, dicitur *insertus*, & *insertus*; à *consero*, *confusus*, & *confertus*; à *dissero*, *diffusus*, & *disertus*; à *desero*, *desertus*, & *desertus*; ab *asser*, *assinus*, & *asserinus*; ab *axero*, *exertus*; (sed *exitus*, potius ab *exeo*.) *Funis* autem seu *spartum* in hoc & hujusmodi instrumentis, dicitur & *Funis tractorius*, & *Funis ductarius*.

II.

Fig. 256. *Axem cum Scytalis, sed sine Peritrochio, Suculam vocant.*

Suculam, sive *Succulam*, (nam utroque modo scribitur,) dici volunt, ob *Suis* nescio quam (volutando forsan) similitudinem. Græcis, ob *Asini* potius (in ferendis oneribus) similitudinem, *ὄνυξ*, *ὄνικς*, *ὄνυξ*, appellatur. *Scytalas* autem vel ad alteram vel ad utrumque extremum, pro arbitrio, habere poterit.

Fig. 257. Neque huic ab simile est *Jugum* textorum (*ζυγός*) de quo Aristoteles in *Mechanicis* quæstionibus, aliique ad illum, scribunt.

III.

Suculam erectam, Ergatam vocant.

Fig. 258. *Si* nomen spectemus, *Machinam Operariam* dixeris; (est utique *Σιγγάνης operarius*, ab *ἰσζάνω*;) sed huic speciatim *Organo* nomen imposuit.

imposuit usus. In quo erecta Sucula, vectibus quaternis, (seu, quod tantundem est, duobus transversim politis & utrinque extantibus,) vel etiam pluribus, converti solet; atque ponderibus Attrahendis, (potius quàm elevandis aut attollendis,) adhiberi.

IV.

Huc referenda erunt ejusmodi alia Instrumenta innumera; ex Cylindris seu Tympanis confecta (seu quæ horum instar Fig. 259; sunt,) eisque vel Dentatis vel non-Dentatis; & quidem 260, utcumque multiplicatis: idque sive circa eundem motûs 261, axem rotentur, sive circa diversos. Talia sunt Terebra, 262, Tympanum manubrio instructum, Tympanum cum axe, 263, aut etiam hujusmodi plura invicem commissa, (ut in Automatis fieri solet,) Geranium, aliaque multa, quæ vel ex figuris satis intelligantur, vel quæ Lector ex suo penu huc referre possit.

ET quidem Terebra seu Terebrum; à Tero dictum, (ut Græco Fig. 259. erum τέρειον à τέρω perforo, atque hoc à τέρω tero,) vel à Græco τέρειον immediatè; vix aliud est quàm vel Sucula vel Ergata cum Scytalis binis; cujus ope acies quæ secat premitur seu protruditur.

Tympanum manubrio instructum, est instar Sucula cum unicâ Fig. 260. Scytalâ.

Tympanum cum Axe, est Axis in Peritrochio sed sine Scytalis: Fig. 261. (saltem nisi, in Tympanis dentatis, ipsi Dentes sint pro Scytalis:) sed & hujusmodi plura invicem committi solent; quò Vis Vi addatur.

Geranium appello, Instrumentum illud cujus in Navigiis onerandis Fig. 262. & exonerandis (atque Oneribus alias sublevandis) frequens est usus; (ubi Rotâ magnâ, ab hominibus calcatâ, porrigitur longa Cervix, unde ad Onus demittitur Tractorius Funis.) Nostres vocant à Crane, (Gruem;) cui respondent Machinæ Græca nomina μέγαν & μεγάλιον; & Latinorum, Grus.

Sed & vulgaris Ferrei Mallei usus, evellendis Clavis adhibiti, pote- Fig. 263. rit & huc referri. Aliâque istiusmodi plurima.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Fig. 254, In Axe cum Peritrochio, (& cognatis Potentiis, quibus
 255, eadem est ratio,) ut est Perimeter Axis, cui applicatur
 256, Pondus movendum; ad Perimetrum Orbis Extimi, cui
 257, applicatur Vis Motrix; (seu illius Diameter vel Semi-
 258, diameter, ad Diametrum vel Semidiametrum hujus:)
 259, sic, vice versâ, Vis æquipollens, ad Pondus Moven-
 260, dum. Quæ itaque vel tantillum aucta movebit; aut
 261, etiam, si tantillum minuatur Pondus: Secus; non mo-
 262, vebit: Et, si adhuc minor sit, vel Pondus augeatur; ne
 263, sustinebit quidem.

Propositionem sic universaliter conceptam, eadem operâ pluribus
 Machinis seu (ut dici solent) Potentiis accommodandam censui
 (cum in omnibus eadem sit ratio;) potius quam ut eadem de singulis
 toties repetantur.

Solent autem plerique omnes Mechanicorum scriptores Potentiam
 hanc ad Vectem reducere, (de quo in superiore Capite dictum est:)
 Neque id incommode. Quippe si C Centrum seu Axis Motus pro
 Fulcro seu Hypomochlio habeatur; rectæque CA, CB pro Distan-
 tiis punctorum applicationis, Virium & Ponderis, ad eandem rectam
 seu Vectem ACB: Eadem omnia quæ de Vecte superius demon-
 strantur, etiam hic locum habebunt. Est utique hoc Organon tan-
 tundem atque Vectis continuus, seu alius atque alius continuo ordine
 subinde succedentes. Quippe ut, vertente Machinâ, (fig. 254, 255.)
 aliud atque aliud erit Perimetri axis punctum B cui applicatur Pondus;
 similiter alius atque alius succedit Vectis ACB, cujus reliquo extremo
 applicetur Vis motrix. Si verò non quidem ad ipsum A punctum
 oppositum applicetur Vis, sed ad aliud quodvis extimi Orbis Punctum,
 ut

ut a : si tamen ad hoc punctum quodvis sic applicetur Vis ut linea directionis suæ, ut aV , sit secundum Tangentem hujus Orbis; res eodem planè recidit, per ea quæ de Librà Demonstravimus, ad prop. 14. Cap. 3. Si autem non secundum rectam quæ Orbem tangat, sed quamvis aliam, ut av , applicetur Vis, eadem pro singulis respectu. è casibus locum hic habebunt, quæ illic de Librà demonstrantur. Sive enim ad Libram referatur hæc potentia (quod mihi potius videtur) sive ad Vestem (qui & ipse Libra est,) eodem res recidit.

Verùm ego, ut rem ad prima principia revocem, malim ex prop. 5 & 6. Cap. 2. demonstrare; utpote quod universale principium est, ex quo omnium Machinarum vires æstimandæ sunt.

Si itaque intelligatur (quod hic supponimus) in unâ Machinæ conversione tantundem Elevari (seu contra propensionem suam moveri) Ponderis appensum P , quantum tractorii funis illud est quod Axem semel ambiat, (quod itaque ipsius Ambitui æquale supponitur;) unâque tantundem Descendere (seu secundum propensionem suam procedere) Ponderis contrarium seu Vim Motricem V , quantus est Extimi Orbis Ambitus cui vis hæc applicatur, (quod pariter intelligendum erit;) Manifestum est sic esse Descensum ad Ascensum, ut est Ambitus hic ad illum, seu ut hujus diameter vel semidiameter ad diametrum vel semidiametrum illius: puta ut m ad n seu mD ad nD . Si itaque ponatur (vice versâ) Ponderis ad Vim Motricem, ut n ad m , seu ut nP ad mP : Erit Motus illius Magnitudo ad Magnitudinem hujus, (utpote in ratione ex duabus illis rationibus compolita, per prop. 5. Cap. 2.) adeoque & Momentum illius ad Momentum hujus (per prop. 7. Cap. 2.) ut $nP \times mD$ ad $mP \times nD$, seu ut $mnPD$ ad $mnPD$; nempe æquale. Hoc est, Virium ut nP , Descensus (seu latio secundum directionem suam) ut mD , æquipollebit Ponderis ut mP Ascensui (seu lationi contra directionem suam) ut nD : Qui itaque cum sint contrarii, pro nullo simul vel Descensu vel Ascensu reputandi sunt; per prop. 6. Cap. 2. adeoque (per prop. 7. ejusdem.) Momentum in neutram partem præpollens; & Vires contrariæ se mutuò sustinebunt. Si verò vel Augeatur Vis Motrix, vel Minuatur Ponderis, præpollebit Vis Motrix & Ponderis elevabit: Sin contra; præpollebit Ponderis, & Vis Motrix ne sustinendo per erit: per prop. 8, & 12. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHO-

SCHOLIUM.

Notandum hic, si ad Mathematicum rigorem res exigatur, à ratione proposità nonnihil recedendum esse. Nam Funis longitudo quæ unâ revolutione convolvitur aliquanto major est quàm axis ambitus: Tum quia, propter funis crassitiem, extra Axis ambitum supereminet, (adeoque peripheriam majorem efficit;) Tum quia non præcisè circulem peripheriam efficit, sed Spiralē circa Cylindrum conversionem, quæ circuli peripheriā major est. Item quæ Scytalis applicatur Vis, non in ipsis earundem punctis extremis applicatur, sed paulò citra extremum. Verùm hujusmodi minutiae in Mechanicis negligi solent. Si autem ad Mathematicum rigorem exigere velis, tantus reputandus erit Axis Ambitus, quanta est longitudo funis unâ conversione convoluti: Atque tantus reputandus ambitus à Scytalis descriptus, quantus ab eo illarum puncto describitur cui Vis censenda erit applicari. Hac utique supponit Demonstratio.

Notandum porro, Demonstrationem hanc spectare potissimum fig. 254, 255, &c. ubi Pondus dependet, adeoque propter gravitatem suam agit ut Vis contraria, quæ itaque ut Pondus elevetur, superanda erit à Vi motrice; & saltem æquanda, quo sustineatur.

Si verò, ut in fig. 258. Pondus humi jacens Trahendum sit (in Plano Horizontali) non Elevandum, vel aliud obstaculum amovendum sit; (ut fig. 259. ubi lignum Terebrā scindendum erit, quo possit Terebra converti; & fig. 263. ubi clavus evellendus est;) considerandum erit hoc Pondus, vel Obstaculum, non ut *Vis contraria*, (quippe ut non horsum suâ sponte nititur quò trahitur, sic neque ad partes contrarias,) sed simpliciter ut *Impedimentum*. Quo casu utut Vis major quàm quæ æquipolleat requiratur ad Pondus illud vel Obstaculum movendum vel amoliendum: quò tamen sustineatur (hoc est, impediatur ne feratur in oppositum,) nulla Vis requiritur; supponitur utique vel non aliorsum niti, vel (quod tantundem hic erit) aliunde sustineri (putà subiecto pavimento, vel alio quovis modo,) ne eo feratur. Alia siquidem habenda est ratio nudi *Impedimenti*, ut in prop. 11. Cap. 1. alia *Vis contraria*, ut in prop. 12. ejusdem.

Si verò, ut in fig. 256. partim Trahatur, partim Elevetur; utriusque habenda erit ratio: Nam, præter amovendum *Impedimentum* (ex scabritie terræ vel aliunde ortum quod majus minúsve esse potest, prout magis vel asperum vel glabrum sit subiectum quo nititur fundamentum;) superanda etiam est Vis contraria deorsum tendens; quæ ascensui non opponitur tantum sed contrariatur. Quæ quidem Vis
contraria

contraria major minorve erit (eodem manente pondere) prout major minorve fuerit motus acclivitas; secundum ea quæ Cap. 2. tradidimus, prop. 16, 17, & alibi.

Et quidem illud ipsum Impedimentum quod quò Trahatur pondas superandum erit à Vi motrice; quò tamen sustineatur, (ne à Vi contrariâ in Oppositum moveatur,) Adjumento esse potest: Quippe eadem, verbi gratiâ, asperitas Terræ quæ impedit tractionem sursum, impedit etiam lapsum deorsum in eodem obliquo plano; & quamquam Vi Traëtrici opponatur ut Impedimentum, Retentrici tamen ut Adjumentum associandum erit.

Si autem peragenda sit Tractio in plano (non, ut priùs, Acclivi, sed) Declivi: Superandum & hic erit quod à Terræ Scabritie (vel aliunde) oritur impedimentum; sed quæ superetur vis contraria, a Ponderis gravitate orta, nulla est: imò ea ipsa quæ in gravitate illâ est Vis Motrix deorsum, Impedimento illi contraria erit; illudque magis minùsve minuit, prout major est aut minor declivitas; quæ & tanta esse poterit ut hæc ipsa Impedimentum superet, ut Vi Traëtrice opus non sit. Utcunque, Vi Traëtrici eousque adjumento erit, ut eâ nihil ultra superandum relinquatur quàm id quo Impedimentum illud superat hoc ex Gravitate Momentum pro eâ plani declivitate.

Verùm hæc omnia sunt extra considerationem hujus Propositionis: quæ (cæteris ritè computatis prout ex suis quodque principiis æstimandum erit) hoc potissimum probatum it; Vim quamlibet in A directè applicatam, ad eandem directè applicatam in B, eam Momenti rationem habere ad Pondus P movendum, quam habet C A distantia, ad distantiam C B, vel eo radio descripta Perimeter ad Perimetrum hoc radio descriptam.

Dico autem *directè applicata*; (hoc est, secundum rectam quæ ad Orbis ambitum in puncto applicationis Tangens sit; ut ad prop. 14. Cap. 3. explicatum est:) quippe si Obliquè applicetur, minuitur Vis pro ratione Obliquitatis; secundum Obliquitatis leges Cap. 2. expositas. Nempe, Vis per αv obliquè applicata, ad eandem per αV tangentem directè applicatam, in eâ ratione valebit quam habet αV ad αv ; per prop. 14. Cap. 3. vel prop. 21, aut 25. Cap. 2. Et quidem, Vis per αa , ad Vim eandem per αV vel $A V$ applicatam; valebit ut C a, ad C α vel C A; per prop. 13. Cap. 3.

Atque hoc, *Geranium* seu *Grænem* speciatim spectat. Ubi Vis motrix adhibita, hoc est, hominis calcantis pondus, non directè applicatur secundum Orbitæ tangentem, sed obliquè. Et propterea minus agit Pondus calcantis in α , quàm si esset in A; Cum enim agat hoc Pondus, propter

Fig. 262.

propter gravitatem suam, secundum rectam quæ sit Horizonti perpendicularis; adeoque, si ad Horizontalis rectæ CA punctum A applicata foret, orbitam tangeret ea recta; atque æquipolleret calcantis Pondus Oneri in P, quod ad ipsum sit ut CA ad CB, per modò demonstrata: idem ad punctum *a* applicatum, minus valebit (ob causam jam dictam) quam si in A foret. Et quidem si foret *a* ipsi C directè subjectum, nihil omnino ageret ad convertendum Tympanum aut Pondus elevandum; sed eò plus agit quò propius ad A promovetur; atque in eà quidem ratione quam jam ostendimus ex prop. 21. Cap. 2. & prop. 13. Cap. 3.

Dico etiam, in eà ratione valere ad Pondus P movendum: quoniam ubi ad materiam Physicam perventum erit, nullum erit tam in omnibus expeditum Organum (utcumque affabrè detornatum fuerit, omnesque mobilium commissuræ ad glabritiem redactæ, & perfuso Oleo aliàsve adjunctæ,) quin aliqua supererit scabrities, aliave inæqualitas, aut impedimentum, quod faciet ut Virium nonnihil impendendum fuerit ad ipsum Organum movendum; atque hoc, quantumcunque sit, summæ Virium in A applicatarum detrahendum erit, illudque quod superest Virium reputandum erit adhibitum ad Pondus movendum quod ad B applicatur.

Quæque hic monemus, alibi prout opus fuerit intelligenda erunt. Fig. 263. Mallei verò usum illum quem innuit fig. 263. cur huc reducimus, ratio manifesta est: Quoniam, etiam hic, virtus in A adhibita, movet in circumferentiâ radio CA descriptâ (propter C Centrum motus,) B verò, unà cum Impedimento seu Obstaculo, (hoc est clavo evellendo,) in circumferentiâ descriptâ radio CB. (Adeoque quò propius sit B ad C, eò fortius ager vis eadem in A.) Atque idem dicendum erit de quovis alio organo consimili, ubi eadem ratio.

Si tamen Mallei usum illum (aliàsque similia) ad Vestem referas (aut Libram etiam) cujus Centrum Motus extra Vestem (Libramve) sit: perinde est. Quam rem ad prop. 14. Cap. 3. consideravimus.

PROP.

PROP. II.

Datum Pondus, datâ Vi, Axe in Peritrochio (aliôve quod Fig. 254,
255,
&c. hujus instar sit Organo) movere.

Fiat, ut Pondus P , ad Vires V' , sic (reciprocè) hujus distantia CA , ad CB : atque æquipollebunt in hoc situ Vis & Pondus, (utpote in distantis reciprocè proportionalibus,) per præcedentem. Adeoque si distantia CA vel tantillum augeatur; auctum sic erit Virium Momentum, Ponderique præpolebit, illudque movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

Paret hinc; quò minor fuerit Axis ambitus cui applicatur Pondus, vel major ambitus Peritrochii extimus (seu quod hujus instar est) cui Vis Motrix applicatur, eò minori Vi movebitur Pondus.

Verùm hic recordandum erit, præsertim vastis Ponderibus exigua Vi movendis, quod in Schol. prop. 18. Cap. 2. monuimus; nempe probè curandum esse, ut omnia, Vi & Ponderi intermedia, sint pro suis respectivè oneribus sustinendis satis firma: secus, rumpetur ipsa Machina, ejusve aliqua Armamenta, potiùs quàm efficiatur motus imperatus.

Item, quod ad prop. 28. Cap. 1. monuimus; nempe, motum hunc quò minori Vi peragatur, eò tardiozem fieri; adeoque defectum Virium Temporis impensè longitudine redimendum esse: Quod & in omnibus omnino Organis mechanicis locum habet. Adeoque, ubi Tempori parcendum erit, ut plus Virium addatur necesse est.

Denique; quoniam, ubi Virium & Ponderis magna est inæqualitas, haud commodè poterit quod in hujus Propositionis constructione Imperatum est ad praxin redigi unâ vice (pro Physicæ materiæ imperfectione;) ideo pluribus sive tympanis sive rotulis invicem commissis id præstant; De quo in sequenti propositione agitur.

K k k k

PROP.

PROP. III.

Si pluribus commissis Rotulis, aliisque Ponderis levandi mediis adhibitis, motus facilitetur : calculo nihilominus constabit, quanta sit illa facilitatio.

Fig. 264. **E**Sto, verbi gratia, Centro (seu motus Axe) C, Tympanum seu Rota CA, cui in ambitu (ut moris est) Altriculi seu Pinnacidia affigantur, quibus impingens in A, Aqua currentis Fluvii, Rotam convertat. Sitque ad eundem motus Axem C, Rota minor CB dentata; quæ ita cum priore conjuncta sit ut circa communem Axem junctim moveantur. Sitque CB ad CA, (verbi gratia,) ut a ad b , seu ut 1 ad 3 : valebit igitur, (per prop. 1. hujus) Vis in A ad æqualem in B, ut b ad a , seu ut 3 ad 1. Adeoque *Uncia* in A, æquipollebit *Quadranti* (hoc est, tribus Unciis) in B.

Esto porro, Centro (seu motus Axe) D, alia Rota DB; ita dentata, ut dentes sui aptè congruant dentibus rotæ CB; eisque sic implicentur ut earum ope convertatur rota DB circa Centrum suum seu Axem D. (Sic autem congruent, si in eâ sit ratione Numerus Dentium rotæ DB, ad Numerum Dentium rotæ CB; quæ est istius Ambitus, ad Ambitum hujus; seu ut Radius, ad Radium.) Sitque circa eundem motus-Axem D, Rota minor seu Orbita DE; quæ cum DB junctim moveatur; habeatque sibi circumpositum Funem Tractorium EP, quo Ponderis P trahatur. Sitque Radius DB ad DE, ut c ad b ; puta ut 4 ad 1. valebit igitur Vis in B, ad æqualem in E (per prop. 1. hujus) ut c ad b , seu 4 ad 1. Adeoque *Quadrans* in B, æquipollebit *Affi* in E. At (per modo ostensa) *Uncia* in A, æquipollet *Quadranti* in B. Ergo, *Uncia* in A, æquipollebit *Affi* in E, aut etiam (per prop. 18. Cap. 2.) in P. Adeoque *Vis Uncialis* in A, sustinebit *Ponderis Affi* in P; eademque Vis, tantillum aucta, movebit.

Vel, universaliter; propter CA ad CB, ut b ad a ; vis V in A tantundem valebit atque $\frac{b}{a}V$ in B: Item, propter DB ad DE, ut c ad b ; vis $\frac{b}{a}V$ in B (seu V in A) tantundem valebit atque $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a}V = \frac{c}{a}V$, in E. Hoc est, Vis in A, æquipollebit Ponderi in E vel P, quod

quod ad illam sit in eâ ratione quæ componitur ex CA ad CB, & DB ad DE. Atque eodem modo procedendum erit quocunque porro fuerint Rotæ invicem Commiffæ.

Si verò Pondus illud non ex E directè dependeat, ut in P; sed, ut in Π, obliquo Plano FO incumbat: Pondus in Π, ad idem in P, in ea ratione ponderabit quâ est FI (perpendicularis æque-alta) ad FO; puta ut c ad d, seu 3 ad 4; (per prop. 21, vel 25. Cap. 2.)

Adeoque cum vis V in A, æquipolleat Ponderi $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a} V = \frac{c}{a} V$ seu 12

V, in P; eadem æquipollebit Ponderi $\frac{d}{c} \times \frac{c}{b} \times \frac{b}{a} V = \frac{d}{a} V$, seu 16 V, in Π. Hoc est, Ponderi quod ad eum sit in ratione quæ componitur ex A C ad C B, & B D ad D E, & O F ad F I.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis casibus Calculo æstimanda est Vis in A, quæ Ponderi in P vel Π æquipolleat; (quæ itaque, tantillum aucta, Pondus movebit.) Quod faciendum erat.

S C H O L I U M.

§ 1: **A**D hanc formam de quibusvis Machinis, ex Tympanis dentatis confectis, fiet iudicium; qualia sunt varia Automatum genera, aliæque instrumenta in usum passim adhibita. Et speciatim *Glossocomum* illud quod ex Heronis Alexandrini *Barulco* describit Pappus, Collectionum lib. 8. prop. 10. Et quæ sunt istiusmodi.

2. Hanc autem de *Rotulis* doctrinam priusquam dimittram, locus hic haud incommodus erit alias adhuc de Rotis speculationes subungere; quæ quamquam huius loci directè non sint, huc tamen quadantenus spectare non immeritò videantur.

3. Observatum est in usu communi (quod & Aristoteles attigit in *Mechanicis* Quæst. 9.) *maiores Rotas, Cylindros, Tympana, Sphaeras, &c. facilius moveri quam Minores.* Quod utut per omnia verum non sit (limitatione utique opus erit;) ritè tamen intellectum, concedi potest. Quippe, dummodo idem sit utrobique Pondus, (id utique manifestò interponendum erit) id non rarò videmus in Curruum Rotis, in Cylindris Sphaerisque humi volutis, in Trochlearum Orbiculis, aliisque contingere. Saltem si & Axiom liqui sint circa quos moventur, eadem sit utrobique magnitudo; aliæque quæ sunt Impedimentorum loco, sint utrobique æqualiter constituta. Nam nisi hæc ita sint, res omnino secus esse poterunt.

K k k k 2

4. Ubi

4. Ubi autem hoc contingit ; si de causâ quærat : quilibet fere proclivis est eam ex hac de Axe in Peritrochio doctrinâ assignare. Neque hoc prorsus incommodè ; (quippe & huic considerationi locus erit :) Sed alia etiam in considerationem advocanda erunt , si res penitus inspicatur. Quippe hæc de Axe in Peritrochio doctrina , non de Rotis separatis invicem comparandis agit ; sed de duabus (pluribusve) conjunctis , quarum motus alter ab altero dependet : & quidem ubi Agens secundum unam , Patiens secundum alteram , consideratur.

5. Ut igitur ad suum Principium res referatur ; intelligatur primò Cylindrus ejusmodi (*Scytalen* vocat Aristoteles) qualem in Hortis (& alibi) ad complanandam terram volvendo solent adhibere : qualem (si manubrium demas) in fig. 260. exhibuimus. Ex hujusmodi Cylindris , Pondere æqualibus (& longitudine) Majorem facilius volvas (cæteris paribus) quàm minorem. Idemque de Rotis intellige , aliisve Tympanis , aut etiam Sphæris.

Fig. 265. 6. Sunt enim ejusmodi duo Cylindri , (vel , si mavis , duæ Rotæ ; Sphæræve,) ut A B, $\alpha\beta$, in fig. 265. qui vel Trusione vel Tractione movendi sint , super B β plano.

Manifestum est , si nulla esset medii resistentia superanda ; nullumque à scabritie subjecti (super quo movetur) impedimentum , aut quod horum instar sit ; pondus idem , ab eadem Vi, eadem facilitate antrosum propelli , aut retrorsum trahi ; per prop. 22. Cap. 1.

7. Si autem Resistentiæ Aëris ratio habeatur : Manifestum est , Cylindrum (cæteris paribus) mole majorem , majori Aëris portioni obviam ire , unde major igitur erit Resistentia ; & propterea Major Cylindrus difficilius movebitur : contra quam expectandum erat. (Quod in duobus Globulis , plumbeo putà & ligneo , ejusdem ponderis , per aerem missis , omnino obtinebit.) Adeoque hæc consideratio dissimulanda potius esset , quàm in causæ partem advocanda. Sed tantilla potest hæc esse differentia , ut aliunde superari possit.

8. Si verò Subjecti (super quod movetur) Scabrities seu Asperitas in considerationem advocetur.

Dico , primò , hinc potissimum esse (si non solummodo,) quòd Rotunda præsertim corpora humi volvantur multo facilius quàm labantur vel possint sine volutione trahi. Cum enim nullæ sint tam perfecte tersæ & glabræ Superficies , ut nihil prorsus asperitatis habeant , quæ se mutuò impediant detineantque : hinc fit , quòd Cylindrus A B , impeditus (contactu plani) ad partes B , sed non item ad partes A ; quæ potest expedire , præceps fertur ; (A celerius quàm B moto.)

moto.) Atque hoc continuè: Quod est, Volvi. Haud secus ac si Dentata Rota D B fig. 264. super Dentatâ superficie movenda esset: ubi ne labatur, impediunt impliciti dentes; (ut ad B videre est;) non item, ne volvatur. Id utique, nisi dentibus vel alterutris vel utriusque ruptis, fieri non potest: hoc potest; ne deferente quidem suum tramitem Centro C. Atque eadem ratio est asperitatum minorum utut minus observabilis.

9. Idemque (ob eandem causam) in Curruum Rotis sufflaminatis videre est; quæ multò difficilius ita trahuntur renitentes, (rotæ ambiiu, terræque superficie se mutuò radentibus,) quam ubi circa axem volvuntur.

10. Fallor, an non ob eandem causam sit, quòd projecta in Aere volvantur etiam; nempe, quia pars aeris ea quæ projecti partibus inferioribus obviat sit, humilior sit adeoque pauxillo crassior, magisque propterea renitatur, quàm quæ superioribus.

11. Quamquam, & id etiam aliunde fieri possit, nempe ob impetum in projectione impressum. Cum enim quæ ex Fundâ (verbi gratiâ) projiciuntur, circulari motu prius lata fuerint, quàm relictâ fundâ per istius circuli tangentem procedant; projecti partes ab hujus circuli centro remotiores, majores propterea circumferentias eo motu descriperant, adeoque velocioris motus conceperant impetum, quàm quæ propiores; qui quidem impetus inæquales, ubi ex peripheriâ ad rectam tangentem transitur, volutionem inchoant, (projecti centro per rectam procedente, partibusque superioribus concitatus reliquis,) eademque cepta, cum nihil impediât, perseverat, (per prop. 11. Cap. 1.) Intelligatur enim (ut Schemate rem exponam,) Fundâ C B A, Fig. 268. versari A B projectile, circa C centrum motus, in situm $\alpha\beta$; ibique desertâ fundâ, centro suo c (quod prius arcum descriperat c) secundum rectam tangentem $\kappa\tau$ deinceps ferri. Cum itaque majorem impetum conceperit A, per A α arcum majoris circuli delatum, quàm B per similem circuli minoris arcum B β : ubi ad parallelas rectas $\alpha\tau$, $\beta\tau$, perventum erit; impetus in α velocior quàm in β , volutionem protinus inchoabit, circa centrum κ ; eademque, non impedita, perseverabit: ut dictum est. Idemque, si non semper, non rarò tamen, in aliis projectionibus contingit.

12. Quod autem facit in Cylindris, Rotis, Sphæris, &c. humi volutis, Asperitas Soli; idem facit in Trochlearum Orbiculis Asperitæ Funis ducarii, ejusque propterea cum Orbiculo cohæsiō. Unde fit ut facilius cum Fune convertatur Orbiculus, quàm manente Orbiculo solus Funis ducatur. Quod & in aliis similibus conversionibus pariter obtinet.

13. Dico

Fig. 265. 13. Dico porro; ob eandem quam diximus superficierum Asperitatem esse, quod Cylindri Rotæve aut Sphæra mole majores, (sed pondere æquales;) facilius volvantur quam minores.

14. Intelligentur enim in eandem asperitatem seu eminentiam PO impingere, $A B$ Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) major, atque $\alpha\beta$ minor: Quæ quidem eminentia PO (quò possint $A B, \alpha\beta$, procedere) vel superanda erit, vel depressenda, vel propellenda.

Manifestum primo est, cum sic impingit $\alpha\beta$, propius esse ad P punctum β ; quam est punctum B , cum sic impingit $A B$. Si enim intelligeretur β in B , totus circulus minor (propter murum contactum in B) intra majorem esset; adeoque ad O non pertingeret; ut in fig. 267. (& minus adhuc, si esset β ultra B .) Adeoque (quò superetur eminentia PO) Accilivior erit Ascensus (& propterea difficilior, per 25. Cap. 2.) à β ad O , quam à B ad O . Et quidem illic per Circuli minoris Tangentem OT ; hic per Tangentem majoris OT .

15. Vel etiam sic idem aliàs colligitur. Facto O centro motus, circa quod (quò superetur punctum O) rotanda sint $A B, \alpha\beta$; seu, quod tantundem est (per prop. 16. Cap. 4.) eorundem Centra gravitatis C, γ ; in peripheriis $Cc, \gamma\gamma$: eadem erit Obliquitas motus in punctis C, γ , quæ est Tangentium $CT, \gamma\tau$; (quæ quidem ipsis $OT, O\tau$, parallelæ sunt.) Adeoque cum major sit Obliquitas in CT quam in $\gamma\tau$; (propter angulum $O\gamma\beta$, majorem angulo OCB , ut mox videbitur;) etiam facilius Ascensus erit. Et quidem in ea ratione facilius movebitur C , quam γ , (hoc est, $A B$ quam $\alpha\beta$), quam habet Secans Anguli TCA hoc est COV , vel TOP ; ad Secantem Anguli $\tau\gamma\alpha$, hoc est γOV , vel τOP ; (per prop. 25. Cap. 2.) hoc est (quippe hæc eadem est ratio) in reciproca ratione Complementorum; (Nam Secantes Angulorum sunt Complementorum Sinibus proportionales: Nempe in fig. 42. ut FT ad FS , seu FV ad FO , hoc est FV ad FB , sic est FQ ad FR ; ut ad prop. 14. Cap. 2. ostensum est:) hoc est, ut Sinus Anguli $O\gamma\beta$, vel OTP ; ad Sinum Anguli OCB , vel OTP . Quæ quidem nec eadem est cum ratione Diametrorum; neque eadem ubique ratio; sed alia atque alia pro variâ ipsius PO altitudine. Sed quò minor est altitudo PO , adeoque & minores anguli $OCB, O\gamma\beta$; eo minor hinc est inæqualitas: eademque, si consideretur P vel O in ipsis $B \beta$ punctis, protinus evanescit.

16. Manifestum item est, Arcum βO majorem esse (proportione ad

ad suam peripheriam integram) quàm est (ad suam) BO . Quippe PO , hoc est BV , vel βv , sinus versus erit arcus (proportione) majoris in circulo minore, quàm in majore. Adeoque (junctis CO , γO ,) major erit Obliquitatis Angulus $\beta \gamma O$, quàm BCO . Et propterea, si deprimenda sit PO eminentia; fortius ad hoc valebit Ponderis idem Cylindri (Rotæve aut Sphæræ) majoris, prementis secundum rectam CO minus Obliquam, quàm minoris, prementis secundum magis Obliquam rectam γO : per prop. 21, vel 25. Cap. 2. (Quippe ibidem, quoad hoc, censendum erit Grave constitutum, ubi est ipsius Centrum gravitatis; per prop. 16. Cap. 4.) Non quidem in eâ ratione quæ est Diametrorum, (ut ubi de Axe in Peritrochio agitur) sed in eâ quam habet sinus Anguli COV , ad sinum anguli γOV , (per prop. 21. Cap. 2.) quæ alia atque alia erit, pro variâ altitudine rectæ PO , manente eadem Diametrorum ratione. Sed inæqualitas continuò minor, prout PO propius est ad puncta B, β ; atque, in his, protinus evanescit.

17. Estque hic forsan angulus BCO vel $\beta \gamma O$, quem vult Aristoteles cum dicit, *Angulum majorem circuli, nutum quandam habere ad angulum circuli minoris*: (quod Interpretes alio trahunt; putà, ad Angulum Contactus, vel Angulum Semicirculi, &c. de quibus videantur Monantholius, Baldus, Guevara;) Nam & minor est angulus BCO quàm $\beta \gamma O$, adeoque C directius imminet; & obliquior angulus OP quàm γOP , adeoque C minus offendet. Si vero de Angulo contactus intelligeretur, plus offenseret rota vel sphaera major quam minor quia pluribus subjectis partibus simul incumbit Cylindrus seu Sphaera Materialis; ut post dicetur.

18. Sive igitur Superanda sit, sive Deprimenda, eminentia PO ; (quorum, ut plurimum, vel alterum vel utrumque faciendum erit, quo volutio continuetur;) magis ad hoc valebit Cylindrus seu Rota major, cæteris paribus, quam minor. Idque magis in eminentiis majoribus quàm in minoribus.

19. Sin abruptenda esset eminentia PO , vel Propellenda: cum hoc per pulsum lateralem faciendum sit, & potissimum in Horizontali recta, ut VO , secundum quam (vel huic parallelam) sit tractio horizontalis; (quæ magis hic spectanda est quam perpendicularis pressio;) id potius fiet per rectam γO , (quæ à situ horizontali minus recedit,) quam per CO . Adeoque, hoc respectu, Cylindrus (vel Rota) minor, prævalebit majori. Verum hoc in hujusmodi volutationibus rarius contingit, & vix nisi in altioribus obstaculis. Sed eminentiæ minores, vel deprimi solent, vel superari, potius quam propelli;

cui

cui magis conducit (ut jam est demonstratum) major quàm minor Rota vel Cylindrus.

20. Sed & alia consideratio est, quæ Majori favet præ Minore: Nempe dum ab eminentiâ unâ ad alteram transitur, magis deprimitur minor quàm major Rota seu Cylindrus: Adeoque plus illi ascendendum erit (quoniam ex depresso valle) quo secundam superet. *Fig. 266.* Sinto enim (ut in *fig. 266.*) eminentiæ duæ, *M N*, & *P O*: quarum quum altera superata est sed nondum reliqua; manifestum est (propter majorem in arcu minoris circuli curvedinem) altius depressum iri & quàm *B*, (adeoque & Centrum γ quàm *C*, totumque propterea Solidum;) Adeoque non modò Acclivorem sed & Altiolem ascensum habebit Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) minor quàm major. Hic itaque facilius volvetur.

21. Huc accedit & alia ratio. Utut enim Circulus Mathematicus supponatur Planum in Puncto contingere; in Corpore tamen Physico res secus esse solet. Quippe Corpus grave deprimit gravitate suâ subjectam planitiem; & quidem plus minùve pro majore vel minore pondere cæteris paribus. Intelligatur itaque Cylindrus seu Rota minor (*fig. 267.*) planitiem *N V O* deprimeret usque ad *B* vel β . Necessè itaque est ut subjectæ materiæ tantundem deprimat seu loco suo pellat (quo sibi locum paret) quantum est Segmentum *Q R B*. Quò autem major eò penetrat, tantundem deprimendum erit seu loco pellendum, quantum est segmentum *N O B*: quod segmento *Q R B* majus est. Hoc itaque ut fiat, majore Pondere opus erit. Ponitur autem utriusque Pondus æquale. Non igitur fiet. Non itaque tam altè penetrat Cylindrus seu Rota Major, quàm penetraverat minor: Adeoque & hoc nomine facilius volvetur.

Atque hætenus Cylindrum seu Rotum consideravimus ut Grave; pondere suo vel agens vel renitens: Atque eâ ratione Majorem facilius motum iri quàm Minorem ostendimus: Et, quibus de causis id fiat.

22. Potest autem, seclusâ illâ Gravitatis consideratione, ut Vectis considerari; non quidem quatenus hoc ipsum Solidum, stante Obice; sursum movendum sit quò superetur obex, (quippe hac ratione considerandum erit ut Grave movendum;) sed quatenus amoliendus est *Fig. 265.* Obex iste seu Obstaculum *P O*. Intelligatur enim (in *fig. 265.*) *AB* vectis, cujus fulcrum *B*; sitque Vis applicata sive in *A*, sive (ut in Cylindris plerumque fit) in *C*: & pondus movendum, seu Obex amoliendus, in *V*; non quidem immediatè, sed mediante rectâ inflexili *V O*. (Eademque de α ν γ β , quæ de *A C V B*, intelligantur.) Erit

erit igitur, (per prop. 2. Cap. præced.) ut AB vel CB , ad BV hoc est PO ; sic Vis in A vel C , ad huc æqualem in V , vel O . Atque similiter, ut $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$, ad βv , hoc est PO ; sic vis in α vel γ , ad eandem in v vel O . Et consequenter (propter eosdem consequentes) ut AB vel CB , ad $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$; sic vis in A vel C , ad eandem in α vel γ applicatam. In eadem igitur ratione (nempe Diametrorum, vel Semidiametrorum,) facilius movebit vis eadem Cylindrum seu Rotam Majorem AB , quam Minorem $\alpha\beta$; quantum ad amoliendum obicem PO . Atque hoc, ubicunque contigerit obstaculum PO ; puta, siue propius siue remotius à puncto B , vel β .

22. Verum hic nulla ratio habita est Ponderis in utrovis Cylindro, (nisi quod hujus ope puncta B , β , fixa sint tanquam ab Hypomochlio seu Fulcro, ne resiliant;) sed restarum solummodo AB $\alpha\beta$, tanquam vectium nullius ponderis. Neque ad onus movendum, sed ad amoliendum obicem tantummodo spectatur. Sin spectetur Onus ipsum, quod tanquam in C vel γ constitutum (quæ centra gravitatis sunt) intelligendum erit: nihil hinc emolumenti habebitur. Quippe eadem utrobique ratio erit tum AB vel CB ad CB , tum $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$ ad $\gamma\beta$. Adeoque si Vectium AB , $\alpha\beta$, Fulcra intelligantur B , β , & Pondera movenda in C , γ ; Vires autem vel in A , α , vel in C , γ : quæ Ponderi æquipolleat Vis utrobique vel dimidia vel æqualis erit.

24. Sin concipiatur AB vel $\alpha\beta$ ut Libra cujus Centrum motus sit B vel β : Ad quam (utpote per Centrum transeuntem) quæ utrinque ponantur solidi partes æquiponderant; adeoque ipsa AB seu $\alpha\beta$ libra, in neutram partem præponderans, quantumvis parvo pondere (nisi quod medii resistentia, solique inæqualitas quæ detinetur, impedirent,) in utramvis partem moveri posset: Vis applicata in A vel C , (utpote à Centro motus remotior,) in eadem ratione plus valebit, quam in α vel γ , quæ sunt ipsæ AB vel CB longiores quam $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$: per prop. 12. Cap. 3. Ob quam rationem etiam ostendimus, longiorem Libram exactiorem esse; Schol. prop. 14. § 6. Atque ad hoc respexisse videtur Aristoteles quum eandem hic valere rationem dicit ob quam longiores Libræ sunt brevioribus exactiores.

25. Estque hæc consideratio etiam Trochlearum Orbiculis communis; sed cum hoc discrimine: In Cylindris Sphærisque humi volutis, Obstacula seu Impedimenta motus (ob soli asperitatem) sunt in ipsarum orbitis, puta prope B , β ; quæ itaque pro Fulcro, seu Libræ motusque Centro habentur; ut dictum est: Sed in Trochlearum Orbiculis, quorum ambitus ab offensionibus liberi sunt, motus Impedimenta sunt ad Axem, circa quem immotum voluntur Orbiculi; & præ-

Fig. 267.

praesertim, in Orbiculis illis qui sunt in Trochlearum parte superiore, ad superiorem Axis partem super quam incumbit Orbiculus, moléque suâ & dependentis ponderis eam premit; ad partem verò Axis inferiorem (ob similem rationem) in Orbiculis illis qui sunt in Trochlearum parte inferiore. Quæ hinc oritur Frictio, impedit quò minus Orbiculus circa Axem suum expedite volvatur.

26. Et quidem eò magis, quò Axis major est; propter majorem propterea frictionem. Quod quidem eatenus verum est, ut existimaverit Baldus ob hanc solam causam expeditius moveri Orbiculos majores quàm minores, quoniam Majorum Axes in minori ut plurimum sunt ratione ad Orbes suos quàm sunt Axes Minorum: quod si Diameter Axis ad Diametrum Orbiculi sit in eadem ratione in majoribus atq; minoribus Orbiculis, nihilo facilius motum iri existimat majores quàm minores Trochlearum Orbiculos. Nempe, si intelligatur Orbiculi Centrum pro Vestis Fulcro, Virêsq; ad supremum diametri punctum applicatas, & Frictionem hanc seu adhesionem pro Onere submovendo; in eâ ratione plus minúsve valebit, Vis ad Onus submovendum, quâ major est aut minor Semidiameter Orbiculi ad Axis Semidiametrum. Puta, Si sit, ut CB ad CA, fig. 269, sic (reciprocè) Vis in A, ad impedimentum à frictione ortum in B; Vis Impedimento æquipollebit, eademque aucta præpollebit, adeoque movebit: Arque hoc perinde sive in majore sive in minore Orbiculo.

27. Quam quidem Demonstrationem ego admitto. Verum hoc addo; Augmentum illud Virium quicquid sit quod supra Æquipollentiam accedit, plus valiturum in Radio majore quàm in minore; utpote ad Libram in majori à Centro motus distantia applicatum. Ut modò ostensum est, ex Cap. 3. prop. 12. & Schol. prop. 14. ejusdem.

28. Eademque Frictionis consideratio quæ ad Axem fit, (præter eam quam ante consideravimus Soli Asperitatem,) in Plaustrorum Curruumve Rotis non minùs locum habet quàm in Trochlearum Orbiculis. Nam Axium extrema quæ Rotarum Modiolis immittuntur, onere pressa, ita premunt foraminum imò, ut non possit sine Frictione converti Rota circa Axem suum, in parte præsertim inferiori. (Quam causam assignat Aristoteles, *Mechan. Quest. 11. Cur super Scytalas*, quales R, S, fig. 258. nos (*Rollers* vocamus) *faciliùs gestantur opera, quàm super curru*; nempe ob evitatam axis frictionem. Et quidem ad Axem majorem major erit Frictio, majúsque ex Frictione Impedimentum. Eâque Frictio majorem quæ æquipolleat vim postulat, ubi major est Diametri Axis ad Diametrum Rotæ ratio; ob eandem causam

sam quam in Trochlearum Orbiculis jam ostendimus. Quodque supra æquipollentiam accedit virium Augmentum, perinde in majoribus Rotis, atque in majoribus Trochlearum Orbiculis, plus valebit quam in minoribus; atque ob eandem causam.

29. Neque huic adversatur, quod Trochlearum Axes fixi maneant, Axes Rotarum promoveantur. Quippe, dummodo Centrum Conversionis (quem motum solummodo hic consideramus) in Axe sit; perinde est sive manente Solo promoveatur Axis (ut in Plaustrorum Rotis;) sive (ut in Trochlearum Orbiculis) manente Axe ducatur Funis tractorius; sive etiam utrumque fiat. Quaque de Rotarum Axibus dicta sunt; eadem etiam Cylindris aliisve faciliè accommodantur, ubi tractions per Axes fiunt.

30. Superest adhuc alia ratio, etiam à Frictionis hujus consideratione petita, quæ majoribus Rotis (Cylindris, Tympanis, Orbiculis, Sphæris, &c.) præ minoribus favet. Posita nempe eadem utrobique axis magnitudine; quod ex Frictione oritur Impedimentum, non modo difficilius in Rotâ minore superatur (ob causam jam traditam;) sed & hoc sæpius repetendum erit. Cum enim tantundem tractione promoveri soleat Axis in unâ Rotæ conversione quantum ipsius Rotæ ambitum proximè æquet; sæpius eodem tractu converti oportebit Rotam minorem quam majorem, totamque integræ conversionis frictionem sæpius repeti: & quidem in eadem ratione sæpius quàm minor est rotæ ambitus. Et propterea, ob frictionem sæpius repetendam, difficilius movebitur Rota minor.

31. Atque hinc est quod Plaustrorum Curruumque Rotæ & Axes anteriores (cum minores esse soleant) citius terantur, sæpiusque reparari debeant, quam majores. (Cui tamen nonnihil conferre potest, quod cum Axis prior minùs Altus sit quam posterior, ideo magis premitur, cæteris paribus, ab onere quod utrique incumbit. Ob easdem causas quas Cap. præced. assignavimus, cur duobus Fulcris inæqualiter altis incumbens Vestis, depressius magis premat.) Eademque Trochlearum Orbiculis faciliè accommodantur: quippe, dum tantundem elevatur pondus, sæpius convertendus erit Orbiculus minor, cæteris paribus, quam major; adeoque & difficilius.

32. Atque hætenus de Cylindrorum, Rotarum, Tympanorum, Sphærarum, &c. conversionibus egimus, tum cur fiant, tum cur in Majoribus facilius fiant quam in Minoribus, cæteris paribus. Quorum utriusque causas conjecimus in superficiæ Asperitatem, atque hinc ortam Cohæsionem; sive quâ cum Solo (aut quod hujus instar est) cohæret Orbita exterior; sive quâ cohæret Axis cum eo cui immittitur

mittitur Foramine. Quippe si nihil horum esset; nihil est cur tracta Rota non recta procederet absque volutatione, Funisque ductorius immotus Trochlearum Orbiculos praterlaberetur, atque in reliquis similiter. Et quidem, nisi hoc esset, (nec impediret medii resistentia) Rotam quantumvis gravem, Vis quantumvis exigua, in situ Horizontali, vel traheret vel propelleret: in situ vero Declivi, etiam nullâ Vi adhibitâ, ferretur sponte suâ: in Acclivi verò, eâ saltem Vi quam postulat tracti Pondus cum Acclivitatibus gradu comparatum; (per ea quæ tradimus Cap. 2. prop. 27.) nullâ habitâ ratione vel Magnitudinis vel Figuræ; nullâque volutatione superadditâ.

Fig. 270. 33. Restat alia non ob similis Quæstio; nempe, *Cur Plaustrorum Curvatura Rota Anteriores sint Posterioribus Minores*; atque cui bono hoc sit.

Videri fortè possit nonnullis, id fieri propter Declivem Plaustri positionem; quali cum B rota præcedens humilior sit quàm sequens A; Plaustrum per A B rectam descendere proclive sit. Atque hoc quidem valeret, si, manentibus A B rotis, labi oporteret Plaustrum secundum A C B rectam. Quippe tum deorsum ferretur C Centrum, totumque Grave; fieretque Centro terræ propius. Verùm ut jam res habet, omnino secus est. Cum enim simul ferendum sit Plaustrum cum Rotis, putâ à situ A C B in situm $\alpha \gamma \beta$, (Centro-gravitatis C describente rectam Horizontalem C γ), nullus hoc motu acquiritur Descensus, adeoque nulla est ad illum propter Gravitatem propensio: per prop. 9. Cap. 2. vel prop. 16. Cap. 4.

34. Aliunde igitur petenda est ratio. Et quidem, quantum ad Rotarum posteriorum altitudinem, res ex antè dictis jam satis patet. Quoniam (præterquam quòd hac ratione Plaustrum altiùs ex luto elevatur) Majores Rotæ faciliùs moventur quàm minores; ob rationes jam tractatas.

35. Quòd verò Anteriores Rotæ minùs Altæ sint, duæ saltem sunt causæ. Prima est, quoniam, cum propter viarum flexus Plaustra sint sæpenumero nunc dextrorsum nunc sinistrorsum ducenda; huic conducit multum anteriorum Rotarum parvitas; Quippe si anteriores eadem essent magnitudine cum posterioribus; incommode admodum fierent ejusmodi flexiones, & non nisi magno circuitu facto. Quòd vel Aurigæ, experimento docti, restabuntur: ipsaque Plaustrorum inspectio satis docebit.

36. Altera paulò altiùs petenda est. Considerandum itaque est, Lora, quæ Plaustrum Equis alligant, affixa esse (saltem medietatè) ad Axem.

Axem anteriorem ejusve Capita; saltem non inferius quam sit Axis ille. Cumque Applicationum puncta virium ad Pondus ibidem censa sint: si Axis ille tam altus sit quam Pectus Equi; linea tractus (secundum quam Vis applicatur) puta BD , Horizontalis esset. Et propterea, dum per planum Horizontale trahatur Plaustrum, erit ea virium Directa Applicatio, (cum eadem sit *Directio Motus* seu Virium Applicatarum, & *Directio Motus*.) Sed quoniam non ita complanatae sint Viae, quin subinde superandi sint Montes, & Colles, variaque Asperitates & Eminentiae, (ut TO , vel PO ;) quod nisi per acclivem Ascensum fieri non potest: ubi hoc contingit, Directa Applicatio non ea est quae est Horizonti TP parallela; sed quae est parallela Acclivitati TO . Cum itaque praeter tractum Horizontalem, huic etiam casui prospiciendum sit; idque eo magis, quoniam Pondus per Acclive difficilius trahitur quam per Planitiem, Commodum igitur deprehensum est ut Axis anterior, depressior sit quam Pectus Equi; quò BD recta (secundum quam Vis applicatur) sit parallela potius Acclivitati TO ; (saltem, ut propius ad parallelismum accedat quam si tam altus esset Axis quam Pectus Equi, nedum eo superior.) Sic utique directius eo loci Vis applicabitur, ubi plus opus est Virium; neque Attrahendum tantummodo, sed Attollendum pondus erit; seu Elevandum. Atque hoc eo magis faciendum est, ubi per tesqua & falebras, viasque inaequaliter asperas, quam ubi per Planitiem trahendum est Plaustrum.

Fig. 271.

37. Atque ad hunc etiam locum spectare poterit; ut reddatur ratio, cur quae declivi plano incumbunt Gravia, si Rotunda sint, descendendo Volvi soleant; Labi verò, si planis terminentur: atque illa facilius quam hac moveri.

Fig. 272.

38. Intelligatur enim Q grave declivi plano incumbens, superficie suâ planâ AB : sitque à sui Centro Gravitatis perpendicularis ad declive planum QR , ad Centrum Terræ QP , declivi plano occurrens supra B . Manifestum est (ex Schematis inspectu) non posse deorsum Volvi Q grave; nisi, facto B Centro motus, radio BQ describatur peripheria, cujus supremum punctum erit S in rectâ BS ipsi PQ parallela seu ad Horizontem rectâ; & Centrum gravitatis Q per QS arcum continuò ascendere; per prop. 20. Cap. 2. Et (ascendente Centro gravitatis) ascendere ipsum grave, per prop. 16. Cap. 4. Non igitur ob Gravitationem Volvetur circa B punctum permanens. Labi verò potest, (lato Q Centro in rectâ ipsi AB parallela,) quoniam sic labendo descendet Q . Et quidem actu labetur, si tanta sit in eâ declivitate Gravi-

Gravitatis Vis ut superare possit impedimentum (de quo supra aliquoties dictum) ex coherentiâ, indeque ortâ Frictione.

39. Si verò, ut in Gravi T, recta à sui Centro Gravitatis ad terræ centrum TP, declivi plano occurrat infra B: Volvendo descendet (& quidem potius quàm Labendo, ob vitatam frictionem.) Quoniam peripheriæ Centro B, radio BT, describendæ, supremum punctum S erit in B rectâ, ipsi PT parallela; arcusque ST descendens: (per prop. 20. Cap. 2.) adeoque præcipitabitur Gravis T. Saltem nisi declivitas plani AB, seu rectæ huic parallelæ à T labente describendæ, tanta sit, ut gravitatis Vis in illâ declivitate eo excessu superet impedimentum à frictione ortum, ut excessus hic præpolleat Vi Gravitatis in eâ declivitate quam habet arcus ST in puncto T; hoc est, (per prop. 15. Cap. 2.) quam habet Recta arcum in T puncto contingens.

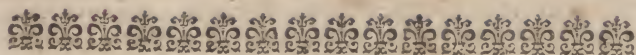
40. Si B & P coincidunt, perinde est ad utrumvis casum referas. Volvetur autem, non Labetur; ob Frictionem Impedientem.

41. Singrave, ut V, Sphæricum sit; (seu quod hujus instar est;) propter idem punctum AB, recta VP (ad horizontem recta) declivi plano infra B semper occurret; sed & Declivitas Centri V Volventis (propter BV declivi plano rectam) eadem erit atque V Labentis. Volvendo igitur (ob sic vitatam frictionem) non Labendo descendet.

42. Quodque facilius moveatur V quàm Q, manifestum item est. Quoniam, cum eadem sit Declivitas Volventis V, atque Labentis Q; sitque in Q (cum non possit nisi Labendo descendere) superandum Impedimentum à Frictione ortum, sed non item in V: facilius movebitur (cæteris paribus) V quàm Q.

43. Sed & facilius quàm T: propter Declivitatem Volventis V (eandem utique quæ est declivis plani) majorem quàm Volventis T.

44. Intellige; Nisi angulus TBP; vel Rectus sit, (coincidentibus RB;) quo casu eadem erit Volventis T, atque Volventis V, declivitas: vel Acutus, (R infra B cadente) quo casu major erit Declivitas Volventis T, quàm Volventis V; adeoque & facilius volvetur T quàm V.



CAP. VIII.

De Trochlea, seu Polyspasto.

DEFINITIO.

Ex Orbiculis (uno vel pluribus) aptè dispositis, circa axes suos volubilibus, quibus circumpositus Funis Ductarius pondus attrahit (seu quod tantundem est) compositum Instrumentum, Trochleam appellant.

A Τρέχων, τροχός, τροχάδης, descendunt τροχάλειον, τροχάλεια, τροχάλεια, τροχάλεια (quâ voce utitur Aristoteles in Mechanicis) ejusdem fere significatus omnia, atque hinc Latino-rum Trochlea. Pappo πολύσπαστον dicitur à multiplici tractione. Nostri (à pull vello) Pulley appellant.

PROP. I.

Si Trochleæ Orbiculus singularis sit, & loco suo fixus; Vis Funi ductario applicata, Ponderi seu Impedimento amovendo æqualis, æquipollet: Adeoque sustinebit, atque aucta movebit, minuta verò ne sustinebit quidem.

PUltà, si Orbiculo CA, circa Centrum seu Axem C volubili, ex Fig. 273. Unco dependenti (aliàsve sic fixo ut inde non amoveatur,) circumponatur Funis ductarius VAP, cui applicetur Vis in V, Pondus in P: Manifestum est, (nisi solvatur, rumpatur, extendatur funis, aliudve accidat

630 *De Trochlea, seu Polyspasto.* CAP. VIII.

accidat simile, quod non supponimus,) quantum funis extremum V Vi trahitur secundum directionem suam, tantundem ascensurum extremum P cum annexo Pondere, contra suam. Et propterea (per prop. 7. Cap. 2.) si æqualia sint Vis & Ponderis æquipollebunt, sin secus, præpollebit quod majus est. Unde constat propositum, per prop. 11, 12. Cap. 1.

SCHOLIUM.

Fig. 273. **I**ntelligitur hæc propositio (ut & sequentes, quod moneo ne idem sæpius sit repetendum,) potissimum de Gravi directè dependente, ut P: Ubi scilicet Vis & Ponderis agunt ut Vires contrariæ, (juxta prop. 12. Cap. 1.) Si verò Gravis, ut π , situ Obliquo ferendum sit: Minuetur Ponderatio pro gradu declivitatis, (juxta prop. 19. Cap. 2.) Atque de Pondere sic minuto procedit propositio. Si verò pondus P movendum Humi jaceat, aut (ut in p) tractu horizontali ducendum sit, (ubi impedimentum ex scabritie ortum solummodo superandum sit,) vel Obex aliquis amoliendus sit, aliudve Obstacle quod Impedimenti tantum rationem habeat, non Vis contrariæ; Vi sustentrice in V non opus erit (cum Onus illud intelligatur vel non niti in contrarium, vel ne eò feratur aliunde sustineri;) sed, quò moveatur, non minus requiritur, Vis æquipollente major. Aliæque ejusmodi sic intelligenda erunt ut in Capite præcedente.

Orbiculorum verò usus in Trochleis adhibetur, non tam propter rationem aliquam purè Mathematicam, quàm propter rationem Physicam; ob corporum scabritiem. Quippe si tum Orbiculi tum Funis ductarii superficies essent tam Mathematicè Politæ ut nulla foret ad invicem adhesio; quin posset Funis tam expedite labi, quàm Orbiculus converti: Demonstratio non minus procederet de C A Orbiculo (aliòve duro corpore) permanente, quàm circa C converso. Cum verò (ut ad Cap. præced. ostensum est) hæc corporum Frictio, seu Abrasio mutua, impedimento sit ne expedite moveatur Funis; sit que hæc major futura si in A permanentem fieret, quàm si circa axem C exiguum; (ob rationes in Cap. præced. ostensas:) hinc est, quòd Orbiculorum usus sit ad motum expedite faciendum apprime utilis.

Manifestum item est, ob hujusmodi Orbiculum singularem, loco suo fixum, (intellige, ita ut inde non amoveatur, utut inibi circa axem volvatur;) sed neque ob plures sic fixos, (ut post dicetur, & quidem ob eandem rationem;) nullam in V virium requisitarum minutionem inferri: cum Vis eadem in F, non minus quàm in V, si ponderis æqualis

PROP. II. De Trochlea, seu Polyspasto. 631

lis sit, sustinebit; si major, movebit.) Potest tamen ob causas alias usui esse hic Orbiculus. Quippe fieri potest, ubi Vis Humana (verbi gratiâ) applicanda sit, ut, propter commodiorem corporis situm, vis ea possit fortius exeri in V quam in F: Vel etiam, in V, non modò vis nervorum (quæ sola poterit in F applicari) sed ipsum Ponderus humani corporis applicari ad contrarium Ponderus in P tollendum: Vel denique ob alias circumstantias, (quæ præsentì considerationi omnino sunt extrinsecæ, nec possunt facillè numerari,) non parum adjumenti poterit accedere:

Quod autem Orbiculorum magnitudinem aut parvitatem spectat; ex Scholio propositionis ultimæ Capitis præcedentis petendum est.

PROP. II.

Si Trochleæ Orbiculus singularis, Ponderi conjunctus sit, & cum eo trahendus; eique circumpositi Funis ductarii extremum alterum Unco (vel aliàs) fixum sit, alteri Vis Motrix applicetur: Æquipollebit Ponderi (seu Impedimento amovendo) Vis *Dimidia* (directè applicata:) adeoque sustinebit; atque aucta movebit; minuta verò ne sustinebit quidem.

Cum enim, Ascendente Orbiculo, ejusve Centro C, (unà cum annexo Pondere,) tantundem ascendat T punctum contactus Orbiculi Funisque VT, atque ob eam rationem tantundem promoveatur secundum directionem suam Vis motrix V: Sed & tantundem ascendat punctum contactus Orbiculi ejusdem cum fune pensili HF (ab F puncto fixo ad orbiculum in H pertingente,) & propterea tantundem abbrevietur funis FH; quantum autem funi FH ita demitur, tantundem vertente Orbiculo transferatur ad funem TV, qui propterea tantundem prolongatur: Hinc fit, quod Ascensus puncti V, (seu promotio Vis motricis secundum directionem suam,) Duplus sit ascensus Centri C, ponderisve P. Quippe tantundem promoveatur V propter ascensum puncti T; atque secundà vice tantundem propter prolongatam TV rectam. Sed Ponderis P Ascensui, æquipollet Vis Dimidiæ Ascensio Dupla; per prop. 5. Cap. 2. Ponderi itaque in P æquipollebit Vis Dimidia

Fig. 274.

M m m

in

in V. Adeoque (per prop. 11, 12. Cap. 1.) sustinebit, & aucta movebit, minuta verò nequidem sustinebit.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est, (præter ea quæ ad prop. præced. monuimus,) Ubi *Vim directè applicandam* dicimus; quò hoc fiat, requiri (illud utique hoc loco intellectum volumus) ut rectæ VT, FH, sint ipsi CP (directioni mobilis) parallelæ. Quippe, si parallelæ non sint; erit, pro obliquitate diversâ, alia atque alia ratio tum tractionis secundum rectam TV, tum contractionis rectæ HT, ad ascensum C vel P: Et quidem (manentibus FV Punctis per quæ transeat funis) prout altius attollitur C vel P, Obliquitas ea continuò variatur. Verùm ea consideratio non tam huius loci est, quam ad Caput secundum spectat, ubi de motum Obliquitatibus agitur. In Trochleis enim Chordæ vel parallelæ esse solent, vel tantillum à parallelismo declinare ut pro parallelis habeantur.

PROP. III.

Si Trochleæ Orbiculi plures sint; Calculo æstimabitur, ex Orbiculorum positione, quanta Vis exposito Ponderi æquipolleat; quæ & aucta movebit.

Nempe; Vis ea quæ est ad Pondus in reciproca ratione istius quam habet Virium in V Promotio ad Ascensum Ponderis in P.

Hoc est; in fig. 276. Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 8, 16, &c. (Geometricè proportionales) prout Orbiculorum numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 277, 278. (ubi Funis ductarius terminatur in puncto fixo, ut M.) Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 6, 8, &c. prout Orbiculorum infra positorum (cum Pondere tollendorum) numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 279. (ubi ductarii Funis extremum cum Pondere trahendo connectitur ut in K,) Vis ad Pondus, ut 1 ad 1,

PROP. III. *De Trochlea, seu Polyspastus.* 633

1, 3, 5, 7, &c. prout numerus Orbiculorum infra positorum est 0, 1, 2, 3, &c.

Casus I.

NAm, in Fig. 276. (per prop. 2. hujus) Vis in V æquipollet ejusdem duplo in A: Item, Vis in A, hujus duplo in B: Et Vis in B, ejusdem duplo in C vel P. Atque sic porro quotcumque fuerint Orbiculi. Putà, Si Vis in V dicatur V ; tantundem valebit, atque $2V$ in A; vel $4V$ in B; vel $8V$ in C vel P: (Atque sic porro quotusque opus fuerit.) Hoc est, Vis in V, æquipollebit Ponderi in P, quod ad eam sit in rationis duplæ ratione toties multiplicatâ quot sunt Orbiculi: Nempe, in ratione Duplâ, Quadruplâ, Octuplâ, Sedecuplâ, &c. prout numerus Orbiculorum sit, 1, 2, 3, 4, &c.

Fig. 276.

Casus II, & III.

In Fig. 277, 278, 279. ubi Funis Ductarius V A B C, &c. singulos Orbiculos circumdans pertingit ad V punctum applicationis Virium: Si intelligatur Ponderis pendere ex B (continuato fune A B ad Ponderis P vel O P Q, ibique terminato,) Vis æquipollens in V vel A ad Ponderis P erit ut 1 ad 1, per prop. 1. hujus.

Fig. 277,
278,
279.

Si A B orbiculum B C (ex quo dependeat Ponderis) circumiens figatur in D; erit (per prop. 2. hujus.) Vis in V vel A ad Ponderis P, ut 1 ad 2; eò quod, elevato Orbiculo B C (cum appenso pondere,) tantundem abbreviatur utraque restarum A B, C D; quantum autem utrique demitur, tantundem per A transit ad V; ut sit virium Promotio, Dupla ascensionis Ponderis. Idemque accideret, si funis V A B C D, orbiculum D E circumiens pertingeret ad F ibique figeretur; (non quidem ad Ponderis quod sublevandum est, sed ad clavum aliquem seu palum fixum:) Cum enim, propter F punctum fixum, recta F E neutiquam abbreviaretur, nihilque inde transiret ad D; perinde est ad Vires in V vel A; sive in F vel E figatur funis, sive in D.

Si verò Funis V A B C D E F continuatus, cum Pondere connectatur in F (ut simul cum pondere punctum F eleveatur:) propter rectas tres A B, C D, E F, tantundem abbreviatur singulas quantum est Ascensus Ponderis; omniumque abbreviationes per A ad V translatae; vel (quod eodem recidit) si abesset orbiculum V A, ultra A protractas; erit Virium Promotio ad Ascensum Ponderis, ut 3 ad 1: adeoque Vis ad Ponderis, ut 1 ad 3. per prop. 5. Cap. 2.

M m m m 2

Simi-

634 *De Trochlea, seu Polyspasto. CAP. VIII.*

Similiter ostendetur ; continuato fune V A B C D E F G ad H, ibique fixo, Vim ad Pondus (propter abbreviatis quatuor rectas A B, C D, E F, G H,) esse ut 1 ad 4. Et, continuato per I ad K, ibique cum Pondere connexo ; ut 1 ad 5. Et, continuato per L ad M : ut 1 ad 6. Atque sic porro prout opus erit. Et quidem, quoties funis extremum cum Pondere connexum est, (ut ad K,) ut 1 ad numerum imparem ; quoties extra figitur (ut ad M,) ut 1 ad numerum parem.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est ; Chordas omnes seu Rectas abbreviandas ; ut A B, C D, E F, G H, I K, L M, &c. tanquam Parallelas habitas esse. Et quanquam in Trochleis non raro contingat, (ut in fig. 278, 279.) ut à Parallelismo nonnihil recedant ; eo quod Orbiculi inæquales esse soleant, quoniam si invicem æquales essent coinciderent Chordæ seque invicem impedirent : tantillum tamen illud est, ut negligi soleat.

Norandum item, Orbiculos superiores, loco suo fixos esse, (quique ad hos, aut horum syntagma, alligatur funis, perinde est ac si ad clavum extra positum figeretur :) Inferiores autem (eorumque syntagma) cum Pondere connexos esse, & juxta cum illo attrahi. Ab horum itaque, non ab illorum, numero determinatur Virium Potentia.

Trochlea fig. 278. tantundem valet cum illâ fig. 277. sed ad formam commodiorem redacta ; & quæ ad praxin adhiberi solet.

PROP. IV.

Trochleam ita construere, ut Pondus sit ad Vim æquipollentem, in datâ Multiplicum ratione.

Fig. 278, 279. **S**I data Multiplicum ratio à numero *Pari* denominetur, (ut Dupla, Quadrupla, Sextupla, &c.) Funis ductarii extremum remotius, extra figatur (puta ad Uncum, Clavum, Palumve, aut quiddam simile :) Si à numero *Impari* ; (ut Tripla, Quintupla, &c. aut etiam Simpla :) cum Pondere trahendo connectatur : Totidemque adhibeantur Orbiculi quot innuit præcedens Propositio. Et fiet quod imperatum est. Per ibidem demonstrata.

SCHO-

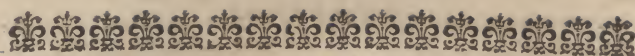
S C H O L I U M.

POssunt autem Trochleæ, non tantum supernè & situ perpendiculari suspendi, uti cum ad Pondera sursum tollenda adhibentur: sed etiam ad Tractiorem Horizontalem, seu in alio quocunque situ positam; aut etiam ad amovendum Obstaculum adhiberi. Possuntque non modo seorsim, sed & conjunctim cum aliis Organis usurpari. (Ut, ad fig. 258. junctim cum ergatâ.) Potestque horum Organorum tum singulorum seorsim (pro suâ cujusque naturâ,) tum simul junctorum, Potentia calculo æstimari.

Exempli gratiâ. Propter interpositam Ergatam inter A & P, facilitatur Tractio Ponderis in P, (seu augetur valor Virium in A,) in ratione C A ad C B; puta, ut 3 ad 1; adeoque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in P ut 3. Item, propter interpositam Trochleam inter P & Π, (cujus Chordæ abbreviandæ sint, verbi gratia, quatuor,) facilitatur porro Tractio Ponderis Π, ut 4 ad 1, respectu Virium in P; adeoque Vis in P ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 4; seu Vis ut 2, Ponderi ut 12. Ergo, propter utramque interpositam inter A & Π, facilitatur Tractio Ponderis in Π respectu Virium in A, in ratione $(3 \times 4 =) 12$ ad 1: adeoque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 12. Sed & porro, facilitatur Ponderis Q tractio, propter subiectas Scytalas sive Palangas R, S, (sive Rotulas habeat capitibus adjunctas ut R, sive non habeant ut S,) ob minorem exinde frictionem quam si humi traheretur: At, in quâ ratione sic facilitatur, non ita facile est hic determinare; utpote quod dependeat à variis materiæ circumstantiis Physicis; puta, tum Humi, tum Scytalarum, tum Ponderis his proximè incumbentis, Duritiæ, Lævore, aliisque ejusmodi, quæ prout magis minùsve ad fuerint, plus minùsve facilitant tractiorem.

Atque ad eandem formam (mutatis mutandis prout cujus Organî natura postulat) in aliis conjunctis Organis Potentia calculo æstimabitur.

CAP.



CAP. IX.

De Cochleâ.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Si, in Cylindri Recti superficie, intelligatur Recta, basi insistent, circa Axem ferri, motu æquabili: Atque interim, per longitudinem istius rectæ Punctum moveri, motu item æquabili: Quæ à Puncto sic moto describitur Curva, vocatur Helix (sive Spiralis) circa Cylindrum; Rectum, intellige.

Angulúmque quem facit hæc Curva cum Base Cylindri; Angulum Inclinationis appellamus: Et, quem facit cum Latere Cylindri, Angulum Obliquitatis.

Fig. 280. **P**Utà, Si circa Cylindrum rectum $AB\beta$, cujus basis ABB , feratur (in superficie Cylindri) recta $A\alpha$ in situm $B\beta$, atque sic porro; (ut cum describitur Superficies Cylindrica;) motu æquabili: Atque in eâ rectâ, sic motâ, feratur A punctum versùs α ; hoc est, à B versùs β ; putà, ad H; motu item æquabili: Adeoque, quâ ratione crescant AB , AB , eâdem crescant BH , BH , ubique: Curva AHH , est Helix sive Spiralis circa Cylindrum; intellige, Rectum. Angulúmque HAB , vocamus Angulum Inclinationis; & AHB , Angulum Obliquitatis.

Cylindrum autem Rectum innuimus; non quòd circa Cylindros alios non possit describi Spiralis: Sed quòd ea, quæ nobis hic usui est futura, illa sit quæ circa Rectum describitur. Et quidem, ut Cylindrus prout

prout in Elementis definitur, est *Cylindrus Rectus*, (Scalenis enim non convenit ea definitio;) sic & *Spiralis circa Cylindrum*, speciatim solet intelligi de eâ quæ est circa *Cylindrum Rectum*.

Helix autem seu *Helice*, (ἑλιξ, ἑλική, ab ἑλίσσω *volvo*,) Latine *Spiralis* dici solet, à *Spira*, *σπειρα*, atque hoc à *σπειρω* *necto*: & *Torsionem* innuit, qualem in Funibus videmus.

II.

Cylindrum Rectum, *Helicè similiter sulcatum*, *Cochleam* appellant. Et quidem *Cochleam* *Marem*, seu *Interiorem*, si sic *sulcata superficies Cylindrica Convexa* sit: *Fœminam*, seu *exteriorem*, si *Concava*; Hoc est, si *Solidi cylindricè excavati superficies Concava* sic *sulcata* fuerit.

Dicitur autem *Cochlea* Latine; Græcè *Κοχλία*, ob *Limacis* (sic Fig. 282, item dicti) aliorumque ejusmodi *Testaceorum* similitudinem. 283. Nostri *Screw*, Galli *Vis*, appellant.

Potissimum adhiberi solent *Cochleæ*, obicibus propellendis, frangendis, aut durius comprimendis, aliisque motibus Trusione factis. Atque in eum finem, *Mas Fœminæ*, hoc est *Interior Exteriori* intrudi:

Solentque forinsecus adhiberi *Manubrium* (aut quod hujus instar est) ut in *Ergatis*, aliisque similibus *Instrumentis*: Adeoque *Potentia*, *Axis* in *Peritrochio*, cum hæc *Cochleæ* conjungi.



P R O P O S I T I O N E S.

P R O P. I.

Helix circa Cylindrum Rectum, est Curva Similaris, seu Uniformis. Intellige; cujus pars quælibet cuilibet (æquali sumptæ) congruat.
Eadêmque, si intelligatur in Planum expandi Superficies Cylindrica, fiet Linea Recta: (aut plures Rectæ.) Idemque, qui priùs erant, manebunt, tum Inclinationis, tum Obliquitatis, Anguli.

Fig. 280. *S*umptâ enim (verbi gratiâ) arcui AB , æquali Bb , hoc est Hb ; Serit (propter AB ad AB , ut HB ad Hb) etiam (dividendo) ut AB ad Bb , sic recta HB (hoc est recta Hb) ad rectam bH . Adeoque (propter æquales angulos HBA , HbA), si intelligatur arcus Hb , arcui AB (simili & æquali) applicari, congruent; adeoque bH ipsi BH ; atque hoc ubique. Et propterea HH , ipsi AH ; pars quælibet cuilibet æquali. Quod demonstrandum erat.

Fig. 281. Item; si (expansâ in Planum superficiei Cylindricæ) intelligatur arcus ABb fig. 280. in rectam ABb fig. 281. extendi; cui applicentur, ut prius BH , BH rectæ: Cum sit ubique, ut AB ad AB , sic BH ad BH ; adeoque ABH , ABH , similia Triangula; erit AHH Linea Recta: Aut etiam, (si dissectâ secundum longitudinem superficiei Cylindricæ, secetur etiam Helix,) Rectæ plures. Quod itidem demonstrandum erat,

Cumque eadem omnino sit superficies ABH plana fig. 281. atque ABH curva fig. 280. nisi quod hic in singulis AB rectis parallelis fiat flexio; quæ Angulos HAB , AHB , neutiquam immutat: Idem qui priùs erant manebunt tum Inclinationis, tum Obliquitatis Anguli. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

Affectionum harum, posteriores duæ, etiam Spiralibus circa Cylindros Scalenos conveniunt; aut etiam circa solidum Prismaticum quodvis: quod ex demonstratione satis patet. Nempe si intelligatur AB , non quidem Cylindri basis circularis, sed planum Ellipticum quod ad Latus seu Axem Cylindri Rectum sit: Aut, in solido quovis alio Prismatico, Planum quodcunque fuerit quod ad Axem ejus, Latiusve, Rectum sit: Sitque ut AB ad $A'B'$, sic respectivè BH ad $B'H'$, ubique.

Sed non item Prima; quæ præter Circuli Peripheriam, atque hinc circa Cylindrum Rectum Helici, nulli ex lineis Curvis convenit.

Sed neque ita intelligendum est, quasi circa Cylindrum Rectum Helix quælibet cuilibet congrueret; (nam neque Circuli Peripheria quælibet cuilibet congruit, sed æqualium tantum circularum;) aut etiam Helicum cuilibet circa eundem Cylindrum, factarum: Sed, pars quælibet cuilibet Helicis ejusdem; vel etiam diversarum, modo Cylindri, circa quos fiunt, æquales bases habeant, sitque idem Inclinationis Angulus quem cum Cylindri base facit Helix, atque ad easdem partes.

Ab hac autem Helicis similaritate, seu situ uniformi, dependet Cochlearum usus; ut ex propositione sequente patebit.

PROP. II.

Si Cochlea Exterior (quam Fœminam vocant) ita Interiori (seu Mari) conformis sit, ut pars parti aptè respondeat, (hujus Eminentis illius Cavitatibus congruentibus, & contra;) per Exteriorem permanentem, Interior tota labetur; (partibus sequentibus in præcedentium loca continuè succedentibus:) aut etiam super Interiorem permanentem propelletur Exterior.

Fig. 282;
283.

Sequitur hæc ea Propositione præcedente. Cum enim, (propter Cochleam Helicè sulcatam, & quidem similiter,) Superficies Cochlearis (sive Interior sive Exterior) vel etiam ipsa Cochlearis Soliditas, intelligenda sit, (per def. 1. Cap. 4.) ex Helicibus circa Cylindrum

Nnn

drum rectum, adeoque similaribus, constari: Si ita constitutæ sint Cochleæ Interior atque Exterior, ut illius portio aliqua hujus correspondenti portioni ita congruat, ut illius Eminentie hujus Cavitatibus recipiantur, & contra; etiam pars alia quælibet, respectivè sumpta, similiter congruet; totaque altera per alteram transibit, (succeedentibus cujusque Helicis partibus sequentibus in ejusdem præcedentium loca, ut HH in AH, fig. 280.) Unde constat propositum.

S C H O L I U M.

NOtandum hic, utut Cochlearum tum Eminentie tum Cavitates ita plerumque fieri soleant, quasi ex Trianguli æquicruris (ut fig. 282.) vel Quadrati aut saltem Parallelogrammi rectanguli, (ut fig. 283.) ductu secundum Helicem illam, cui transversim insistat: nihil tamen impedit, quin pro Triangulo illo seu Parallelogrammo quavis alia figura Rectilinea vel Curvilinea substituatur; modò sic feratur (quod & in illis cavendum erit) ut similem ubique situm ad Helicem illam retineat, quò sulcatio sit ubique sui similis.

Atque etiam, quò Interior Exteriori conveniat, illius Eminentie hujus Cavitatibus respondere debent, (& contra,) tanquam ex simili ejusdem figuræ ductu formatæ: ut autem utriusque Eminentie ita suis Cavitatibus respondeant, non est necesse.

P R O P. III.

Datis in Cochleâ, Ambitu Cylindri, cum Inclinationis Angulo, (seu, quod hinc resultat, intervallum, secundum Cochleæ longitudinem æstimatum, duarum ejusdem Spiralis conversionum continuè proximarum;) & Manubrii cui Vis applicatur longitudine, (seu Ambitu quem Vis peragit in unâ Cochleæ conversione;) Cochleæ Vis calculo æstimabitur.

Nempe; ut est Intervallum duarum continuè proximarum Spiralis conversionum (secundum Cochleæ longitudinem æstimatum,) ad Ambitum quem Vis applicata peragit in unâ Cochleæ conversione; sic Vis illa Motrix,

trix, ad Pondus; Obicem, seu Impedimentum cui æquipollet: quæ itaque aucta movebit.
Adeoque; Quò longius est Manubrium, atque Intervallum illud brevius, eò major est (cæteris paribus) Cochleæ Vis.

Intelligatur enim Cochlea *CO* interior seu Mas, per exteriorem *Fig. 282.*
seu Fœminam *K* fixam, ope Manubrii *ACB* versando protrudi, adversus Obstaculum sive Impedimentum *O*; quod itaque, protrusâ Cochleâ, vel propelli debeat, vel (si hoc impediatur per obstinaciam ultra positi *L*) comprimi aut confringi. Manifestum est, dum Vis in *A* applicata, unâ conversione factâ, circum Centro *C* describit, cujus diameter sit *AB*; tantundem protrudi Cochleam adversus Impedimentum *O*, quantum est Intervallum *EG*; perveniente scilicet *D* ad *E*, atque *E* (circuitu per *F* factò) ad *G*, atque *G* ad *H*, & sic porro. Si itaque fiat, ut Circuli radio *CA* vel diametro *AB* descripti peripheria, ad rectam *EG*, sic Pondus seu Impedimentum *O*, ad Vim in *A*; Vis Ponderi seu Impedimento Æquipollebit: per prop. 5. Cap. 2. Adeoque aucta movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1.

Patet hinc; Quò longius est Manubrium *CA*, vel *AB*, (in partem alteram vel utramque protractum;) Item, Quò minùs est Intervallum *EG*, (sive id fiat propter minorem Cylindri diametrum, sive propter minorem Inclinationis Angulum, sive propter utrumque;) eò fortius ager Cochlea, cæteris paribus.

Idem similiter ostenderetur, si fixâ Interiore Cochleâ *CO*, putâ *Fig. 283.*
in trabe lignæ *L*, conversa Cochlea Exterior *AB*, interjectum quidpiam comprimeret: Seu quod hujus instar sit. Idemque, aliis innumeris Cochleas applicandi modis, pariter accommodabitur.

S C H O L I U M.

AT interim hic nulla ratio habita est Impedimenti quod ex Frictione oritur, quod tamen in Cochleis magnum esse potest; (uti nec in aliis Organis habita est ratio difficultatis quæ est in ipso Organo movendo;) Sed si quis istius etiam rationem habere velit, addendum erit illud ex Frictione Impedimentum, ei quod est in ipso Obstaculo *O* amovendo, comprimendo, frangendo, aliâve amoliendo: totumque illud Impedimenti loco habendum erit in valore Vis motricis altimando.

Nnnn 2

PROP.

PROP. IV.

Datum Pondus seu Impedimentum, datâ Vi, Cochleâ movere.

Fig. 282, **U**m in Cochleâ sic constructâ, si sit, ut Peripheria Circuli AB, 283. ad rectam EG, ita Pondus, Obex, vel Impedimentum quodvis datum ad datam Vim; Vis Impedimento æquipollear; (per prop. præced.) Si fiat ea ratio aliquantò major; Vis præpollebit, adeoque movebit. Per prop. 11, 12. Cap. 1.

PROP. V.

Spiralis circa Cylindrum, Longitudinem exhibere.
Et quidem, sive Cylindrus rectus sit, sive Scalenus; sive etiam pro Cylindro substituatur Solidum quodvis Prismaticum.

Fig. 280, **O**stensum est, (ad prop. 1. hujus,) Curvam Spiralem AHH, 281. fig. 280. eandem esse atque AHH rectam, fig. 281. (expansâ scilicet in Planum superficiei Cylindricâ.) Datur autem rectæ AHH fig. 281. longitudo: (utpote, ejus quadratum æquale est duobus simul quadratis rectarum ABB, BH, fig. 281. hoc est, ABB curvæ, rectæque BH, fig. 280.) Datur igitur & curvæ AHH fig. 280. longitudo; (utpote quæ illi rectæ æqualis est.) Quod erat faciendum.

Atque idem similiter ostendetur in Cylindro Scaleno: Aliòve Solido Prismatico vel Columnari quovis, sive Rectum sit, sive Scalenum; (dummodo intelligatur, ABB planum, ejusdem Lateri Axise Rectum esse; ipsâque rectas BH, BH, ipsis AB, AB, rectis curvisque aut mixtis proportionales:) per ea quæ ostensa sunt in Schol. prop. 1. hujus.

PROP.

PROP. VI.

Cochleæ Soliditatem exhibere.

Intelligatur Cylindri Cochleæ inscripti superficies Curva, in Plano Fig. 284.
 $AB\beta\alpha$ parallelogrammum expandi: Atque in eo recta
 AHH , eadem quæ fuerat, in superficie Cylindricâ, curva Spiralis, cu-
 jus ductum sequitur Cochlea.

Intelligatur porro, secto per Axem Cylindro, in unâ aliquâ Cochleæ
 revolutione, Sectio facta DEF , (puta Triangularis, Quadrata,
 aliavæ quælibet, pro expositæ Cochleæ natura; cujus Figuræ magni-
 tudinem datam supponimus, ejusque Centrum gravitatis M notum.)
 Cujus itaque Basis (in latere Cylindri inscripti positam) obliquè fecer,
 secundum Obliquitatis angulum $HA\alpha$, seu AHB .

Si itaque intelligatur, super $AB\beta\alpha$ planum, in rectâ DE , ad an-
 gulos rectos insistere figura data DEF ; atque (eisdem ad planum
 angulis retentis) super AHH rectam moveri, retento eodem Obli-
 quitatis Angulo: Manifestum est, Prisma descriptum iri cujus Basis
 sit ipsa DEF , Latus autem ipsi AHH æquale, sed Altitudo quanta
 est recta ABB .

Adeoque (propter Prismata, super æquales bases, altitudinibus pro-
 portionalia,) tantundem erit Prisma Scalenum $DEFHH$, atque Pris-
 ma Rectum $DEFFB$: Nempe, quantum est quod sit ex DEF plano,
 in altitudinem ABB ducto.

Intelligatur demum, planum illud $AB\beta\alpha$, in superficiem Cylin-
 dricam (uti prius fuerat) curvatum, manente lineæ ABB longitu-
 dine: Manente item ejusdem ad DEF planum positione perpendicu-
 laris. Unde fiet, ut recta quam prius descriperat F punctum (ipsi
 ABB æquale) protracta jam in arcum majoris circuli similem
 ipsi ABB , longior jam futura sit (propter curvaturam) quam prius
 fuerat. Idemque de arcibus qui ab aliis describuntur ejusdem DEF
 punctis, quæ sunt extra DE rectam, intelligendum erit.

Et propterea majus erit solidum sic curvatum, quam fuerat Prisma.
 Quantum nempe est, quod sit ex arcu qui ab M (ipsius DEF centro
 gravitatis) describitur, in ipsam DEF ducto. per prop. 12. Cap. 5.

Cumque hoc perinde valeat, in situ ABB , atque in situ AHH : Si
 intelligatur DEF figura plana (quam in unâ aliquâ Cochleæ circula-
 tione

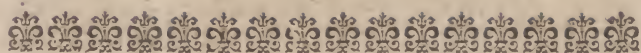
tione facit Planum per Axem) in rectam duci quæ æqualis sit arcui circulari quem describeret ejusdem DEF Centrum gravitatis M, secundum ductum arcus ABB latum, (circulatione unâ vel pluribus, perfectis vel imperfectis prout expositæ Cochleæ Circulationes esse contigerit:) habebitur (quicunque fuerit Obliquitatis Angulus) Cochleæ magnitudo. Et quidem (cum eadem utrobique valeat demonstratio) sive Cochlea Mas fuerit, sive Fœmina. Quod erat propositum.

Sin porro Cylindri, cui adjacet Cochlea, magnitudinem adjungere libeat: id facillè fiet ob notam Cylindri magnitudinem: per § O prop. 12. Cap. 5.

SCHOLIUM.

Idem valeret, quod ad Solidi magnitudinem spectat, si, pro verâ Cochleâ, substitueretur aliud solidum, ex simili ductu ejusdem DEF plani per curvam AHH, aliter constitutam; putâ, sumptis BH, BH, non quidem in ipsarum AB, AB, ratione, sed in harum ratione duplicatâ, triplicatâ, subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâve constitutâ, vel etiam per AHH curvam quamlibet. Quippe, non modò Prisma Scalenum utcumque Inclinatorum, sed & utcumque Distortum, æquatur Prismati Recto æque alto: (Quod in Tractatu de Conicis sectionibus, prop. 3, 4. ostendimus:) Atque Curvatura Cylindrica utrobique tantundem præstat. Verùm de his, aliisque similibus, (cùm ad præsens negotium non spectent,) non erit hic expatiandi locus.

CAP.



CAP. X.

De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis,
& Projectorum.

PROP. I.

Si, Mobili in Motu posito, accedat nova Vis, seu novus Impetus, secundum eandem directionem; fit Motus Acceleratio.

Si Impedimentum, seu Vis contraria: fit Retardatio.

Et utrobique pro ratione novi istius sive Impetus, sive Impedimenti, seu Vis contrariæ.

Adeoque si Impedimentum seu Vis contraria sit Vi positæ minor; perseverabit Motus ad easdem partes, celeritate minuta.

Si æquale; Motus tolletur: aut etiam si Impedimentum præpolleat.

Sin præpolleat Vis contraria; ponetur etiam Motus ad partes contrarias.

Si A mobilis, secundum rectam AB moti, Celeritate C, Pondus P: Fig. 285.
Adeoque Vis seu Impetus quo movetur $V = PC$: per prop. 27.
Cap. 1. Idemque Motus eadem Celeritate, nisi accedat Impedimentum, perseverabit; etiam si non accedat nova causa motrix. per prop. 11. Cap. 1. (Quippe concepto Motui tollendo, tantundem requiritur, quantum ponendo requireretur si non esset.) Accedat autem in B nova Vis seu novus Impetus, secundum eandem directionem, putà ut nV : Adeoque sit Vis tota, ut $V + nV = PC + nPC$. per prop. 8 & 27. Cap. 1. Cum itaque idem sit, quod prius, Moti Pondus P; fiet (diviso $PC + nPC$ per P) celeritas $C + nC$. per eandem prop. 27. Cap. 1.

646 *De Motibus Compositis, Acceleratis, CAP. X.*

Cap. 1. Adeoque acceleratur Motus, in ratione $1 + n$ ad 1 . Quod demonstrandum erat. Eademque celeritate (nisi quid aliud intercedat) deinceps movebitur, puta ad D . per prop. 11. Cap. 1.

Sin accedat Impedimentum aut Vis Contraria, ut nV , (quod itaque signo — notandum erit:) Adeoque Momentum seu Vis jam superstes (per prop. 8 vel 10. Cap. 1.) sit $V - nV = PC - nPC$: Et, (propter idem, quod prius, Pondus P .) Celeritas $C - nC$. per prop. 27. Cap. 1. Motus minuitur seu retardatur; utpote cujus Celeritas jam sit ad pristinam, ut $1 - n$ ad 1 . Quod itidem demonstrandum erat. Eademque Celeritas (nisi quid aliud intercedat) deinceps perseverabit, per prop. 11. Cap. 1.

Adeoque, si nV minus sit quam V ; seu n quam 1 : manebit adhuc motus ad easdem partes, sed celeritate minutâ, nempe $C - nC$.

Si nV sit ipsi V æquale, seu $n = 1$: Motus tollitur; propter Impedimentum Momento æquale: adeoque $C - nC = 0$ Celeritas nulla.

Atque hæc quidem indifferenter sive nV sit simpliciter Impedimentum, sive sit Vis contraria. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Si verò nV majus sit quam V ; (adeoque $V - nV$ quantitas negativa, per prop. 8. Cap. 1.) sitque nV simpliciter Impedimentum: adhuc fortius sistetur Motus, (propter Impedimentum Momento præpollens, adeoque potens etiam Majorem Motum sistere:) per prop. 11. Cap. 1.

Sin nV (ipsi V præpollens) sit (non simpliciter Impedimentum, sed) Vis contraria: non modo totus qui prius fuerat motus tollitur, sed ponetur contrarius, per prop. 12. Cap. 1. Celeritate — $C - nC$; per prop. 27. ejusdem. Quæ erant ultimò demonstranda.

PROP. II.

Si Vis Motricis, per se æquabilis, continua fiat applicatio; producet Motus continuò Acceleratus.

Et quidem ita Acceleratus, ut temporibus æqualibus æqualia concipiat Celeritatis incrementa: Quem Motum vocant *Æqualiter Acceleratum*.

Si Vis Impeditivæ, per se æquabilis, similis fiat applicatio; similis prodibit Motus Retardatio. Quem Motum vocant *Æqualiter Retardatum*.

Et

Et quidem hoc eousque donec totus tollatur ; vel etiam (si Impedimentum illud sit à Vi contrariâ) ponatur contrarius.

Intelligatur enim Causa Motrix aliqua, uno Temporis momento, Mobili imprimere gradum Celeritatis ut 1. Gradus hic, nisi fuerit Impedimento aliquo sublatus, etiam sine novâ Causâ perseverabit. per prop. 11. Cap. 1. Eadem vero Causa, similiter agens, secundo item Momento applicata, tantundem efficiet ; per prop. 7. Cap. 1. Adeoque (perseveranti gradui primo) secundum superadder. Et similiter tertio momento (duobus illis perseverantibus) superaddet tertium. Atque sic deinceps.

Adeoque (sumpto initio Seriei à principio Motus) Celeritatum gradus (adeoque & Longitudines emensæ ; per prop. 23. Cap. 1.) Erunt, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu (quod in infinitè exiguis tantundem valet, per prop. 1. Cap. 5.) ut 0, 1, 2, 3, &c. vel etiam, ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmeticè proportionales ; seu, ut rectæ Triangulum Complementes, Fig. 286. per def. 1. Cap. 4. (Respicitur autem illic, figura ex parallelogrammis triangulo Circumscripta ; justo Major : istic, Inscripta ; justo Minor : hic, intermedia, partim Circumscripta, partim Inscripta ; ipsi Triangulo Æqualis : ut ad prop. 1. Cap. 5. dictum est.) Adeoque emensæ Longitudines ; ab initio computatæ, ut Triangulorum illorum Plana quæ complent illæ rectæ : adeoque in duplicata ratione Temporum.

Si vero, non ab ipso Seriei initio, principium sumamus ; sed ab aliquo Celeritatis gradu ut C initium sumamus ; similiter ostendetur, continuis momentis sequentibus, Celeritatis gradus futuros $C+1$, $C+2$, $C+3$, &c. seu $C+1$, $C+2$, $C+3$, &c. Hoc est, ut rectæ in Trapezio, seu Triangulo truncato. Quale autem sumendum erit Trapezium, facile determinabitur ex ratione quam habet Celeritas ultimo acquisita ; ad celeritatem primo positam : quippe inde determinabitur ratio parallelorum in trapezio laterum maximi ad minimum ; eritque Triangulum super eorum maximo æque altum, ad Trapezium, ut maximum ibid ad summam utriusque ; Altitudine sumpta qualibet.

Eodem modo ostendetur, in motu Retardato : Puta, si, posito aliquo celeritatis gradu quo iteratur mobile, ut C, intelligatur Vis Impeditiva, in se æquabilis, continuo accedere ; quæ propterea singulis momentis tantundem demat : Fient celeritatis gradus continui sequentes, ut $C-1$, $C-2$, $C-3$, $C-4$, &c. puta usque ad $C-C=0$, ubi motus primo positus planè absinitur.

O o o o

Adeoque

Fig. 288.

648 *De Motibus Compositis, Acceleratis, CAP. X.*

Adeoque, si porro continetur ablatio, puta ad $C-C-1, C-C-2, C-C-3, C-C-4$, &c. hoc est, ad $0-1, 0-2, 0-3, 0-4$, &c. seu $-1, -2, -3, -4$, &c. sitque Vis illa Impeditiva, non Impeditiva simpliciter, sed in contrarium Motiva: habebitur Motus in partes contrarias, cum celeritatis gradibus 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 12. Cap. 1. Si verò simpliciter Impeditiva sit; ubi ad $C-C$ pervenitur, tollitur Motus; sed quicunque deinceps succedat gradus Impedimenti, utut fortius impediat, non tamen in contrarias partes pellit: Supponitur utique Vim Motricem non habere.

Prioris instantiam habemus in Motu Gravium sursum projectorum (seclusâ consideratione impediens medii;) ubi post superatam à Gravitate Vim sursum projicientem, descendit grave. Posterio rem quadantenus refert motus projectorum (seclusâ gravitatis consideratione) in quancunque partem; Ubi Medii Densitas, vim projectricem obtundit, & sensim minuit, tandemque tollit; sed non in partes contrarias repellit.

PROP. III.

Si consideretur Gravitas tanquam Vis Motrix deorsum, in se æquabilis, atque continuè applicata:

Descensus Gravium (seclusâ consideratione medii resistentis, & siquid est ejusmodi) est Motus æqualiter Acceleratus.

Adeoque, temporibus quibuscunque à principio decidentiarum sumptis, emensæ Longitudines sunt in duplicatâ ratione Temporum.

Putâ, sumptis Temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ Longitudines erunt ut horum quadrata 1, 4, 9, 16, &c.

Temporibus autem invicem æqualibus, à principio continuè consequentibus, primo, secundo, tertio, quarto, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. quadratorum differentiarum, arithmeticè proportionales.

Si verò à posito aliquo seu jam acquisito celeritatis gradu initium sumatur; longitudinibus jam dictis addendum erit

PROP. III. Retardatis, & Projectorum. 649

erit quantum eâ celeritate, æquabili motu, eo tempore acquisitum foret.

Gravium verò sursum projectorum Ascensus, est motus æqualiter Retardatus.

Et Longitudines ibidem emensæ habentur, si auferantur jam dictæ longitudines à longitudine quæ Celeritate primâ eodem tempore foret acquisita.

Sequitur ex præcedente. Quippe, si intelligatur Grave in A; sublato fulcro, descensum ob gravitatem suam inchoans; momento primo celeritatis gradum acquisivisse, ut 1; secundo, ut 2; tertio, ut 3; & sic deinceps; (propter tantundem celeritatis singulis momentis additum:) adeoque celeritatum gradus temporibus à principio sumptis ubique proportionales: putà ut Tempus A b, ad Tempus A B, sic b β (celeritatem in b) ad (celeritatem in B) B β: & sic ubique: Cum Longitudines emensæ, sint Celeritatum gradibus proportionales; erunt omnes longitudines tempore A b transactæ, ad omnes transactas tempore A B; (seu tota longitudo transacta tempore A b, ad totam transactam tempore A B;) ut omnes rectæ complentes A b β triangulum, ad omnes complentes triangulum A B β; Hoc est, ut Triangulum A b β ad ipsum A B β Triangulum; Adeoque in Laterum A b, A B, ratione duplicatâ (propter figuras similes in duplicatâ ratione laterum homologorum.) Ideoque si sumantur tempora A b, A B, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt Triangula A b β, A B β, &c. (adeoque & transactæ Longitudines,) ut 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, quæ temporibus æqualibus continuè sequentibus, A b, b β, &c. transiguntur; A b β, b β β, &c. ut eorum differentia, 1, 3, 9, 7, &c. Et sic ubique.

Putà, sumptis in rectâ A E, partibus A B, B C, C D, D E, &c. Fig. 290. ipsis 1, 3, 9, 7, &c. proportionalibus: æqualibus illæ temporibus transiguntur.

Si vero intelligatur, non ab ipso motus initio in A, computus instituentus; sed à celeritatis gradu jam acquisito, ut b β, seu B C; vel, quod tantundem erit, si non suapte tantum gravitate motum concipiat Grave, sed à Vi Motrice extrinsecus pellatur seu projiciatur, unde Celeritatis gradum concipiat ut b β, (quâ itaque ferretur nisi quid aliud accederet, per prop. 11. Cap. 1.) quæ deinceps ob gravitatis impetum continuè applicatum, continuè (ut dictum est) æqualiter acceleranda sit: erunt Celeritatis gradus, singulis ipsius temporis b B momenti, ut rectæ trapezium b β β B complentes, & Longitudo per id temporis emensæ,

O o o o 2

650 *De Motibus Compositis, Acceleratis, CAP. X.*

emensa, ut ipsum $b\beta B$ trapezium; quæque temporis illius partibus transiguntur Longitudines, respectivis trapezii partibus proportionales. Et quidem si intelligatur $Bb\beta$ parallelogrammum, repræsentare longitudinem emetiendam tempore bB celeritate ubique ipsi $b\beta$ æquali: triangulum $\beta E\beta$ repræsentabit id quod propter accelerationem accedit.

Fig. 291. Similiter si intelligatur Grave, in A , sursum projectum cā Vi quæ Celeritatem imprimeret ut $A\alpha$; quā perseverante transigendam tempore AB longitudinem repræsentet $AB\alpha\alpha$ parallelogrammum. Ea vero, propter Gravitationem, ut Vim contrariam, contra renitentem; & propter continuam applicationem æqualem, tantundem singulis momentis dementem; continuè minuetur: ablati rectis $\alpha\beta$, $\alpha\beta$, triangulum $\alpha\beta B$ complementibus; relictis $b\beta$, reliquos celeritatis gradus repræsentantibus; donec tandem, ita crescentibus $\alpha\beta$, ut fiat αB ipsi $A\alpha$ æqualis, tota Vis sursum tendens exhaustiatur; adeoque in temporis puncto B desinat Ascensus. Sed, crescente porro ob Gravitationem impetu; non modo non feretur sursum, sed incipiet descendere, (Vi deorsum jam præpollente;) & quidem (ob continuè crescentem impetum æquabiliter) motu æqualiter accelerato, (ut crescant $c\beta$, $c\beta$, rectæ, triangulum $BC\beta$ complentes;) donec, facto $B\beta C$ triangulo, ipsi $A\alpha B$ æquali, tantundem descenderit quantum ascenderat prius: atque adhuc ultra nisi quis Obex impediat.

SCHOLIUM.

PROPOSITIONEM hanc Hypotheticè proponimus: quoniam non inter omnes constat, vel quænam sit Gravitationis Causa, vel etiam secundum quam Regulam agat, (variis variis Gravitationis Hypotheses excogitantibus.) Neque nobis hic in animo est, illam in Physicis quæstionem determinare, in cujuscunque præjudicium. Sed, stante illâ Hypothesi Physicâ, (quam vel reapse veram esse, vel ad veritatem quam proximè accedere, Experimenta testantur;) Theorema Mathematicum, ostensum est.

PROP.

PROP. IV.

Eadem obtinent accelerandi & retardandi rationes, dum fertur Grave per rectam Inclinatam, seu in plano Inclinato; atque per rectam ad Horizontem Perpendicularem: Sed celeritatibus variis pro variâ declivitate.

Hinc sequitur; Eodem tempore per quamlibet circulo inscriptam, diametro Perpendiculari (in Circulo Erecto) vel perpendiculari Succedaneâ (in circulo Inclinato) conterminam, ferri Grave; quo per illam Diametrum.

Item; Eandem celeritatem descendendo acquiri, & ascendendo deperdi, in rectâ inclinatâ; atque in perpendiculari æque alta: Adtòque & eundem utrobique impetum, & percussionem eandem.

Nam per prop. 26. Cap. 2. Obliquitas Plani in eâdem ratione Fig. 192. minuit omnium in eo descensuum celeritates; nempe in eâ quam postulat plani declivitas: Hoc est (per prop. 25. ejusdem) celeritates erunt in declivitatum ratione, seu in reciproca rectarum æquæ altarum. Adeoque quæ erant in A P B perpendiculari, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt in inclinatâ A O, si hæc sit illius dupla, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, &c. si tripla; ut $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, &c. & similiter in aliis proportionibus.

Vel etiam, idem ab origine demonstrabitur ut in prop. 2, 2. hujus. Nempe si, quod in A B gravitat ut 1, idem in A O (propter obliquitatem) gravitet, verbi gratiâ, ut $\frac{1}{2}$; unde momento primo, seu tempore exiguo, acquiratur celeritas ut $\frac{1}{2}$: ejusdem applicatione continuâ tempore secundo, acquiratur alterum $\frac{1}{2}$; tertio, tertium, &c. adeoque (prioribus permanentibus) celeritates erunt, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, &c. eadem ratione cum ipsis 1, 2, 3, 4, &c.

Atque hinc colligitur Galilæi propositio illa; Eodem tempore percurri A O, vel O B, subtenfas quilibet circuli Diametro perpendiculari A B conterminas, quo ipsam A B diametrum. Cum enim (per ante demonstrata) celeritates omnes in A O, ad respectivas in A P B, sint

652 *De Motibus Compositis, Acceleratis, CAP. X.*

sint in reciproca ratione rectarum æquè altarum ; hoc est, ut AP ad AO ; hoc est (propter similia triangula) ut AO ad AB , (longitudines transactæ ad invicem :) eodem tempore percurrentur AO , AB . Idemque similiter ostendetur de OB , seu huic parallelâ, (adeoque æquali & pariter inclinâtâ) AB .

(Quodque de AB perpendiculo in circulo erecto ostensum est ; similiter obtinet de AB perpendiculi succedaneo, in circulo inclinato : propter omnes in eodem plano descensus in eadem ratione impeditos. per prop. 26. Cap. 2.)

Cumque (ut jam ostensum est) celeritates in AO , ad respectivas in AB , sint ubique proportionales ; sintque eodem tempore percurse AO , AB ; erit celeritas in O (lati per AO), ad celeritatem in B (lati per AB), ut AO , ad AB . Sed & ita est celeritas in P ad eandem celeritatem in B (lati per APB .) Nam (per prop. 2, 3, hujus,) transactæ longitudines sunt in duplicatâ ratione temporum ; adeoque & celeritatum, utpote quæ sunt temporibus à principio sumptis proportionales. Adeoque Celeritas in P , ad celeritatem in B , in subduplicatâ ratione AP ad AB ; hoc est, (propter AP , AO , AB , continuè proportionales,) ut AO ad AB . Eadem igitur est celeritas in O , quæ in P . (Idemque similiter obtineret, ob rationem modo dictam, si fuerit $AP O$ planum inclinatum, & AP perpendiculi succedaneum.) Adeoque & Impetus utrobique æqualis (cum idem sit utrobique tum Pondus tum Celeritas ;) & æqualis Ictus seu Percussio : ut in Capite de Percussione ostendetur.

Quæque de Descensuum Accelerationibus hic ostensa sunt : eadem similiter de Ascensuum Retardationibus ostendentur. Quippe Obliquitas Plani eadem ratione Ascensum adjuvat quâ impedit Descensum. per prop. 25. Cap. 2.

PROP.

PROP. V.

Si, in Motu continuè Accelerato, Celeritates (ab initio computandæ) sint in Temporum ratione Duplicatâ: Longitudines emensæ, erunt in Temporum ratione Triplicatâ.

Adeoque, sumptis temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudes transactæ erunt, ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri Cubi.

Si Celeritates sint in Temporum ratione Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. Longitudines emensæ, erunt in Temporum ratione Quadruplicatâ, Quintuplicatâ, &c. Unâ semper vice plus multiplicatâ, quam Celeritates.

Adeoque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudes erunt, ut 1, 16, 81, 256, &c. numeri Biquadrati: vel, ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri Surdesolidi. Et sic deinceps.

Longitudinesque, continuis temporibus æqualibus transactæ, ut illorum Cuborum, Biquadratorum, Surdesolidorum, &c. differentia.

Intelligatur enim, Motu ab A inchoato, in Temporis A b B momentis b, B, Celeritates esse in duplicatâ ratione rectarum A b, A B; hoc est, ut ipsarum A b, A B, Quadrata: Puta, ut rectæ b β, B β, complementes A B β complementum Semiparabolæ. Erunt itaque Longitudines temporibus A b, A B, emensæ, (per modò demonstrata ad prop. 2. hujus,) ut ipsa Complementi plana A b β, A B β; hoc est (propter trilinea A b β, A B β, subtripla Parallelogrammorum A b β, A b B, per prop. 6. Cap. 5.) ut ipsa A b β, A b B, rectangula seu parallelogramma. Sunt autem, propter altitudines ipsis A b, A B, vel æquales vel saltem proportionales; basésque b β, B β, in earundem ratione duplicatâ; Parallelogramma ipsa (utpote in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus compositâ) erunt in earundem ratione Triplicatâ.

Et

Fig. 293.

654 *De Motibus Compositis, Acceleratis, CAP. X.*

Et propterea, sumptis ab initio temporibus $Ab, A\beta, \&c.$ ut $1, 3, 5, 7, \&c.$ respectiva Celeritates erunt, ut $1, 4, 9, 16, \&c.$ & longitudines ab initio transacta, ut $1, 8, 27, 64, \&c.$ Adeoque, temporibus a qualibus, continuè a principio sumptis, $1, 7, 19, 37, \&c.$ Cuborum differentia.

Similiter ostendetur; sumpto Complemento Paraboloidis Cubicalis (in quo rectæ $b\beta, B\beta$, sunt in rectarum Ab, AB , ratione Triplicata;) Longitudines emensas (trilineis $Ab\beta, AB\beta$, proportionales,) esse in eandem ratione Quadruplicatâ.

Atque sic deinceps, pro potestatibus aliis, si sumantur Paraboloides respectivè conformes. Constat itaque propositum.

PROP. VI.

Si Mobile, ob duas causas Motrices, duos concipiat directos impetus; putâ secundum duas rectas positione datas, angulum facientes; Celeritatibus in se æqualibus, ad invicem verò eisdem rectis, ut parallelogrammi lateribus longitudine datis, proportionalibus: feretur Mobile per Parallelogrammi diagonium, eâ celeritate quæ sit ad datas, ut diagonium illud ad respectiva latera.

Adeoque tantundem est, rationem quod spectat, sive feratur Mobile motu ex duobus composito qui directiones habeant secundum Parallelogrammi latera, & celeritates ipsis proportionales; sive Motu simplici, secundum ejusdem diagonium, & celeritate proportionali. Quippe, utrovis modo, eodem tempore, per eundem tramitem, eâdem celeritate feretur.

Idemque Motui ex pluribus composito similiter accommodabitur; sive Directiones habeant in eodem plano omnes, sive secus.

Potestque idem propterea Motus infinitis modis componi.

Fig 294. { Intelligatur A Mobile, ob causam aliquam Motricem, Impetum concipere, secundum Directionem Ax ; aliûmque, ob causam aliam Mo-

PROP. VI. Retardatis, & Projectorum. 655

Motricem, secundum Directionem AB : sitque illius Celeritas ad Celeritatem hujus, ut $A\alpha$ recta ad rectam AB . Et compleatur parallelogrammum, cujus Diagonium sit $A\beta$.

Manifestum est, quo tempore A , secundum directionem $A\alpha$, feratur ad rectam $\alpha\beta$; eodem terri secundum directionem AB , ad rectam $B\beta$; adeoque fore in puncto β . (Et sic ubique.) Et, propter eandem ubique celeritatum rationem, adeoque eandem ubique rationem laterum $A\alpha$, AB , & communem Directionum Angulum A ; similia fore inter se omnia $A\beta$ parallelogramma. Et propterea in eadem recta fore omnia β puncta. Cumque eodem tempore per $A\beta$ rectam feratur A mobile; quo simul ferri intelligatur tum secundum directionem $A\alpha$, Celeritate $A\alpha$; tum secundum directionem AB , celeritate AB : Celeritas motus per $A\beta$, ad celeritates illas respective sumptas; erit ut recta $A\beta$ (diagonium) ad ipsas $A\alpha$, AB , rectas, latera parallelogrammi. Adeoque tantundem erit, lationem quod spectat, sive feratur motu simplici secundum directionem $A\beta$ celeritate $A\beta$; sive motu composito, secundum directionem $A\alpha$ celeritate $A\alpha$, atque secundum directionem AB celeritate AB , simul. Quippe eodem tempore, eadem celeritate, atque in eodem tramite, feretur Mobile ab A ad β .

Cumque eadem $A\beta$ recta, possit esse Diagonium Parallelogrammorum infinitis modis variatorum, totidem Motuum Compositiones inveniuntur, quarum singulis æquipollet (per jam demonstrata) idem Motus simplex: Manifestum est eundem posse Motum infinitis modis componi. Quod etiam ulterius patebit, ex casibus sequentibus.

Intelligatur deinde, idem A mobile, ob totidem Causas Motrices, Fig. 295. secundum tres in eodem Plano Directiones $A\alpha$, AB , AC ; celeritatibus ipsis $A\alpha$, AB , AC , proportionalibus. Ostendetur, ut prius, motum ex duobus illis secundum $A\alpha$ & AB compositum; tantundem esse atque motum simplicem secundum $A\beta$ celeritate $A\beta$. Sed & similiter ostendetur, motum compositum ex hoc (duobus æquipollente) atque ex eo secundum AC celeritate AC , tantundem esse atque simplicem per Diagonium $A\gamma$ celeritate $A\gamma$. Ergo, qui ex tribus illis per $A\alpha$, AB , AC , (cum suis respective Celeritatibus,) componitur; æquipollet simplici per $A\gamma$ Celeritate $A\gamma$.

Idem similiter ostendetur, si intelligantur tres illæ Directiones $A\alpha$, Fig. 296. AB , AC , non in eodem plano omnes, sed in diversis; puta, ut tria ejusdem Parallelepipedum Latera communi puncto angulari coeuntia, (quo Casu $A\gamma$ erit Parallelepipedum Diagonium;) ut etiam, si plures adhuc fuerint Directiones, utcumque ab eodem A communi puncto procedentes, secundum quas A Mobile feratur. Constat itaque propositum.

P p p p

SCHO-

SCHOLIUM.

QUæ de Motibus per A, A B, A C, æquabilibus ostensa sunt, similiter ostenderentur si essent illæ omnes similiter Accelerati vel similiter Retardati, non autem si dissimiliter.

PROP. VII.

Si Motus Æquabilis, cum Accelerato vel Retardato componatur; vel Motus Accelerati aut Retardati, sed dissimiliter, componantur: Alia atque alia linearum species emerget, per quam feretur Mobile, pro variâ compositionum ratione.

Exempli gratiâ. Si Motus Æquabilis, cum Æqualiter (seu in ratione Temporum) Accelerato componatur; (adeoque motus acceleratus in duplicatâ ratione motûs æquabilis:) Latio erit in Curva Parabolica: Et (si Motuum Directiones sint ad invicem rectæ) longitudines emensæ, erunt ut respectiva plana Hyperbolica, Curvæ & conjugato Axi interjecta.

Si Motus Æquabilis componatur cum Accelerato in temporum ratione Duplicatâ, (ut hic sit ad illum in ratione Triplicata:) Latio erit in Curvâ Paraboloidis Cubicalis: Et Longitudines emensæ, ut respectivæ istius curvæ particulæ, seu spatia plana ipsi proportionalia.

Si Motus Æqualiter Acceleratus (seu acceleratus in ratione Temporum) hoc est, qui sit in Duplicatâ ratione temporum, cum motu qui sit in Temporum ratione Triplicatâ (seu accelerato in temporum ratione Duplicatâ,) componatur: Latio erit in Curvâ Paraboloidis Semi-Cubicalis: Et (si Motuum Directiones sint ad invicem rectæ) Longitudines emensæ, ut respectiva spatia Parabolica, Axi & Curvæ interjecta.

Simi-

Similéque in aliis casibus Calculo determinabitur.

Intelligatur AT recta, secundum quam, Vi aliquâ Motrice, pro- Fig. 297,
pellatur A mobile, Motu Equabili; adeoque, sumptis temporibus 298.
ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines AT , AT , &c. erunt item ut 1,
2, 3, 4, &c. per prop. 26. Cap. 1.

Atque intelligatur idem Mobile, aliâ Vi Motrice, impelli, secundum
directionem AD , motu æqualiter accelerato; adeoque, sumptis tem-
poribus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines AD , AD , &c. erunt
ut 1, 4, 9, 16, &c. eorum quadrata. per prop. 2, 3. hujus

Si itaque; dum, motu illo, fertur A mobile, Longitudine AT ;
hoc est, ab AD ad huius parallelam TO ; feratur, motu hoc, longi-
tudine AD ; hoc est, ab AT ad DO ; & sic ubique: Erunt ubique
 AD , AD ; hoc est, TO , TO ; in rectarum AT , AT ; hoc est,
 DO , DO ; ratione duplicatâ. Adeoque (propter naturam Para-
bolæ) quæ, per omnia O , O , puncta, transit Curvæ (quæ est Lationis
viâ, utpote in quâ mobile semper erit,) est Parabola. Quod demon-
strandum erat.

Atque hoc perinde obtinet sive ad angulum rectum coeant in A
rectæ AT , AD , (ut ubi A est vertex Axis,) sive ad alium quemvis (ut
ubi A vertex est cuiusvis alterius diametri:) Et quicumque fuerit utro-
bique Celeritatis gradus; hoc est, quodcumque habeat Parabola illa
Latus Rectum. Quippe semper erunt TO , TO , rectæ, in rectarum
 AT , AT , ratione duplicatâ; ob naturam Parabolæ.

Si verò A sit Vertex Axis, erunt longitudines AO , AO , per quas Fig. 297.
fertur mobile; Spatiis Hyperbolicis, Curvæ & Conjugato Axi inter-
jectis, respectivè sumptis proportionales, Per ea quæ alibi, in Tractatu
de Curvarum *Εὐθυστοι*, demonstravimus; ubi de Parabolæ *Εὐθυστοι*
agitur.

Similiter; positis AT , AT , (pro motu æquali) in ratione Tem- Fig. 297,
porum; & (pro motu accelerato in Duplicatâ ratione Temporum) 298.
 AD , AD , in eorundem ratione Triplicatâ, (per prop. 5. hujus:)
Ostendetur, curvâ AOO fore Paraboloidem Cubicalem; Propter
 TO , TO , hoc est AD , AD , in rectarum AT , AT , hoc est, DO ,
 DO , ratione Triplicatâ. Quod iudem demonstrandum erat.

Et Curvæ particulis AO , AO , plana proportionalia exhibentur,
per ea quæ generaliter ostendimus in Schol. prop. 38. *Arithmetice In-*
finityum.

Idemque aliis Accelerationum speciebus accommodabitur, sumptis
Paraboloidibus aliis, prout res postulaverit.

Pppp 2

Intelligatur

658 *De Motibus Compositis, Acceleratis, CAP. X.*

Intelligentur demum rectæ AT , AT , non in ipsâ Temporum ratione, sed (pro motu æqualiter accelerato, per prop. 2. hujus) in Temporum ratione Duplicatâ, adeoque Tempora in earundem ratione Subduplicatâ: Item rectas AD , AD , (pro motu accelerato in Duplicatâ ratione temporum,) in temporum ratione Triplicatâ, (per prop. 5. hujus;) adeoque in rectarum AT , AT , ratione Subduplicatæ-Triplicatâ. Erit (propter istius paraboloidis naturam) Curva AOO , paraboloides quam *Semi-cubicalem* appello; cujus Index seu Exponens sit $\frac{1}{2}$. (Putâ, in quâ rectæ AD , AD , hoc est, TO , TO , sint in rectarum AT , AT , hoc est DO , DO , ratione Subduplicatæ-Triplicatâ.) Per illam itaque Curvam feretur Mobile, quod Motu ex sic acceleratis composito fertur. Quod item erat demonstrandum.

Istius autem Curvæ partes AO , AO , spatiis Parabolicis proportionales esse, demonstratum est in Tractatu modo memorato, de *Curvarum Evolutis*, ubi de Curvâ *Semiparaboloidis Cubicalis* agitur, cui æqualem rectam exhibemus.

Eodem modo de aliis Motuum Compositionibus judicandum erit (mutatis mutandis) Curvâ sic positâ ut Calculus indicaverit.

PROP. VIII.

Motus Projectorum (exclusâ consideratione resistentis Medii) est in rectâ Parabolicâ.

Intellige; Nisi fiat Projectio illa vel directè Sursum, vel directè Deorsum: Quo casu motus erit in lineâ Rectâ; Sursum, Retardatus; Deorsum, Acceleratus.

Fig. 297. Sequitur ex præcedente. Est enim Vis à Projectore impressa, secundum directionem ATT , Mobile impellens Motu Æquali, adeoque eadem ubique Celeritate: per prop. 11. Cap. 1. Interea dum Gravitas motum imprimi deorsum, putâ secundum directionem ADD , æqualiter acceleratum: per prop. 3. hujus. Adeoque, qui ex utrisque componitur, est per AOO Curvam Parabolicam: per præcedentem.

Sin fieri intelligatur projectio directè sursum, vel directè deorsum: degenerabit Parabola in lineam Rectam; (propter projectionis motum, & motum gravitationis, in eadem rectâ;) in quâ fiet motus vel Retardatus sursum, vel Acceleratus deorsum; de quibus supra dictum est.

SCHO-

SCHOLIA.

Huc spectant motus projectorum ex Bombardis, Arcubus, Balistis, aliisque Machinis projicientibus, aut ex projicientis manu, aliave Vi quâlibet, ubi projecta Gravia, postquam à projiciente separantur, impresso Impetu feruntur.

Dico autem, *exclusâ consideratione resistentis medii*: Quoniam, ob hanc resistentiam, Motus secundum directionem projicientis, qui supponitur Æquabilis, reverâ minuitur, & sensim extinguitur, ob continuam cum medio resistente luctam: & propterea sensim deficit à linea Parabolica.

Atq; hinc fit, quod Globuli ex Bombardis, in majori distantia minus feriant. Si enim, reverâ, eadem celeritate procederet latius secundum rectam AT , (quicquid sit de motu descensûs secundum AD ,) eadem violentia feriret objectum Murum (cui AT recta sit) sive longius, sive in propinquo positum: (per prop. 21. Cap. 1.) contra quam experientia compertum est.

CAP.



CAP. XI.

De Percussione.

PROP. I.

Si Grave motum, tanquam perfectè Durum consideretur; atque in Obicem sive Obstacleum firmum directè impingat, quod itidem perfectè Durum sit; Sitque Vis Gravi sic moto æquipollens, Minor quàm est Vis Obstaclei motui resistentis, vel etiam ipsi Æqualis: Motus sistitur.

Sin Major fuerit: continuatur motus, superato Obice; sed eâ ratione tardatus seu diminutus, quam exigit Obicis resistentia; quam Calculus indicabit.

Nempe, Si ex Momento (quod ex Pondere & Celeritate componitur) tantundem auferatur quantum Obici amolendo æquipolleat; residuumque, si quod sit, per Pondus dividi intelligatur: prodibit gradus Celeritatis residuæ.

Fig. 299. **E** Sto Gravis Moti A, perfectè Duri, Pondus mP , Celeritas rC , cui æquipolleat Momentum seu Vis $mrPC$, per prop. 27. Cap. 1. Atque Obstacleum B cui directè impingit, Vim resistendi habeat, ut $nsPC$.

Si Minor sit $mrPC$, quàm $nsPC$; præpollebit Impedimentum: Sin Æqualis; saltem æquipollebit Impedimentum: Et Motus utroque casu sistitur. (Erit utique, si æquales sint, $mrPC - nsPC = 0$, vis nulla: Si Impedimentum præpolleat, pro impedimento reputandum est.) Per prop. 10, 11. Cap. 1.

Sin

Sin Major sit *mrPC*, quàm *nsPC*; præpollebit Vis; adeoque superabitur Impedimentum; Motusque continuabitur, sed Diminutus. per prop. 10, 11. Cap. 1.

Quantus autem deinceps futurus sit Motus, & quanta Celeritas; Calculo sic colligitur. Vis præpollens, *mrPC*; unâ cum Impedimento contrario, *nsPC*; tantundem valet atque Vis *mrPC—nsPC*, per prop. 10. Cap. 1. (Absumitur utique in Obice rumpendo, prostrando, seu utcumque amoliendo, tantundem Virium seu Momenti, quantum Obicis Firmitati seu resistendi Vi æquipolleat: reliquumque, si quod est, Ponderi ultrâ ferendo impenditur.) Estque Gravis Moti pondus (idem quod prius) *mP*: Ergo Celeritas futura (ut quæ oritur ex Momento per Pondus diviso) $\frac{mr - ns}{m} C$; per prop. 27.

Cap. 1.

SCHOLIUM.

Perfectè *Durum*, appello, quod ictui nequaquam cedit; Adeoque nec Molle, nec Elasticum.

Molle, appello, quod ictui ita cedit ut pristinam figuram amittat: Ut Lutum, Cera, Plumbum, aliâque similia quæ ictu deformantur; aut etiam Corpora Fluida. Ubi enim hoc contingit, Virium pars aliqua in deformando Corpore absumitur, nec tota in Obstaculum impenditur: Cujus itaque seorsum est habenda ratio.

Elasticum appello, quod, utut ictui aliquantisper cedat, se tamen in pristinam formam suoque marte restituit: ut sunt Elateres Chalybei, Lignei, aut cujuscunque materiæ; (nostrates *Springs* appellant;) & Corpora istiusmodi quæ pressa resurgunt, aut quocunque modo a situ debito detorta vim habeat semet restituendi. Quâ de re post agetur Cap. 13. ubi de Resitutione agetur.

Addi etiam hic poterit, ut non tam Fragile sit aut Friabile Corpus Motum, ut ictu frangatur. Quippe tum, Virium pars aliqua frangendo Corpore absumitur.

Eademque, quam hic supponimus, Durities, etiam in propositionibus sequentibus intelligenda est. Quod hic monitum esto, ne opus sit sæpius id repetere.

Sin objiciat quis (quod & fortasse verum est) ejusmodi corpus nullum esse, quod nihil habeat vel Mollitiei vel Elasticitatis; neque tam firmum aliquod Obstaculum quod ictu vel levissimo non aliquantulum loco moveatur; quasi Lapilli quantumvis exigui ictu, modicâ Vi jacti, Alpina rupes loco nonnihil dimoveretur, aut etiam quæ huic conjuncta

juncta est, ipsa Telluris moles; utut tantillum id sit ut sensu percipi nequeat. Hoc neutiquam obest præsentis negotio. Quotcunque enim fuerint hujusmodi accidentia in complexo subiecto; id nihil impedit, quin abstractione mentis separari possint; atque hæc quæ præ manibus est consideratio, quasi ea non essent, tractari; eaque, si tanti sint ut negligi non debeant, seorsum considerari poterunt.

Directè impingere, hic dicimus, cum recta secundum quam movetur, per moti Corporis Centrum-Gravitatis & punctum Contactus ducta, sit, superficiei corporis in quod impingitur, perpendicularis: aut etiam, si non in puncto, sed linea vel superficiei se tangant mutuò, cum recta illa sit huic communi seu lineæ seu superficiei perpendicularis. Si autem Obliquè vel Indirectè impingat; sive ideo fiat quòd recta secundum quam movetur, per Centrum gravitatis transiens, ad punctum tactus non pertingat; sive quòd, quæ sic pertingit, superficiei corporis in quod impingitur non sit perpendicularis; advocanda hic erunt in considerationem quæ supra de Motuum obliquitate traduntur Capite II.

PROP. II.

Si Grave motum, Gravi Quiescenti directè impingat, sed ita constituto ut aliunde ne moveatur non impediatur: utrumque junctim movebitur, eâ celeritate quam Calculus (Ponderum rationibus & pristina Celeritate ritè computatis) indicabit.

Nempe; si Momentum (ex Moti Gravis Pondere & Celeritate compositum) per utriusque simul Pondus dividatur; habebitur futura Celeritas.

Seu (quod eodem recidit) ut simul utriusque Pondus, ad Pondus prius moti; sic pristina Celeritas, ad post futuram.

(Et quidem, si Quiescens Moto sit pondere æquale, feren-
tur deinceps celeritate dimidiâ.)

Quæ quidem Celeritas futura, in utriusvis Pondus ducta, exhibebit illius momentum post futurum.

Fig. 300. **E**sto A, Grave motum, secundum rectam AA ipsius Centro-gravitatis descriptam, quæ ad Quiescentis B (cui directè impingat) Centrum

Centrum Gravitatis peringat; (nam & hoc requirimus quò Gravia junctim movenda dicantur directè impingere.) Sitque Gravis A, pondus mP , celeritas rC adeoque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: Et Gravis B, pondus nP , (celeritas, utpote quiescentis, nulla in utramvis partem;) Adeoque simul utriusque pondus $mP+nP$. Movenda autem deinceps erunt utraque eadem celeritate. Quippe B segnùs moveri non poterit, propter insequens A: Sed neque celerius; cum non moveri aliunde intelligatur quam quod ab A sequente propellatur: (Et siquod aliud accedat quod celerius propellat; ut Vis Elastica, de quà alibi dicitur, aut aliud quidpiam; id non est hujus considerationis, sed alterius loci.) Cùm itaque Vi $mrPC$, movendum sit

Pondus $mP+nP$; id fiet celeritate $\frac{m}{m+n}rC$: (divisò scilicet Momento $mrPC$, per Pondus $mP+nP$;) per prop. 27. Cap. 1. Quod erat propositum. (Et quidem si pondera sint æqualia, hoc est $m=n$, erit $\frac{m}{m+n}rC = \frac{1}{2}rC$, ut patet.)

Momentum itaque Ponderis nP , prius quiescentis, jam moti celeritate $\frac{m}{m+n}rC$, erit $\frac{m}{m+n}mrPC$ seu $\frac{n}{m+n}mrPC$; Ponderisque mP , prius moti celeritate rC , jam verò celeritate $\frac{m}{m+n}rC$; jam fit $\frac{m}{m+n}mrPC$. Adeoque momentum hinc demptum (gravi prius quiescenti collatum) est $mrPC - \frac{m}{m+n}mrPC = \frac{mn}{m+n}rPC$.

SCHOLIUM.

Manifestum hinc est, ex quovis minimo cujusvis exigui Gravis impulsu, etiam maximo cuivis quiescenti, motum inferri posse; Uti etiam ex sequentibus patebit, etiam maximi Gravis motum, cujusvis exigui objectu, quadantenus impediri posse seu retardari; vel etiam hujusmodi accessu, quadantenus accelerari.

Verùm hoc tantillum esse potest, ut omnem sensuum perceptionem fugiat: adeoque negligi soleat. Unde fit, ut pro absolutè quiescentibus reputentur, aut immobilibus, quæ, si secundum Mathematicum rigorem æstimanda forent, dicenda forsitan essent aliquantillum moveri. Dato enim, quod tota Telluris moles fluido Æthere suspensa, cum saltu pulicis percussa sit, dicenda esset loco suo tantillum dimoveri; aut

Q999

etiã

etiam translato de loco in locum (quod sæpe fit) acervo satis gravi, Tellurem totam, propter mutatum Centrum Gravitatis, similiter mutare sedem; (quod quidni fieri possit haud facile dixeris; nedum ubi majores terrenæ molis concussiones seu mutationes contingunt;) Cum tamen hæc tantilla sint ut sensum omnem fugiant; minimè mirandum est, si, hisce non obstantibus, immota censeatur. Præsertim cum ipsa Aeris sive Densitas sive Gravitatis (utut sensui non planè imperceptibilis) negligi non rarò soleat in motibus æstimandis.

PROP. III.

Si Grave subsequens, segniùs secundum eandem rectam præcedenti, directè impingat: utriusque deinceps eadem erit celeritas; quæ calculo exquiretur.

Nempe; si simul utriusque Momentum, per simul utriusque Pondus dividatur; habebitur communis utriusque futura Celeritas.

(Et quidem, si pondera sint æqualia; erit semi-summa utriusque Celeritatis.)

Eaque Celeritas futura, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum post futurum.

Fig. 301. SI Grave A, segniùs præcedenti B directè impingat; (segniùs dico, nam si B eadem celeritate præcederet, subsequens A non illud esset affecuturum; nedum si velocius fugiat B, quàm insequatur A;) sitque Gravis A, Pondus mP , Celeritas rC , adeoque Momentum $mrPC$; Gravis B, Pondus nP , Celeritas (minor) sC , adeoque Momentum $nsPC$; Adeoque simul utriusque Momentum $mrPC + nsPC$: Diviso hoc per summam Ponderum $mP + nP$, habebitur communis utriusque futura Celeritas $\frac{mr + ns}{m + n}C$: per prop. 27. Cap. 1. (Et quidem

si pondera, sint æqualia; hoc est, $m = n$; erit $\frac{mr + ns}{m + n}C = \frac{r + s}{2}C$.)

Quod erat propositum.

Ideoq̃, præcedentis nP momentum, quod prius fuerat $nsFC$, jam fit

fit $\frac{mr+ns}{m+n} nPC$; & subsequentis mP momentum, quod fuerat $mrPC$,
 jam fit $\frac{mr+ns}{m+n} mPC$. Adeoque Momentum hinc demptum, &
 sequenti collatum, est $mrPC - \frac{mr+ns}{m+n} mPC = \frac{mr-ns}{m+n} mPC =$
 $\frac{mr-ns}{m+n} nPC = \frac{r-s}{m+n} mnPC$.

PROP. IV.

Si duo Gravia, secundum eandem rectam, contrariis motibus occurrentia, sibi mutuò directè impingant: eadem deinceps celeritate, atque ad easdem partes ferentur; quas calculus indicabit.

Nempe; Si Momentorum Differentia (quoniam ad contrarias partes) per Summam Ponderum dividatur; habebitur communis utriusque Celeritas post futura; & quidem ad eas partes ad quas tendebat Vis præpollens. Et quidem, si pondera sint æqualia; erit Celeritatum Semidifferentia.

Sin æquipolleant contraria Momenta, (propter æqualia invicem tum Pondera, tum Celeritates; aut has illis reciproce proportionales:) ad neutras partes ferentur; sed quiescent utraque.

Futura autem celeritas, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum post futurum.

Sit Gravis A, Pondus mP , Celeritas $+rC$, adeoque Momentum $Fig. 302.$
 $+mrPC$ (prorsum:) cui occurrat motu directè contrario Grave
 B, cujus pondus nP , celeritas $-sC$, adeoque Momentum $-nsPC$ (re-
 trorsum:) & utriusque simul Momentum (seu Momentorum, utpote
 ad contrarias partes, Differentia), $mrPC - nsPC$, (prorsum vel re-
 trorsum, prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit; per prop. 8. Cap. 1.)
 Hoc itaque per summam ponderum $mP + nP$ divisum; exhibet com-
 munem

Q q q 2

munem utriusque celeritatem deinceps futuram, $\frac{mr - ns}{m + n} C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum $+$ aut $-$ prævaluerit:) per prop. 27. Cap. I. (Adeoque, si Pondera sint æqualia; erit, propter $m = n$, celeritas $\frac{r - s}{2} C$: Si verò tum $m = n$, tum $r = s$; vel m, n , ipsis r, s , reciprocè proportionales; quò fiat $mr = ns$: nulla futura erit in utramvis partem celeritas; sed se mutuò sistent æquales vires contrariæ.) Quod erat propositum.

Ideoque Gravis A momentum, quod priùs fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr - ns}{m + n} mPC$; & Gravis B momentum, quod fuerat $nsPC$, jam fit $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$. Adeoque momentum ex præpollente demptum & in reliquum collatum, est $mrPC - \frac{mr - ns}{m + n} mPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC = \frac{mr + ns}{m + n} nPC = \frac{r + s}{m + n} mnPC$.

PROP. V.

Idus magnitudo æquipollet duplo momenti ablati in directè impingentium (si quod sit) fortiori.

SI intelligatur enim Motorum (si quod sit) fortius, (vel, si sint momentum æqualium, utrumvis,) ut Percutiens; reliquum ut Percussum: Quantum Momenti Percutienti decidit, Percussum recipit, (puta; Vel resistendo seu sustinendo Vim; ut, si firmus Obex sit, cedere nescius; aut motum contrario impetu æquali: Vel suscipiendo novum impetum; ut, si priùs quiesceret; aut in easdem partes moveretur: Vel denique partim hoc, partim illud; ut, si occurrat motu contrario debiliori: quæ singulatim suis locis ostendentur:) quorum cum utrumque sint effectus Idus, Idus utrique æquipollet; hoc est, duplo momenti ablati in fortiori. Quod erat propositum.

Designo autem Idus magnitudinem, per momentum fortiori ablatum; quoniam effectus Idus in fortiori, uniformis est, (nempe sola semper momenti deperditio,) adeoque facilius & simplicius verbis exprimitur.

exprimitur : effectus autem in reliquo est, nonnunquam impetus deperditio, nonnunquam acquisitio novi impetus, nonnunquam utrumque ; sed, quicquid sit ; æquipollet motui in fortiori deperdito.

PROP. VI.

Si Grave motum firmo Obici directè impingat : Ictus æquipollet duplo momento gravis impingentis.
Sin Obex minùs firmus sit quàm ut sustinendis valeat : Ictus æquipollet duplo Vis reſtitivæ in Obice.

PUtà ; si Gravis moti A, pondus sit mP , celeritas rC , adeoque Fig. 299.
Momentum seu Vis impellens $mrPC$: huic æqualis est in Obice Resistencia (utpote quæ Vim totam impactam immota sustinet atque hanc solam :) Cumque utraque sint ab Ictu, Ictus utrique simul æquipollet, hoc est, duplo momenti impingentis, seu $2mrPC$. Quod propositum erat.

Dico autem, Vi impellenti æqualem esse Resistenciam, potiùs quàm Vim Reſtitivam. Quippe Vis Reſtitiva major esse potest ; nempe, si Obex majori vi impingenti sustinendæ par sit : sed quicquid virium superest, est hic inutile, (uti & vis tota esset si nihil impingeret ;) quò enim sustineatur vis impacta, sufficit vis æqualis ; nec motum alteri inferri potest, quoniam resistit tantum per modum impedimenti, non vis agentis contrariæ. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Similiter ostendetur propositionis pars altera. Quippe quantacunque sit Obicis infirmi vis reſtitiva, puta $nsPC$, tanta impenditur ei amoliendo vis impellens ; (& quæ superest, est hic superflua :) adeoque utriusque aggregatum (qui est effectus Ictus) $2nsPC$, duplum vis reſtitivæ, est Ictus magnitudo. Quod itidem erat propositum.

Aliter.

Idem ostendi posset (sed mutato propositionum ordine) ex prop. seq. Quippe Obex firmus, Ictum quod spectat, tantundem resistit quantum directè occurrens impetu æquali, (utrobique enim sibi situr impingens Grave :) verum illic Ictus æquipollet utriusvis duplo ; per prop. seq. Ergo & hic.

Similiter.

Ostendetur idem ex prop. 14. Nempe, si duo Gravia utcumque inæqualia, quibuscunque celeritatibus, directè occurrant ; ostenditur Ictus

ictus magnitudo $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$: adeoque si intelligatur Obicis celeritas $sC = 0C$ (quippe nulla;) seu quantumvis exigua; adeoque pondus $nP = \infty P$ infinitum (nam nisi hoc ponatur, propter $s = 0$, momentum $nsPC$ non sustinebit vim impactam,) erit $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$
 $= \frac{\infty}{\infty+m} 2mrPC = 2mrPC$ (nam propter ∞ infinitum, tantundem erit $\frac{\infty}{\infty+m}$ atque $\frac{\infty}{\infty} = 1$;) hoc est, vis impingentis duplum. Quod erat propositum.

PROP. VII.

Si duo Gravia Æqualia, æqualibus celeritatibus; vel Inæqualia, celeritatibus reciproce proportionalibus; sibi mutuò directè occurrant: Ictus magnitudo æquipollet momentis simul utriusque; seu utriusvis duplo.

Fig. 302. **P**Utà, si sit Gravis A, pondus mP , celeritas rC , adeoque momentum $+mrPC$ (prorsum:) atque Gravis B, pondus item mP & celeritas $-rC$; vel pondus rP & celeritas $-mC$; adeoque (utrovis casu) momentum $-mrPC$ (retrorsum:) Cum, quod Ictus hoc in casu efficiat, sit (propter æquales impetus contrarios) utriusque sublatio, per prop. 4. hujus; erit Ictus magnitudo $2mrPC$ (momentis simul utriusque æquipollens) per prop. 5. hujus.

PROP.

PROP. VIII.

Si duo Gravia communi aliquo motu ferantur; tantundem est, quantum ad Ictus magnitudinem, atque si utrobique abesset.

Adeoque communis motus, additus vel demptus, Ictus magnitudinem non immutat.

SI enim B præcedens eadem celeritate fugiat (aut etiam majori) Fig. 301.
Squâ sequitur A, nulla sit motus obstructio seu impeditio, utut conjuncta fuerint A B, (nedum si disjuncta;) adeoque nullus Ictus. Si verò A celerius sequatur, putà celeritate $rC = sC + tC$; & B præcedat segnius, putà celeritate sC : saltem quantum ad celeritatem utriusque communem sC , nulla sit impeditio; quippe eatenus se subducit antecedens, ictum declinans; totumque illud motus cui ulla sit obstructio, est quod ex tC celeritatis excessu oritur. (Idemque eadem analogiâ ostendetur de aliis motibus communibus.) Adeoque ob additum vel demptum communem motum (utpote qui, hoc respectu, nullius instar est) nulla fiet Ictus immutatio.

SCHOLIUM.

Hinc est, quod duorum in eadem Navi placidè latorum alter alterum eadem vi percutit ac si uterque in littore staret; motu navis, utpote utrique communi, ictum nec adjuvante nec impediante. Item, projectionum & percussionum Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terrâ posita, siue cum terrâ junctim ferantur omnia communi motu, siue cum terrâ unà quiescant; quippe communis eorum cum terrâ siue motus siue quies hæc Phænomena non immutat, sed projectiones & percussiones æstimandæ sunt ab iis motibus qui rebus hic in terrâ existentibus peculiares sunt, & non cum ipsâ terrâ communes. Adeoque, quæ afferri solebant objectiones à projectionibus inæqualibus eadem vi faciendis, prout vel ad Orientem ad Occidentem fierent; atque inæqualibus percussionibus à Tormento Bellico globulum emittente futuris, prout in has aut illas partes explosio fieret; & quæ sunt hujusmodi; etiam ipsis nunc dierum fatentibus qui motum Terræ negant,

negant, nihil in utramvis partem probant sive de *Quiete Terræ* sive de *Motu*. Hinc item qui ictum Gladii quadantenus declinans accipit, minori vulnere afficitur, quam si immotus acciperet, nedum si obvium iret. Aliæque multa hujusmodi.

PROP. IX.

Si Gravis motum, æquali quiescenti, (non impedito,) directè impingat: Ictûs magnitudo, momento gravis moti æquipollet.

Fig. 300. **E**sto Gravis moti A, pondus mP , celeritas rC , adeoque momentum $mrPC$, quod in æquale B quiescens directè impingat; ferentur deinceps utraque celeritate dimidiâ, $\frac{1}{2}rC$; adeoque momentum A quod prius fuerat $mrPC$, jant propter pondus mP , fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, amisso momenti dimidio $\frac{1}{2}mrPC$; & momentum B, quod prius (utpote quiescentis) nullum erat, jam, propter itidem mP pondus, fiet $mP \times \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}mrPC$, de novo acquisitum; per prop. 2. hujus. Cum itaque deperdat A momentum $\frac{1}{2}mrPC$, atque acquirat B momentum itidem $\frac{1}{2}mrPC$, utriusque aggregato $mrPC$ (quod momentum fuerat gravis A) æquipollet Ictûs magnitudo, per prop. 5. hujus.

Idem Aliter.

Esto, ut prius, Gravis A, pondus mP , celeritas rC , adeoque momentum $mrPC$, quod in æquale B quiescens directè incurrat. Atque intelligatur utrique accedere communis motus celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrosum.) Quo casu feretur A celeritate $rC - \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}rC$ (prorsum) & B celeritate $0C - \frac{1}{2}rC = -\frac{1}{2}rC$ (retrosum;) Eritque Ictûs magnitudo $2mP \times \frac{1}{2}rC = mrPC$, per prop. 7. hujus. Sed eadem erit (per prop. præced.) Ictûs magnitudo, dempto illo qui addebatur communi motu; qui est casus propositus. Ergo, & hic, Ictûs magnitudo est $mrPC$; ut prius.

PROP.

PROP. X.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus Inæqualibus, in eadem partes ferantur; & sequens antecedenti directè impingat: Ictus æquipollet momento utriusvis, Celeritatum Differentiâ lati.

Sit Gravis A, pondus mP , celeritas $rC = sC + tC$, adeoque Fig. 301. momentum $mrPC$; quod in æquale B, celeritate sC præcedens (cujus itaque momentum $msPC$) directè impingat. Ferentur deinceps utraque (per prop. 3. hujus) celeritate $\frac{r+s}{2}C$; adeoque utriusvis momentum (propter utriusque pondus mP) $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A (propter s minorem quàm r) momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Atque tantundem Gravi B acquiritur, propter $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC - msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mtPC$. Ergò, utriusque Aggregatum $mtPC$ est (per prop. 5. hujus) Ictus magnitudo. Hoc est, momentum ponderis utriusvis mP , celeritatum differentiâ tC lati, (per prop. 27. Cap. 1.) quod erat propositum.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP , celeritas $rC = sC + tC$; quod in æquale B celeritate sC præcedens directè impingat. Tantundem erit (ictum quod spectat) atque si (sublato utrobique communi sC) ferretur A celeritate tC , in B quiescens, (per prop. 8. hujus.) Adeoque (per prop. præced.) ictus magnitudo $mtPC$, ut prius.

Rrrr

PROP.

PROP. XI.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus utcumque Inæqualibus, ad contrarias partes lata, sibi mutuò directè occurrant: Ictus æquipollet momento utriusvis, Aggregato celeritatum lati.

Fig. 392. Sit Gravis A, pondus mP , celeritas $+rC$ (prorsum,) adeoque momentum $+mrPC$; & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrosum,) adeoque momentum $-msPC$, sitque $r+s=z$, atque intelligatur $mrPC$ momentum præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{r-s}{2}mP$, adeoque utriusvis momentum $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mzPC$. Et Grave B (propter A præpollens) deperdit totum suum momentum retrosum $msPC$; sed & acquirit momentum prorsum $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC$: Quæ duo simul sumpta sunt $msPC + \frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}msPC = \frac{1}{2}mzPC$. Ergo, omnium Aggregatum, $mzPC$ est (per prop. 5. hujus) ictus magnitudo. Hoc est momentum ponderis utriusvis mP , celeritatum aggregato zC lati.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP , celeritas $+rC$ (prorsum,) & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrosum,) sitque $r+s=z$. Intelligatur utrique conferri motus communis celeritate $+sC$ (prorsum:) Unde fiet celeritas A, $rC + sC = zC$; & celeritas B, $-sC + sC = 0C$. Hoc est, feretur A, celeritate zC in B quiescens. Eritque ictus magnitudo (per prop. 9. hujus) $mzPC = mP \times zC$. Tan- tûsqve erit ictus in casu propolito, per prop. 8. hujus.

PROP.

PROP. XII.

Si Gravis motum, Gravi quiescenti, utcumque inæquali, directè impingat: Erit ictûs magnitudo, ad momentum Gravis moti, ut quiescentis pondus duplum ad ponderis utriusque aggregatum.

Si Gravis A moti, pondus mP , celeritas rC , adeoque momentum $mrPC$; quod directè impingat in quiescens B, cujus pondus nP , (momentum, utpote quiescentis, nullum.) Erit (per prop. 2. hujus) celeritas deinceps utriusque $\frac{mr}{m+n}C$: Adeoque momentum A (propter pondus mP .) $\frac{mr}{m+n}mPC$; & momentum B (propter pondus nP .) $\frac{mr}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC$ — $\frac{mr}{m+n}mPC = \frac{mn}{m+n}PC$. Atque tantundem (ut ostensum est) acquirit B, (utpote cujus momentum prius nihil erat.) Ergo (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum $\frac{2mn}{m+n}PC$ est ictûs magnitudo. Est autem illud ad $mrPC$ expositum momentum gravis moti, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus expositi quiescentis, ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter. Sit, ut priùs, Gravis A, pondus mP , celeritas rC , adeoque momentum $mrPC$; quod directè impingat in B quiescens, cujus pondus nP . Intelligatur celeritas rC in duas partes dividi, ponderibus reciproce proportionales; puta, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus mP ; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus nP . Atque conferatur utrique motus communis celeritate $\frac{m}{m+n}rC$ (retrosum:); quò fiat celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n}rC = \frac{n}{m+n}rC$ (prosum;) & celeritas B, $\frac{m}{m+n}rC$.

Rrrr 2

B,

B, o $C - \frac{m}{m+n} r C = - \frac{m}{m+n} r C$ (retrosum;) adeoque celeritates ponderibus reciproce proportionales; ad partes contrarias; ictusque magnitudo (per prop. 7. hujus) $m P \times \frac{n}{m+n} r C + n P \times \frac{m}{m+n} r C = \frac{2 m n}{m+n} r P C = \frac{2 n}{m+n} \times m r P C$; quod itaque est ad $m r P C$ expositum momentum moti A, ut 2 n ad m+n, (ut prius:) Tantusque erit ictus in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIII.

Si duo Gravia, vel æqualia vel inæqualia, celeritatibus quibuscunque, ad easdem partes ferantur, & Sequens Antecedenti directe impingat: Erit ictus magnitudo, ad momentum gravis Sequentis celeritatum differentiâ lati; ut duplum ponderis Antecedentis, ad simul utriusque pondus; ad momentum verò Antecedentis eadem celeritatum differentiâ lati, ut duplum Sequentis, ad simul utriusque pondus; hoc est, ad momentum utriusvis differentiâ celeritatum lati, ut duplum reliqui ad simul utriusque pondus.

Fig. 301. **E** Sto Gravis A Sequentis; pondus $m P$, celeritas $r C$, adeoque momentum $m r P C$; Antecedentis B, pondus $n P$, celeritas (minor) $s C$, adeoque momentum $n s P C$; sitque $r = s + t$. Erit (per prop. 3. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{m r + n s}{m+n} C$; adeoque momentum A (propter pondus $m P$,) $\frac{m r + n s}{m+n} m P C$; & momentum B (propter pondus $n P$,) $\frac{m r + n s}{m+n} n P C$. Deperdit itaque A; momentum $m r P C - \frac{m r + n s}{m+n} m P C = \frac{m n r - m n s}{m+n} P C$. Atque tantumdem acquirit B, propter $\frac{m r + n s}{m+n} n P C - n s P C = \frac{m n r - m n s}{m+n} P C$.

$\frac{mnr - mns}{m+n} PC$. Adeoque (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum est istius magnitudo. Hoc est $\frac{2mnr - 2mns}{m+n} PC =$

$$\frac{r-s}{m+n} 2mn PC = \frac{2mn}{m+n} t PC = \frac{2n}{m+n} mPtC = \frac{2m}{m+n} nPtC:$$

Hoc est, ad momentum Sequentis mP celeritatum differentia tC lati, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus Antecedentis ad simul utriusque pondus: atque ad momentum Antecedentis nP eadem differentia tC lati, ut $2m$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus Sequentis ad simul utriusque pondus. Hoc est, ad momentum utriusvis, celeritatum differentia lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Esto, ut prius, Gravis A sequentis, pondus mP , celeritas rC , atque antecedentis B, pondus nP , celeritas sC ; sitque $r = s + t$. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta celeritas sC . Quo factq, B ad quietem redigitur, propter $sC - sC = 0C$; eique impingit A, tanquam quiescenti, celeritate $rC - sC = tC$. Eritque

$$\text{istius magnitudo (per prop. præced.) } \frac{2mn}{m+n} t PC = \frac{2n}{m+n} mPtC$$

$$= \frac{2m}{m+n} nPtC, \text{ ut prius. Idemque erit istius magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.}$$

PROP. XIV.

Si duo Gravia, æqualia vel inæqualia, quibuscunque celeritatibus, motibus contrariis sibi mutuo directe occurrant: Erit istius magnitudo, ad momentum alterutrius gravium, celeritatum Aggregato lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus.

Si Gravis A, pondus mP , celeritas $+rC$ (prorsum,) adeoque momentum $+mrPC$; & Gravis B, pondus nP , celeritas $-sC$ (retrosum,) adeoque momentum $-nsPC$; quæ sibi mutuo directe impingant; sitque $r + s = z$; atque intelligatur momentum $mzPC$ præpollens.

Fig. 302.

præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{mr - ns}{m + n} C$: Adeoque gravis A (propter pondus mP) momentum $\frac{mr - ns}{m + n} mPC$; & gravis B (propter pondus nP) momentum $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$. Deperdit itaque A momentum $mrPC - \frac{mr - ns}{m + n} mPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC$. Et B deperdit (propter A præpollens) totum quod habuerat momentum retrorsum $nsPC$; & simul acquirit momentum prorsum $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$; quæ duo simul sumpta sunt $nsPC + \frac{mr - ns}{m + n} nPC = \frac{mr + ms}{m + n} nPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC$, (quantum scilicet deperderat A.) Adeoque omnium aggregatum $\frac{nr + ns}{m + n} 2mPC = \frac{2mn}{m + n} zPC = \frac{2m}{m + n} nzPC = \frac{2n}{m + n} mzPC$, est (per prop. 5. hujus) ictus magnitudo. Quod itaque est ad $mzPC$ ut $2n$ ad $m + n$, & ad $nzPC$ ut $2m$ ad $m + n$; hoc est, ad momentum alterutrius gravium aggregato celeritatum lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP , celeritas $+rC$ (prorsum;) & Gravis B, pondus nP , celeritas $-sC$ (retrorsum;) quæ sibi mutuò directè occurrant; sitque $r + s = z$. Intelligatur autem utriusque addi, motu communi, celeritas $+sC$ (prorsum;) Quo fiat gravis A celeritas $rC + sC = zC$; & B quiescens (propter $-sC + sC = 0C$;) Adeoque ictus magnitudo (per prop. 12. hujus) $\frac{2n}{m + n} mzPC = \frac{2m}{m + n} nzPC$; ut prius. Idemque est ictus magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP.

PROP. XV.

Percussiones particularum Gravis percutientis, pro variâ ejusdem Figurâ & Positione; calculo æstimantur. Adeoque & *Centrum Virium*, seu *Percussionis*. Quod ipsum est Punctum Percussionis maximæ.

Intelligatur A B, Pertica, Cylindrus, Prisma, aut istiusmodi corpus quodpiam; parallelo motu latum: Erunt ejus Partes infinitesimæ, (secundum longitudinem æquales,) ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Earumque respectivæ Celeritates (utpote æquales, propter motum parallelum,) item ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Adeoque &, quæ inde resultant, Momenta seu Vires, erunt itidem ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium. Et propterea, si per mediam longitudinem secetur Axis in V, erit utrinque tantundem Virium. & in distantis Æqualibus. Adeoque V, *Centrum Virium*, seu Percussionis.

Quod quidem non aliter differt à Centro Æquilibrii, (de quo Cap. 3. dictum est,) quàm quod (sumpto Axe prismatis pro Librâ) momenta, seu Libræ Gravamina, sunt illic (potissimum) nuda Pondera (quamquam nec alia gravamina ibidem excludantur,) hic vero Pondera cum Impetu, ex celeritate contracto.

Idem similiter obtinet quæcunque sit figura Gravis A B, parallelo motu lati: Nempe, *Centrum Virium* V, idem esse atque *Centrum Gravitatis* figuræ. Quippe cum Celeritates sint series Æqualium; eadem erit Virium series quæ Ponderum: per Schol. prop. 1, 2. Cap. 5.

Intelligatur deinde idem Cylindrus seu Prisma A B, circa Axis extremum A rotari. Cujus itaque Particulæ (ut prius) erunt ut 1, 1, 1, 1, &c. seu 1 P, 1 P, 1 P, 1 P, &c. series Æqualium. Celeritates autem respectivæ, (ab A centro Motus inchoando) ut Arcus B B, & huic paralleli, sectorem B A B complentes; (quippe, propter æqualia Tempora, Celeritates erunt ut transactæ Longitudines; per prop. 23. Cap. 1.) hoc est, ut eorum Radii, seu Distantiæ ab A; hoc est, ut Rectæ Triangulum A B C complentes, (ipsi B C parallele:) Nempe, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu 1 C, 2 C, 3 C, 4 C, &c. series Primarum. Adeoque, propter Pondera invicem æqualia, Vires itidem erunt ut series

Fig. 303.

Fig. 304.

Fig. 305.

series

series Primanorum ; puta ut $1\ PC, 2\ PC, 3\ PC, 4\ PC, \&c.$ seu ut eadem rectæ Triangulum complentes. Quæ itaque si ad AB latus Trianguli, tanquam ad Libram, applicari intelligantur, quæ per Trianguli Centrum gravitatis applicatur VC recta, designat in AB librâ Centrum Equilibrîi V. Et propterea, si similiter in V secetur AB axis Cylindri seu Prismatis ; erit V Centrum Virium : Quippe quæ Rectis illis sunt proportionales.

Fig. 306. Sin Cylindrus idem seu Prisma, Centro Motûs M, in Axe ultra A continuato rotari intelligatur : Pondera erunt (ut prius) ut $1P, 1P, 1P, 1P, \&c.$ series Equalium : Celeritates autem, ut Arcus descripti, seu eorum Radii ; hoc est, ut Distantiæ ab M ; seu rectæ complentes Trapezium ACCB : puta ut $aC, aC+1C, aC+2C, aC+3C, \&c.$ Series Equalium aucta Serie Primanorum. Adeoque Momenta, seu Vires, aut libræ Gravamina, (propter Pondera invicem æqualia,) ut $aCP, aCP+1CP, aCP+2CP, aCP+3CP, \&c.$ series item Equalium aucta serie Primanorum ; seu ut eadem rectæ Trapezium complentes. Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad AB latus trapezii ut Libram applicetur VC ; erit V Centrum Equilibrîi : Et similiter, in V, secto axe AB, erit V Centrum Virium ; utpote rectis illis proportionalium.

Fig. 307. Intelligatur demum AB Cuneus, seu Asserculus Triangularis (æqualiter crassus :) Cujus itaque (ab acie A computando) particulæ (secundum longitudinem in axe AB æstimatam æquales) sunt ut $0P, 1P, 2P, 3P, \&c.$ series Primanorum : Celeritates (rotatione circa A factâ) ut $0C, 1C, 2C, 3C, \&c.$ (distantiis ab A proportionales) series itidem Primanorum : Vires itaque (in ratione ex utrisque compositâ) ut $0PC, 1PC, 4PC, 9PC, \&c.$ series Secundanorum ; seu ut rectæ complentes ABC complementum Semi-parabolæ : (aut Plana Conum seu Pyramidem complementia.) Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad Libram AB applicetur VC ; atque similiter, in V, secetur AB axis Cunei ; erit V Centrum Virium ; utpote rectis illis proportionalium.

Si autem circa rectam B (basin trianguli) roretur Triangulum vel Cuneus AB : distantia à B erunt rectis huic parallelis, æqualiter à medio distantibus, reciproce proportionales ; adeoque respectiva Momenta (utpote in ratione ex magnitudinum & distantiarum rationibus compositâ) invicem æqualia ; & propterea Centrum Virium in axis AB medio.

Si verò intelligatur AB grave, ultra A (Centrum motûs) continuari ; id non impedit quin V ut prius sit Centrum virium seu percussionis (ad partes B faciendæ ;) sed vis augebitur ab impetu partium ultra A. Et similiter alibi. Sin

Sin sit M Centrum Motus seu Rotationis in axe ultra A protracto: Fig. 308.
 Erunt Pondera (ut prius) ut $0P, 1P, 2P, 3P, \&c.$ series Primanorum: Celeritates autem (distantiis ab M proportionales,) ut $aC, aC+1C, aC+2C, aC+3C, \&c.$ series Æqualium serie Primanorum aucta. Et propterea Vires, seu Momenta, aut libræ Gravamina, ut $caPC, 1aPC+1PC, 2aPC+4PC, 3aPC+9PC, \&c.$ series Primanorum aucta serie Secundanorum. Puta, ut rectæ complentes Trilineum ABC , ex Triangulo ABT (quæ series est Primanorum,) & semi-parabolæ Complemento ATC (quæ est series Secundanorum,) ritè comparatis, compositum. Per cuius itaque Trilinei Centrum gravitatis quæ ad Libram applicatur VC , designat in AB librâ Centrum Æquilibrii V : & similiter, in V , secto axe solidi, habetur Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Intelligatur demum AB Conus seu Pyramis: Cujus itaque Particulæ (ab A vertice numeratæ) erunt ut $0P, 1P, 4P, 9P, \&c.$ series Secundanorum: Celeritates autem (rotatione Centro A factâ) ut $0C, 1C, 2C, 3C, \&c.$ series Primanorum: Adeoque Momenta seu Vires, ut $0PC, 1PC, 8PC, 27PC, \&c.$ series Tertianorum: Puta ut rectæ complentes Semi-paraboloidis Cubicalis Complementum ABC . Per cuius itaque Centrum gravitatis si applicetur (ut prius) VC , habebitur (ut supra) V Centrum Virium. Fig. 307.

Sin M Centrum Motus seu Rotationis sit in axe ultra A protracto: Fig. 308.
 Pondera erunt (ut prius) ut $0P, 1P, 4P, 9P, \&c.$ series Secundanorum: Celeritates verò (distantiis ab M proportionales) ut $aC, aC+1C, aC+2C, aC+3C, \&c.$ series Æqualium serie Primanorum aucta. Et propterea; Vires, ut $caFC, 1aPC+1PC, 4aPC+8PC, 9aPC+27PC, \&c.$ series Secundanorum aucta serie Tertianorum: Puta, ut rectæ complentes Trilineum ABC , ex ABT complemento Semi-parabolæ, & ATC complemento semi-paraboloidis Cubicalis, (sic invicem aptatis ut casus postulaverit,) compositum. Per cuius itaque Trilinei Centrum gravitatis ductâ VC , habebitur V Centrum Virium, ut prius.

Atque ad eandem formam mutatis mutandis, procedendum erit, quæcunque fuerit figura Gravis moti, (sive ordinata, sive utcunque inordinata,) & ubicunque ponatur Centrum Rotationis. Nempe, quæcunque fuerit Magnitudinum seu Ponderum series; cum eâ componenda erit series Celeritatum (utcunque acquisitarum;) ut hæbeatur series Virium seu Momentorum. Atque hæc momenta, si considerentur ut Libræ Gravamina; eisdem legibus hic exquirendum erit Centrum Virium; quibus, in Cap. 3. Centrum Æquilibrii; & in Cap.

SSS

4, 5.

itudinem series alia non est quam Distinquarum ab illa. Acie data, & seriei compositae commune Centrum inveniendum; (quod est Ungulae Centrum gravitatis) ita hic) compositae magnitudinis in corpora potentia; rebus ponderanda (eius series) daturum in respectu illius corporis particulis (quarum series alia non est quam illarum ad rationem illarum) & seriei compositae commune Centrum (quod est Centrum Virium) inveniamus. Quilo modo inveniatur seriei Distantiarum cum serie Magnitudinum compositio fiat, ut seriei compositae Centrum habeatur; ostenditur (tum alibi, in casibus simplicioribus; tum, in obstrusioribus,) ad prop. 10. Cap. 5. Quae saepius in Ungularum Centris gravitatis inquirendis (per totum illud caput) in auxilium advocatur; atque hic, pro inquirendis Centris Virium, similiter (ubi opus fuerit) advocanda erit. Quod generatim monuisse sufficiat; ne sit necesse ad particulares casus descendere (quod longum esset, & tædii plenum;) quos cujusque industriae, ubi res postulaverit, calculo determinandos permitto, & ad generalem Methodum exigendos.

Notandum porro; cum Centrum Virium, uti illud jam determinavimus, sit (ut plurimum saltem) intra ipsum Solidum; Percussio autem, à Solido illo facta, sit in superficiei puncto aliquo: Si quis quærat, in quo superficiei puncto (pro hoc aut illo solidi percutientis situ) id contingat: Dicimus, in eo superficiei puncto contingere quod est in ipsa Directione Centri Virium in ictus instanti. Hoc est, si Centrum illud per rectam feratur, in eâ rectâ per quam fertur: si verò per curvam, in rectâ curvam illam (in ipso Virium Centro) tangentem, eo instanti quo fit ictus; (puta, in rectâ VT, seu VC, fig. 307. quæ curvam VV tangat in V:) eandem enim directionem esse Curvæ cujusvis (pro dato, in eâ puncto) atque Rectæ ibidem tangentis; ostendimus ad prop. 15. Cap. 2.

Moneo etiam (quod & supra insinuatam est,) Quâ ratione Grave (Ponderationem si spectes) perinde se habere acti totum ibidem esset ubi est ipsius Centrum Gravitatis, per Schol. prop. 16. Cap. 4. Eâdem & (Percussionem quod spectat) perinde se habere Corpus percutiens, acti totum ibidem esset ubi est Centrum Virium.

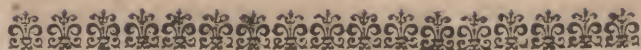
Atque hinc ad Funipendula æstimanda, via patet: Nempe, cujusque figuræ sit suspensum solidum, (puta Cylindricum, Conicum, aliudve,) tantæ longitudinis (vibrationem quod spectat) reputandum esse, quanta est distantia à suspensionis puncto ad Centrum Virium. Adeoque, verbi gratiâ, (dato quod Funipendula ejusdem longitudinis, æqualibus temporibus vibrent,) si Conus vertice suspensus (cujus Cen-

Ssss 2

trum

trum Virium ut ex Calculo superius insinuato, à vertice distat, $\frac{4}{5}$ totius Axis seu Altitudinis,) cum Globulo ex tenuissimo filo (cujus itaque consideratio hic non habetur) suspenso, cujus longitudo sit (à puncto suspensionis ad Globuli Centrum Virium) ad longitudinem seu altitudinem Coni, ut 4 ad 5; æqualibus temporibus vibrabitur uterque: utpote quorum Centrum Virium æqualiter à puncto suspensionis distant. Atque similiter in aliis judicandum erit.

CAP.



CAP. XII.

De Cuneo.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Cuneum, plerumque adhibent, ex Ferro seu duriorum aliquo metallo; formâ Prismaticis (non admodum alti) cujus oppositæ Bases sint Triangula Equicrura Acutangula: Quorum utriusvis Altitudinem, appello Altitudinem Cunei, (non, Prismaticis;) ejusdem Basem, Cunei Crassitiem appello; Rectamque quæ Triangulorum illorum Equicrurorum Vertices conjungit, Cunei Aciem: quodque eorum Bases conjungit Parallelogrammum; Cunei Dorsum.

II.

Malleum, seu Tuditem, adhibent plerumque ex Ligno duriore, formâ Cylindricâ (vel ad eam proximè accedente,) adjuncto ad Latus Manubrio, cujus ope Percussor Ictum infligit.

III.

Eodem etiam referenda sunt, Malleus Ferreus quo Clavos adigimus; Ascia, vel Securis, quibus Ligna Dolamus, aut Dissicamus; prægrandes Tudites, seu Arietes, quibus Pila, Palos, Sudes, (aliâque similia,) in Terram adigimus: aliâque non absimilia Organa innumera.

PROP.

PROPOSITIONES.

XIX. 9A C
PROP. I.

Datis Mallei Pondere & Celeritate Cuneum percutientis,
Cuneique Formâ: Vis Cunei, sic percussî, Calculo æsti-
mabitur.

Fig. 309. **I**ntelligatur Ligni Tenacitas seu Firmitudo, Cuneo divellenda; aut quorumvis Obicam, Cuneo divellendi, Resistencia, ut *O*.

Dico primo, si adhibeatur in Cunei Dorso D, vis V quæ sit ad O , ut CC cunei Crassities, ad ejusdem Altitudinem DA, (puta, ut c ad a .) Vis illa in D, æquipollebit Obici, Adeoque, aucta superabit. Cum enim, per prop. 2. Cap. 2. Motus in ea ratione polleant quæ ex rationibus Virium Motuumque & Progressuum Regulantium secundum Lineam directionis sua compositus, sitque amolito Obici (concordationem suam ad progressum Virium secundum directionem suam) in D, C ad A seu G, quævis quippe dum detrahitur Cuneus per totam suam Altitudinem D A, dirigitur Obex per totam ipsius Crassitiem C C & in toto processu proportionaliter. Si vires P & O , sint ipsæ a & c , (progressibus suis) reciproce proportionales; æquipollebit motus, propter æ Reciproce compositum rationem Equilatis, per prop. 6. Cap. 1. Hoc est, si sit ut a ad c sic O ad V .

seu $V = \frac{C}{O}$. Adeoque, si V maior sit, movebitur per prop. 2. O L
 Dico secundo, si sit Mallei ferientis Pondus P , Celeritas, in per-
 cussionis instanti utranque acquilata, C ; (puta, live id fiat, ob Gravis
 motum naturaliter Acceleratum, live etiam ob porro additam a Per-
 cussore vim); adeoque Mallei Momentum seu vires PC ; sitque
 $PC = V \frac{C}{O}$. Vis Mallei Cuncto directe applicata, Obici acqui-
 polebit, adeoque aqua movebitur

Et quidem (ob eandem causam), eoque amovere seu amoliri perseverabit, donec sic impensa Vis P. C. particulis Conco propriioribus rum-
pendis aut flectendis per æquipollentiam absorbeatur.

Idemque Momentum secundò adhibitum, tantundem præstabit ; & tertio, tantundem : atque sic porro prout opus fuerit.

SCHO.

SCHOLIUM.

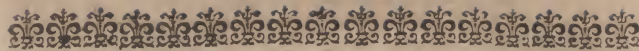
Sunt qui Cuneum, ad geminum Vebem referunt: quibus Vis in S, C, applicetur: Fulcra autem alii in O, O, ponunt; Oneraque in A utrinque protrudenda. Alii post Fulcrum commune in A ponunt, & Onera in O, O; (eò potissimum quòd, in Lignis aliisve diffindendis, Cunei Acies, non semper rem diffindendam attingit uspiam, sed medio suspensa pendet; adeoque non potest ibidem dici onus depellere.) Ego verò (ut alia taceam incommoda) rem simplicius exponendam duxi ex ipsis Motuum Elementis: uti factum est.

PROP. II.

Eadem similiter accomodari poterunt. *Malleo ferrug. Clavum adigenti; Tudie prægrandi. Pila, Sudes, Palive præacutos in Terram altius defigenti; Ascia, Bipenni, aut Securi, Ligna aliave dolanti, dividenti, aut dissecanti; aliisve Instrumentis non ab similibus.*

Quippe Clavi, Pila, Sudes, Palive præacuti; Cunei sunt: qui Malleo vel Tudie adiguntur. *Ascia, Bipennis, Securi & similia, sunt Malleo cum Cuneo connexo.* Atque de aliis istiusmodi simile fiet iudicium. Eademque quæ ad prop. præced. habent Demonstratione, pariter & hanc valebit.

CAP.



CAP. XIII.

De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Vim Elasticam appello, eam quâ Corpus de figurâ suâ Vi detrufum, feipsum in figuram pristinam Refituere fatagit.

II.

Elaterem appello, Corpus (aut etiam Partem Corporis) eâ Vi præditum.

VIs ἐλαστικὴ, ab ἐλαύνω, *Agito, Abigo, Excutio, Expello*, descendit: ut & (eiusdem originis) ἐλατھے. Vim eam insinuantem quâ Corpus, resiliendo, alia ab se Abigit.

Latinis (quantum scio) deest Vox propria quâ hoc significetur: unde factum est ut Vocabula Græca in usum sint recepta.

Elaterem Nostri a *Spring* vocant; à Verbo *to spring*, eâ significatione quâ *Salire* seu *Exsilire* significat, (ut Germanicum & Danicum *Springen*, Belgicum *Springhen*,) quæ est Vocis illius significatio primaria. Significat etiam (& fortè frequentius) sensu Metaphorico, *Germinare*; eò quod Germina de surculo quasi *Exsiliant*: Atque hinc tempus Vernum *the Spring* dicitur; quo scilicet potissimum omnia Germinant. Sed & Aquæ Fons seu Scaturigo (Aqua *Salientis* dicta) a *Spring* dicitur; ob salientem Aquam. Item, *to spring a Mine*, dicimus, quando Cuniculum, pulvere pyrio instructum, admoto igne accendimus, & *Exsilire* facimus.

Hinc Corpus Elasticum, a *springy body* dicimus; hoc est, Corpus Elatere instructum: & Vim Elasticam, *Springyness*.

Unde

PROP. I. De Elatere, & Resilitione, &c. 687

Unde sit in Corporibus hæc Vis Elastica; non hic inquiri: Sed neque ipsius Naturam suscipio me ita explicaturum, ut vel Lectori, vel mihi ipsi, per omnia satisfaciam. Neque enim id necesse est ad rem præsentem. Sufficit ut, undecunque fuerit, Vim istiusmodi in rerum naturâ esse certum sit: Cum & pressa resurgere; Corporaque suo nisu restituta, ab se alia abigere, nemo non videat. Atque de hac Vi, undecunque fuerit, jam agimus.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Grave motum, in firmum Obicem, directè impingat; sitque vel alterum vel utrumque Corpus Elasticum: Eâdem celeritate resiliet, seu reperiuetur, quâ adveniat; & per eandem rectam.

Sto enim A Grave (cujus pondus m , celeritas r , adeoque momentum $m r$ PC,) quod, per A A rectam, in firmum Obicem B directè impingat. Sitque non ita perfectè Durum; ut nullâ ratione ictui cedat, vel Corpus latum, vel Obex. Sed neque ita Molle, ut figuram præstinam ictu deperdat (quod in Cerâ, Plumbo, Luto, aliisque ejusmodi Corporibus vel fragilibus vel ductilibus fieri solet,) sed vim habeat Elasticam (alterum vel utrumque Corporum) quâ se restituere valeat in figuram præstinam, quamprimum Vis Comprimens cessaverit.

Fig. 299.

Atque intelligatur Obicis pars percussa, Vi Corporis impellentis introsum pressa; quæ itaque insitâ Vi Elasticâ se restituere conabitur.

Dico primò, Pressionem hanc eousque continuò fieri, donec Vis Elastica, compressioni adversa, Vi Comprimenti æquipolleat. Quippe quamdiu Vis Comprimens, fortior est quàm Elateris Resistencia, etiamnum Elaterem flectere seu comprimere perseverabit. per prop. 12. Cap. 1.

T t t

Est

Est autem ea Vis comprimens, dupla momenti Gravis impingentis. Nam vis ab impingente Gravi illata, est ipsius momento æqualis (utpote cuius motus totus sistitur,) puta *mrPC*. Sed &, propter æqualem Obicis resistantiam, (quæ tantundem ad compressionem confert ac si æqualis vis contraria occurreret,) tantundem inde advenit, puta alterum *mrPC*; (sed cuius hic minor habenda ratio, utpote quod aliunde compensatur:) Adeoque vis tota compressiva, *2mrPC*.

Dico porro; Vim Impellentem seu Comprimentem, ubi ad Æquipollentiam res redigitur, cessare; (utpote quæ tota flectendo Elatere impensa est.) Vis enim extrinsecus impressa, qualem supponimus Impellentem, (secus quam Vis insita, qualis est Gravitatis, & Vis Elastica compressa,) ubi semel ad quietem redigitur, perit; neque valet seipsam restituere: ut neque se accelerare, ubi retardatur. Utur enim Corpus in motu, nisi impediatur, eo ipso perseverat: non acceleratur tamen, aut ex quiete in motum reducitur, absque causâ positivâ. per prop. 11. Cap. 1.

Dico itaque tertio; cessante (ut dictum est) motu Impellente, seu Comprimente, Vim Elasticam, jam liberam, & (ut modo demonstratum est) Vi pridem comprimenti æqualem, æqualiter utrinque se explicare nitentem, vim dimidiam seu alterum *mrPC* in Obicem impendere (utut irritò conatu,) alterum verò *mrPC* in advectum Græve. Quod itaque eadem Vi, adeoque & eadem Celeritate, Corpus A repellit, quâ advectum fuerat. (Nempe, Vi *mrPC*; adeoque, propter pondus *mP*, Celeritate *rc*.) Nam Vis Æqualis, eidem Ponderi applicata, eadem Celeritate movet; per prop. 27. Cap. 1.

Dico denique; per eandem rectam repercussum iri. Cum enim à corpore directè impingente introrsum flectatur Elater, idemque Vi Elasticâ in figuram pristinam se restituat, per def. 1. hujus, (adeoque eadem viâ redeat quâ premebatur,) eandem Directionem Corpori repercussio impertit quam inde acceperat, nisi quod sit ad partes contrarias. Quod itaque per eandem rectam redibit.

Quodque jam demonstratum est, positâ in Obice Vi Elasticâ: perinde obtinet si Vis illa sit in Corpore impingente; vel etiam in utroque. Quippe illud utcumque obtinet; Non prius sisti Vim Impellentem, quam æquipolleat Elateris (sive Singularis, sive Gemini,) adversâ Resistentiâ; sed neque ultra perseverare; Unde reliqua sequuntur.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; susteretur motus A, ad quietem redactus: per prop. 1. Cap. 11. Torus igitur qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutivâ. Ea verò semper æqualis est Ictûs Vi, (Cap. 11. prop. 5. & seqq. traditæ.) Vis enim Elateri illata, Ictui (quem totum sustinet) æqualis est: quæ itaque Elaterem eousque comprimit donec hujus resistentia illi æquipolleat. Et quidem si resisteret ut nudum Impedimentum; quiesceret adhuc advectum Grave: Cum verò Elater resistat, non ut nudum Impedimentum, sed ut Vis contraria, & quidem tantundem renitendo agens quantum compressus pateretur; sitque hoc quod patitur, Ictui seu Vi illatæ æquipollens: etiam eidem æquipollet Vis restitutiva. (Quod & in propositionibus sequentibus non minus locum habet, adeoque & ibidem pro demonstrato habetur.) Est autem, hoc casu, (posito Gravis A, pondere mP , & Celeritatē rC .) Ictûs magnitudo (per prop. 6. Cap. 11.) $2mrPC$: tanta igitur erit Vis Elateris restitutiva: Quæ itaque cum utrinque se explicare satagat, adeoque Vi dimidia seu $mrPC$ in Obicem, utut irritò conatu; & in advectum A, vi item dimidiâ $mrPC$ repellendo: Erit, propter pondus mP , Celeritas (retrosum) rC . Quod erat propositum.

Adhuc aliter.

Cum nullus fortè sit tam firmus Obex quin aliquatenus percussioni cedat; utut tam exigua possit esse ea cessio ut omnem sensum fugiat, adeoque meritò negligatur & pro nullâ habeatur, & Obex pro immobili; (ut, verbi gratiâ, si musca vel pulex in telluris molem in aere pendulam insultum faceret:.) Si res ita concipiatur; demonstrabitur idem (mutato propositionum ordine) ex prop. 8. hujus: Ubi supponitur A motum, in B quiescens, sed non impeditum, impingere. Quippe si illic sit A, ponderis mP (exigui) cum celeritate rC ; B verò ponderis nP (immensè magni) quiescens: Erit impingentis A celeritas post contactum $\frac{m-n}{m+n}rC$ prorsum, (per prop. 8. hujus;) hoc est, (propter prævalentiam signi —, ponitur enim nP multo majus quàm mP .) $\frac{n-m}{m+n}rC$ retrosum; quod (propter exiguam & planè contemnendam ponderis mP magnitudinem respectu immensi ponderis nP) tantundem erit, hoc casu, atque $\frac{n}{n}rC = rC$ retrosum: Reliqui autem gravis B (per eandem prop. 8.) celeritas post contactum

T t t t 2

2 m

$\frac{2m}{m+n} r C$; quæ (propter exiguam & planè contemnendam rationem m seu $2m$, ad n nedum ad $m+n$) inſtar nullius erit; ut non immerito dici poſſit B immotum quieſcere.

Sin ea ſuppoſitio non admittatur, ſed Obex. B cenſeatur planè immobilis; cenſenda erit ejus firmitas æquipollere ponderi quieſcenti ſed non impedito nP , infinito, (pondus enim finitum non impeditum, nonnihil ſaltem movebitur, per eandem prop. 8.) Adeoque implin-

gentis A, Celeritas poſt contactum (ibidem exhibita) $\frac{n-m}{m+n} r C$ re-

trorſum, erit $\frac{\infty-m}{m+\infty} r C$; quod tantundem eſt (propter finiti m ad infinitum ∞ , rationem infinite exiguam ſive nullam,) ac $\frac{\infty}{\infty} r C = r C$.

Et quieſcentis pridem B, Celeritas poſt contactum $\frac{2m}{m+n} r C$, erit

$\frac{2m}{m+\infty} r C$; quod tantundem eſt (propter m finitum, & n infinitum)

atque $\frac{2m}{\infty} r C$, ſeu $\frac{0}{\infty} r C$, celeritas nulla; quare & B etiamnum quieſcet. Prout alias ante demonſtratum fuerat.

S C H O L I U M.

Non ignoro; pleroſque Mechanicorum Vim nescio quam in Motu incepto ponere, quâ (ſi procedere non poſſit) mutatâ directione (etiam abſque novâ cauſâ) reſiliat. Cum verò hoc gratis dictum videatur, (ut novus motus abſque novâ cauſâ incipiat,) & Poſtulat; atque multis porro incommodis urgeri poſſit: Id me potiſſimum movet, quòd utut nudum Impedimentum Motui tollendo ſufficiat, (adeoque inceptum motum impedire valeat ne procedat,) quò tamen contrarius ponatur, Vi Poſitivâ videtur Opus: (per prop. 11, 12. Cap. 1.) Cùmque ea in Vi Elastiâ præſto ſit, cur illam reſpuamus non video. (Præſertim cùm in Molli Corpore, vel etiam Fluido, in Solidum impacto, motum ſiſti videamus, ſed non Reſecti.)

Si tamen iſtiusmodi Corpus ſit, ut nec ita Molle ſit quin aliquid habeat Elastiæ Virtutis; nec ita interim Elasticum planè quin fractis Elaterum fibris aliquot (nec tamen omnibus) figuram quadantenus immutari patiatur: Reſilitio quidem fiet, ſed imperfecta. (Supponit enim Demonſtratio, tam Validam eſſe Vim Elasticam, ut Vi Impellenti ſuſtinendæ

ſuſtineret par ſit, abſque aliquâ ſui ruptione.) Sed & idem quadantenus accidit ob Medii reſiſtentiam: quæ Motum tum Directum, tum Reflexum, ſenſim imminuit. Item, ob naturalem gravium Deſcenſum; qui ſe cum reliquis motibus ſenſim inſinuabit. Sed eas conſiderationes, & (ſi quæ ſint) extrinſecas alias, hic ſecludimus.

Notandum etiam; utut Vim Impellentem, quaſi totam extrinſecus Impreſſam ſupponamus, adeoque ceſſare totam ubi ad Aſquipollentiam res redigitur: Fieri tamen poſſe, ut ea partim naturalis ſit, à Gravitate orta; uti cum deorſum projicitur corpus impactum, aut etiam deorſum cadens motu naturaliter accelerato eum acquirit Impetum quo in Obicem impingit. Quod ubi contingit, moderatione opus erit. Separanda utique eſt Vis extrinſecus impreſſa, ab eâ quæ Gravitatis eſt ſimpliciter conſideratâ: Eaque tota perit; dum hæc permanet, & Vim Elastiſcam eatenus obtundit, quo Reſiliriſio imperfectior evadat & minori cum celeritate; Quin & tanta eſſe poſteſt ut Elastiſcam Vim ita ſuperet, ut quamvis aliquantulum reſurgat (ob ſublaram Vim extrinſecus impreſſam, quâ etiam primitus comprimebatur,) non valeat tamen impactum corpus ab ſe abigere.

Sed & qui accelerando acquiritur Celeritatis gradus, ſeparandus erit à nativâ gravitate: Quippe Grave acceleratum, ubi Objeſto Obice ne procedat impeditur, nativam quidem Gravitatem retinet, ſed acquiſitam Celeritatem deperdit; atque deinceps tanquam à Quiete incipiens procedit, nullâ ratione habitâ Celeritatis pridem-acquiſitæ ſed jam deperditæ.

Sin (contra hanc de Vi Elastiſcâ hypotheſin) obijciatur; Omnia omnino Corpora Dura, huiusmodi Reſilitionem ſeu Reflexionem admittere; & quidem ea fortiùs quæ Duriora ſunt & firmiora: Fieri quidem id omnino poſteſt, nec interim adverſari huic de Vi Elastiſcâ doctrinæ; Nempe, ſi & illa omnia Dura Corpora, ſint etiam Elastiſca. Quod quidni dicendum ſit, non video. Et quamquam quò Duriora ſunt, eò minus preſſui cedant: cedunt tamen; & quò minus cedunt, eò fortiùs reſiſtunt, adeoque & reſpercutiunt. Et quamquam Cap. 11. (ubi de Percuſſione agitur) Duritiem præcluſâ Elastiſcitate conſideremus; (ut quid inde ſequeretur demonſtrems ſi nulla eſſet Vis Elastiſca:) Non tamen id volumus ut Vim Elastiſcam de Duris ſimpliciter negemus; cum nulla forſan ſint Corpora ita ſimpliciter Dura ut illam non habeant: (Utut, ita Mollia, forſan eſſe poſſint.) Et quidem ego (ut dicam quod res eſt) omnino exiſtimo; Vel nulla eſſe Dura Corpora, quæ non ſint Elastiſca; vel ſaltem (ſiqua ſint) ea, invicem commiſſa, nullam Reflexionem pati; ſed obſervare leges

Capitis

Capitis XI. Et quidem in Marmore, Vitro, Ligno, Fi&tilibus, Metallis, durioribus, aliisque duris innumeris, Vim Elasticam inesse; non tantum ex sono edito (Bombo vel Tinnitu, prout repercussio tardior est vel expeditior,) auribus percipimus; sed Oculo, & Tactu, observare licet, ob tremorem utique notabilem.

PROP. II.

Si Grave motum, in firmum Obicem Obliquè impingat; sitque vel Alterum vel utrumque Elasticum: Resilitio, eâdem Celeritate (& in eodem Plano) ita fiet, ut Angulus Reflexionis sit angulo Incidentiæ æqualis.

Fig. 310. I Ntelligatur, in ABC planum firmum, per OB rectam obliquam, impingens Grave; Angulum Incidentiæ faciens OBA . Componetur hic motus Obliquus per OB , ex duobus motibus (per prop. 6. Cap. 10.) altero Parallelo, ut OP seu AB ; altero Perpendiculari, ut PB . Quorum quidem ille (utpote parallelus) in ABC planum neutiquam offensat, neque ob eo impeditur: adeoque eâdem Celeritate quâ prius procedet; putà, quo tempore ferebatur ab OA ad PB , eodem vel æquali feretur (æquali longitudine) à PB ad QC . Altero vero (utpote perpendiculari) per PB in ABC planum directè impingit: adeoque, propter Vim Elasticam (sive alterius sive utriusque Corporis) in B puncto Incidentiæ, eâdem Vi, adeoque & eâdem celeritate, directè repercutitur per BP . per prop. præced. Hoc est, eodem seu æquali tempore feretur ab A ad O quo ab O ad AC ferebatur; hoc est, eodem quo à PC ad QC . Adeoque per rectam BQ . per prop. 6. Cap. 10. Et propterea, propter OP ipsi PQ æqualem, & PB seu BP communem, (omnesque æquali tempore transactas,) erit BPO triangulum triangulo BPQ simile & æquale, (& quidem, propter OPQ unam rectam, in eodem plano utraq;:) Adeoque tum PBQ angulus æqualis angulo PBO , tum (reliquus ad rectum) QBC angulus Reflexionis, (reliquo item ad rectum) OBA angulo Incidentiæ, æqualis. Quæ erant demonstranda.

SCHOL.

SCHOLIUM.

Siquis autem ex Tyronibus (aut alius quispiam tyrone major) quirit, Cur simplicissimum motum rectum OB, ex duobus compositum affirmem Gratis? Aut etiam, si compositum esse velim; cum tamen mille modis aliis, æquo jure, dici possit componi; cur ego, reliquis posthabitis, hoc præ cæteris modo compositum, affirmem Gratis; (nec Prohem, tum Compositum esse, tum hoc non alio modo compositum?) Respondeo, Nullum ita simplicem esse motum posse, quin in plures componentes resolvi possit. Dum autem hunc præ cæteris modum seligo; utor ego meo jure, qui (cum quamlibet possim) eam adhibeo compositionem quæ præsentis negotio sit accommodata. Neque probandum erit, Compositionem hanc unicam, esse possibilem; sed, ex multis unam. Liberum utique est, pro suo-cujusque constructoris arbitrio, ex Veris innumeris ea seligere quæ ad rem præsentem conducant.

Atque hoc perinde obtinet (ut aliis compositionibus rem illustrem) in aliis atque in præsentis casu. Notum utique est, numerum 12, componi ex 3×4 , sed & ex 2×6 , item ex 1×12 , (aliisque modis innumeris per numeros fractos.) Si itaque exponatur numerus 12, dato Divisore 2 dividendus, & quærat Quotiens: Afferam ego protinus, numerum 12 ex 2×6 compositum; adeoque sumpto Divisore 2, Quotiens erit 6. Sin oggerat aliquis, Numerum hunc Duodenarium de quo fit sermo, nullâ hujusmodi compositione constructum fuisse; sed nudâ Unitatum collectione; (putâ, si totidem homines viritum collecti fuerint.) Cur itaque velim ego, numerum (additione merâ constructum) multiplicando compositum affirmare Gratis? Et quidem, si velim esse multiplicando compositum, cur sic compositum (ex 2×6) affirmem Gratis, cum possit eodem jure ex 3×4 , vel 1×12 , &c. componi dici? nec probem, eo potius modo fuisse compositum? Num audiendus, inquam, est hic Objector? Annon reponendum statim videas, Non eo minus numerum 12 ex factoribus 2×6 compositum esse, vel in eos resolvablem, quod fuerit (hac vice) additione constructus? Quippe cum constitutus est numerus, utcumque constitutur, non ideo deperdit proprias affectiones. Quod autem non dixerim ex 3×4 , vel 1×12 , Compositum, (utur hæc vera sint, atque aliâs, ubi opus fuerit, dicenda,) sed ex 2×6 : ratio in promptu est: Nempe, non quod reliquæ compositiones non sint veræ, sed quod ad præsens negotium sint inutiles. Quippe non quærebatur

quærebatur numerus qui cum 1, vel 3, vel 4 compositus, sed qui cum 2 compositus, constituat 12

Similiter, cum possit Ratio A ad B , mille modis componi; puta ex A ad C & C ad B ; vel ex A ad D & D ad B ; vel ex A ad E & E ad B ; &c. Si tamen datis rationibus A ad B (puta 1 ad 2) & A ad C (puta 1 ad 3) quærat, quæ sit ratio C ad B : Dicendum erit, non quidem rationem A ad B compositam esse ex A ad D & D ad B ; aut ex A ad E & E ad B ; (quippe hæ compositiones, utut veræ sint, ad rem præsentem non faciunt;) sed, ex A ad C & C ad B : Adeoque, si ex ratione A ad B ximatur (altera componentium) A ad C , habebitur (reliqua) C ad B ; (puta 3 ad 2.)

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{B} = \frac{A}{D} \times \frac{D}{B} = \frac{A}{E} \times \frac{E}{B} \text{ \&c. } \left(\frac{A}{C} \right) \left(\frac{C}{B} \right) = \left(\frac{1}{3} \right) \left(\frac{3}{2} \right)$$

Siquis autem quærat; cur velim ego rationem simplicissimam, 1 ad 2, compositam esse gratis affirmare? Et quidem, Cur sic compositam, cum aliis mille modis non minus componi possit? Omnino imprudenter atque imperitè hoc quæritur: Cum nulla sit tam simplex ratio quæ non possit in plures resolvi: Neque, cur, reliquis posthabitis, hanc selegerim compositionem; aliam reddendam esse causam, quam quod hæc sit præsentis negotio reliquis accommodatior.

Pariter; si expositi Gravis, datum sit Momentum $mrPC$, & datum Pondus $2mP$, quærat autem Celeritas: Respondendum, non quidem $mrPC = mP \times rC$, vel $= rP \times mC$ (quæ quidem vera sunt, & alias dicenda, sed nihil ad rem præsentem,) sed $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$; (adeoque Celeritatem quæ sitam esse $\frac{1}{2}rC$;) Non utique quærebatur, quâ Celeritate pondus mP , seu rP , sed quâ $2mP$ ferendum sit ut momentum habeatur $mrPC$.

Atque similiter omnino in casu præsentis. Quippe cum constet motum OB , eundem esse cum eo qui componitur ex OP & PB , (neque enim hoc negabitur;) quidni dicam motum OB ex OP & PB componi, aut (quod tantundem est) in hos resolvablem esse? (eodem jure quo, si constet numerum 12 eundem esse cum eo qui componitur ex 3×4 , dixerim 12 ex 2×4 componi?) Et quamquam multis adhuc aliis modis componi possit; dum hunc præ cæteris seligo ut negotio præsentis accommodum; utor ego meo jure: Eodem usus, si, exposito plano alio, aliam selegero compositionem. Quippe si pro ABC exponeretur planum $\alpha B\gamma$; eundem OB motum, compositum dicerem (non, ex OP & PB , sed) ex $O\pi$ & πB . Adeoque, propter æquales $O\pi$, $\pi\chi$, in eadem parallelâ rectâ; & $B\pi$ ipsi

π B vel æqualem vel eandem; Reflexionem futuram esse in B χ recta; Angulūque Reflexionis χ B γ , angulo Incidentiæ O B æqualem. Has autem (respective) compositiones adhibeo, non quasi aliæ non essent veræ; sed quod, ex veris multis, ea seligenda sit (utrobique) quæ ad rem propositam conducatur. Id autem hic loci est; ut totum illud motus Obliqui O B cui adversatur planum A B C, vel α B γ , ab eo separem cui non adversatur: quod non aliter obtinetur, quam resolviendo motum obliquum in Parallelum est Perpendicularem.

Estque res hæc tam Clara, ut nullâ illustratione putaverim indiguisse, si non hoc ipsum serio objectum viderim à Viro cum tyronibus non numerando.

PROP. III.

Si duo Gravia invicem Æqualia, æquali Celeritate sibi mutuò directè occurrant; sintque (alterum vel utrumque) Corpora Elastica:

Aut etiam, si Gravia illa sint Inæqualia, sed Celeritates habeant reciproce proportionales, (quo saltem Momenta sint Æqualia:)

Resiliet utrumque eadem Celeritate quâ accesserat, & per eandem rectam.

Intelligentur, sic occurrentia, A, B, gravia: quorum utriusque Pondus sit mP , Celeritas rC : Vel, illius quidem Pondus mP , Celeritas rC ; hujus verò Pondus rP , Celeritas mC : Adeoque (utrovis casu) Momentum utriusvis $mrPC$, & simul utriusque $2mrPC$. Quorum cum utriusque Vim sustineat Elater (sive singularis sive geminus,) nec prius flecti cesset quam hujus resistentia eorum utrique æquipolleat, (per demonstrata ad prop. 1. hujus,) tum verò Vis impellens (ad quietem redacta, adeoque destructa,) urgere cesset: Elater Vi suâ (impellentibus æquali) æqualiter utrinque se expedire satagens, utrinque eadem Vi (totius dimidiâ) $mrPC$ repellit gravia; hoc est, eadem quâ advehebantur; adeoque & eadem respectivè Celeritate; per prop. 27. Cap. 1. Hoc est, si utrinque sit pondus mP , celeritate utrinque rC , (sed ad contrarias partes:) Sin secus; pondus mP Celeritate rC , & pondus rP celeritate mC : (propter $mrPC = mP \times rC$)

Vvvv

Fig. 302.

696 *De Elatere, & Resilitione* CAP. XIII.

= $rP \times mC$:) Hoc est, eâdem Celeritate utrumque quâ advenerat.
 Er quidem per eandem rectam (contrariis motibus) propter Elaterem eâdem Directione redeuntem quâ premebatur; utpote ad figuram pristinam se restituere satagentem. Quod & in sequentibus propositionibus pariter intelligendum erit; adeoque & ibidem pro demonstrato habeatur.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus uterque, ad quietem reductus; per prop. 4. Cap. 11. Adeoque totus qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutiva: Quæ tanta semper est quanta est Vis lætûs; (ut ad prop. 1. hujus, ostensum est:) Hoc est, in casu præsentis, (per prop. 7. Cap. 11.) $2mPC$: Quæ utrinque æqualiter se expedire satagens, agit utrobique ut $m rPC$: Adeoque repellit Pondus mP celeritate rC , & pondus rP celeritate mC : ut prius.

PROP. IV.

Si duo Gravia Elastica (non ab invicem compressa) vel quiescant utraque; vel utraque per eandem rectam ad easdem partes æquali celeritate ferantur; vel denique Antecedens Celeritate majore; (sive invicem contigua sint, sive disjuncta:) Nullus Impulsus fiet, aut Elateris compressio; adeoque nulla propterea motuum immutatio.

Quare & si, Gravibus aliâs motis, communis addatur (vel auferatur) Celeritas; nulla sit inde impulsûs mutatio, (aut quæ hinc sequuntur:) sed perinde est (Impulsus quod spectat, aut Elateris compressionem,) sive adsit sive absit communis illa celeritas.

Propositio pater. Quippe, si utraque quiescant, nulla Vis utrivis infertur, nullus obstruitur motus, neutram impellit reliquum, nullaque sit quæ ab impulsu esset Elateris compressio, aut quæ ab utrovis procederet motuum immutatio, (putà, quæ vel Celeritatem spectet, vel Directionem,) utne contigua fuerint ea Gravia; nedum si disjuncta.

Similiter, si ferantur utraque ad easdem partes eadem Celeritate.
 Quippe,

Quippe, si disjuncta sint, manebunt adhuc disjuncta, (& quidem eodem intervallo,) propter eandem utriusque Celeritatem; adeoque ne quidem se contingent mutuo, nedum impellent. Sin contigua sint; dum tamen Antecedens eadem Celeritate fugit quâ sequitur Insequens; utrunque nulla Vis infertur nulla motus obstructio; adeoque nullus impulsus, nulla compressio, nullaque inde motus immutatio.

Sin Antecedentis Celeritas sit major: tantum abest ut à segnius Insequente prematur, ut hoc à tergo relinquatur, facto intervallo si fuerint contigua, & aucto ubi disjuncta fuerint.

Addo tamen, *modo ne sint ab invicem compressa*: Quippe, si hoc contigerit, Vis Elastica, quamprimum poterit, se exseret, motusque immutationem efficiet.

Atque eadem ratione constabit Corollarium. Quippe, quâ Celeritate fugit Antecedens, adeoque se subducens declinat ictum; eatenus sequenti non obstat, ejusve motum obstruit, unde sequeretur impulsus vel compressio, (non magis utique quàm ubi sequenti contiguo se subducit antecedens;) sed tota Vis impulsiva seu compressiva, æstimanda est, ab excessu Celeritatis sequentis supra Celeritatem antecedentis ad easdem partes moti; qui idem utcumque erit quicumque vel addatur vel auferatur motus utriusque communis.

Aliter.

Vel sic; Ob motum communem, nullus fit Ictus, vel ictus immutatio; per prop. 7. Cap. 11. Ergo, nulla Elateris compressio (aut quæ hinc sequuntur) ut quæ Ictui æquipollet; per demonstrata ad prop. 1. hujus.

PROP. V.

Si Grave motum, Æquali Quiescenti (nec impedito tamen) directè impingat; sitque vel alterum vel utrumque Elasticum: Motum quiescet; & Quiescens movebitur, eâ Celeritate quæ fuerat prius moti.

Esto Graviorum hujusmodi invicem æqualium, A, B, pondus utriusvis *Fig. 300.*
 mP . Quorum B quiescat; eique directè impingat A, Celeritate
 rC , adeoque Momento seu Impetu $mPC = mPrC$. Vim huic æqui-
 pollentem Imprimeret Elateri, (eâdem seipsum exuens) quâ (retentâ)
 Elater post repelleret ipsum A (ad quietem redactum,) modò B fir-
 mum

VVVV 2

num esset: per prop. 1. hujus. (Ut taceam id quod est ab Obice atque in Obicem rependitur.) Sed, propter non impediti B cessionem, quam ab A recipit Vim Elater, eandem cedenti B protinus impertit, (nec in se retinet, ut in casu prop. 1. quò possit A post repellere.) Unde factum est, ut impellens A (vi sua destitutum quam in Elaterem impenderat) Quiescat; eaque Vi $mrPC$ (Elateris interventu in B collata) propellatur B; adeoque (propter mP pondus) Celeritate rC (prorsum,) quæ fuerat impellentis.

Demonstratio alia.

Sunto hujusmodi Gravia æqualia A, B, quorum utriusvis Pondus sit mP . Atque, in B quiescens, directe impingat A, Celeritate rC ; adeoque Momento seu Impetu $mrPC$. Quo itaque, propter cessionem, non impediti B, utraque junctim ferenda essent (si Vis Elastica abesset) Celeritate dimidia, $\frac{1}{2}rC$ prorsum, (propter $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$;) per prop. 2. Cap. 11. Sed (propter Vim Elasticam) Elateri imprimatur Vis restitutiva ipsi $mrPC$ æquipollens. (Nam quamdiu Elateris flexio facilius fiat quam utriusque Gravis processus, Elater porro flectitur; & quâ Vi flectitur, eadem propter Vim Elasticam se restituit.) Elater itaque, utrinque se explicare satagens (diremptis invicem Gravibus) Repellit A, Vi $\frac{1}{2}mrPC$; atque eadem Vi $\frac{1}{2}mrPC$ Propellit B; Adeoque (propter pondus utrobique mP ;) A quidem Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) B verò, Celeritate $+\frac{1}{2}rC$ (prorsum.) Sed ferendum erat A alio nomine (ut dictum est) Celeritate $-rC$ (prorsum;) Ergo, cum hoc nomine accedat Celeritas $-rC$ (retrorsum;) quiescet A (seu nullâ in utramvis partem Celeritate movebitur) propter $-\frac{1}{2}rC - \frac{1}{2}rC = 0C$. Ferendum autem erat B alio nomine (ut item ostensum est) Celeritate $\frac{1}{2}rC$ (prorsum;) sed & hoc nomine propellitur item Celeritate (prorsum) $\frac{1}{2}rC$: Ergo, tota Celeritas est $\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = rC$ (prorsum;) hoc est, ea quæ fuerit prius moti A.

Vel sic brevius.

Positis ut prius; ferenda essent utraque si Elater nullus foret, Celeritate $\frac{1}{2}rC$ prorsum; adeoque utrumvis momento seu Vi $\frac{1}{2}mrPC$; per prop. 2. Cap. 11. Est autem (per prop. 9. Cap. 11.) istius magnitudo $mrPC$; atque huic æqualis Vis Elateris restitutiva, (per demonstrata ad prop. 1.) quæ se utrinque explicare satagens, dimidia Vi tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque ipsi A impertit Vim $-\frac{1}{2}mrPC$ (retrorsum,) & B, Vim $+\frac{1}{2}mrPC$ (prorsum;) quæ si prius positæ respectivè addantur, fiet Vis in A $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}mrPC = 0PC$; quod itaque quiescet; in B verò $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}mrPC = mrPC$; (prorsum;)

(prorsum;) quod itaque (propter pondus $m.P$). feretur prorsum Celeritate $r.C$ quæ fuerat ipsius A.

Adhuc alia.

Sunto ea Gravia æqualia (ut prius) A, B; & quiescenti B, directè impingat A, Celeritate $r.C$ prorsum. Intelligatur autem utrique superaddi motus communis, Celeritate $-\frac{1}{2}r.C$ (retrosum;) quo fiat Gravis A Celeritas $r.C - \frac{1}{2}r.C = \frac{1}{2}r.C$ (prorsum,) & Gravis B Celeritas $-\frac{1}{2}r.C$ (retrosum.) Quo casu, ferretur A, post contractum Celeritate $-\frac{1}{2}r.C$ (retrosum,) & B Celeritate $+\frac{1}{2}r.C$ (prorsum,) per prop. 7. hujus. Sed (propter communem motum nullius instar, impulsus quod spectat, per prop. præced.) idem erit impulsus effectus in casu præsentis. Si itaque in statum pristinum restituantur, demptâ utrinque quæ addebatur Celeritate $-\frac{1}{2}r.C$, (seu, quod eodem recidit, additâ Celeritate $+\frac{1}{2}r.C$ prorsum,) habebitur Gravis A Celeritas $-\frac{1}{2}r.C - \frac{1}{2}r.C = 0.C$; & Gravis B Celeritas $+\frac{1}{2}r.C - \frac{1}{2}r.C = +r.C$. Hoc est, quiescet A, & feretur B prorsum, eâ Celeritate quæ fuerat ipsius A.

SCHOLIUM.

Plures hic demonstrationes congesti (ut & in aliis propositionibus,) non quòd diffidam singulis. (velimque numero supplere quod vi deest,) inest enim singulis sua Vis: Sed, cum pro vario lectorum gustu modò hic modò ille demonstrandi modus placeat magis, ut quam magis velit Lector eligat. Prima quidem, aut etiam secunda (ut ad prop. 1. & 3. Physicam rei causam magis explicant; quam tamen in sequentibus parcius prosequor, ut quæ ab his dependent. Penultima (quæ ex Vi quæ foret si Elater nullus esset, eâque quæ ex Elateris Vi restitutivâ, ictui semper æquali, colligit Vim integram,) meis hypothesebus Cap. 11. traditis maximè accommodata est, & demonstratio Geometrica (uti mihi videtur) maximè genuina. Adjunxi tamen ultimam, in eorum præsertim gratiam quæ hypothesebus illis meis (vix dum receptis) difficilior forsitan sint assensuri. Eâ quippe methodo (quam, unâ cum præcedente, sequentibus item propositionibus accommodo,) missis aliis, ex solis prop. 3. & 4. hujus admissis (quas alii postulant, potius quàm probant, tanquam per se claras, aut experimentis Physicis satis comprobatas) sequentes solo calculo elicit: ut (quicquid sit de illis hypothesebus, quas tamen ego maximè genuinas existimo) nullus sit de propositionum illarum veritate dubitandi locus; ut quæ non aliter à meis hypothesebus dependeat, quàm quòd ego inde probem propositionem tertiam hujus, quam alii gratis postulant. Sed & existimavi

istimavi non abs re fore, utriusque methodi consensum indicare: Adeoque Phænomena Motuum in Hypothesi nostra, (utut sint ex aliis principiis deducta; ipsaque Hypothesis nostra, in *Transaktionibus Philosophicis* postmodum vulgata, *Societati Regiæ* prius fuerit exhibita & Regestis inserta, quam eorum vel vulgatæ fuerit vel exhibitæ;) eadem planè sint cum Phænomenis Hypothesium *D. Christophori Wrenni* nostri, & *D. Christiani Hugenii* Batavi. Id utique interest; quod, quæ illi vel postulant vel ex observatis nullâ habitâ Elateris ratione supponunt; nos, Elateris ope, ex primis Principiis deducimus: Phænomenis interim quæ nos inde ratiocinando colligimus, iisdem provenientibus quæ ex factis Experimentis observarunt ipsi. Ut inde minùs dubitandum sit, (cum singuli, clam reliquis, à diversis principiis, & diversis methodis ad eadem Phænomena pervenerimus,) quin in veritate Phænomenûn consentiamus omnes.

PROP. VI.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, ferantur (per eandem rectam ad easdem partes) Celeritatibus inæqualibus, & consequens (majori Celeritate latum) antecedenti directè impingat: Ferentur, post contactum, ad easdem partes utraque, celeritatibus alternatis, seu invicem permutatis.

Si It Graviorum illorum æqualium A, B, utriusvis pondus mP ; celeritas illius, $rC = sC + tC$; hujus sC : adeoque momentum illius, $m r P C$; hujus, $m s P C$; prorsum utraque. Eritque propterea Vis Elateris restitutiva (utpote lèvi æqualis, per demonstrata ad prop. 1.) $m r P C - m s P C = m t P C$; per prop. 10. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare nitens, vi dimidiâ $\frac{1}{2} m t P C$, tum Repellit A, tum Propellit B; adeoque (propter pondus utrobique mP) confert illi celeritatem $-\frac{1}{2} t C = -\frac{r-s}{2} C$ (retrosum;) hæc, $+\frac{1}{2} t C = +\frac{r-s}{2} C$ prorsum. Sed & aliunde (si Elater nullus esset) ferendum

rendum erat utrumque Celeritate $\frac{r+s}{2} C$; per prop. 3. Cap. 11.

Quâ utrobique additâ, fit Gravis A, celeritas $-\frac{r-s}{2} C + \frac{r+s}{2} C$
 $= sC$; & Gravis B, celeritas $+\frac{r-s}{2} C + \frac{r+s}{2} C = rC$: Hoc
 est, prorsum utraque & celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sint Gravia illa æqualia A, B; sitque antecedentis B, celeritas sC ; insequentis A, celeritas (major) $rC = sC + iC$. Cum itaque sit utrique communis celeritas sC , tantundem est (compressionem quod spectat) atque si utrobique abesset; (per prop. 4. hujus.) Adeoque sequens A, celeritatis excessu rC ; impingeret in B quiescens. Quo casu ferretur B, post contactum, celeritate iC (quæ fuerat insequentis A,) A verò (quiescens utique) celeritate oC ; per prop. 5. hujus. Si itaque utrique restituatur, quæ communis fuerat, celeritas sC (modò demptâ;) habebitur celeritas A, $oC + sC = sC$; & celeritas B, $rC + sC = rC$: Hoc est, ferentur utraque ad easdem partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VII.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, Celeritatibus inæqualibus (per eandem rectam ad contrarias partes) sibi mutuo directè occurrant: Ferentur deinceps ad partes contrarias, Celeritatibus invicem permutatis.

Sit Graviorum æqualium A, B, utriusvis pondus mP ; illius verò ce- Fig. 302
 leritas, rC (prorsum;,) hujus verò $-sC$ (retrosum;) sitque $r+s=2$. Erit momentum illius, $+mPC$; hujus, $-msPC$: Adeoque Elastis (qui utrumque sustinet) Vis restitutiva (Idui æqualis) $mPC + msPC = mzPC$: per prop. 11. Cap. 11. Quæ, æqualiter se utrinque explicans, vi dimidiâ $\frac{1}{2}mzPC$ utrumque repellit; adeoque, propter pondus mP utrobique, confert Gravi A celeritatem $-\frac{1}{2}zC$
 $= -\frac{r+s}{2} C$ (retrosum;) & Gravi B celeritatem $+\frac{1}{2}zC$
 $=$

$= -\frac{r+s}{2}C$ (prorsum.) Sed & ferenda erant utraque (si Elastere nullus esset) celeritate $\frac{r-s}{2}C$; per prop. 4. Cap. 11. Quæ si utrobique addatur; habebitur celeritas A, $-\frac{r+s}{2}C + \frac{r-s}{2}C = -sC$ (retrosum;) Rverò, $+\frac{r+s}{2}C + \frac{r-s}{2}C = +rC$ (prorsum;) Hoc est, ad partes contrarias, celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sit Gravis A celeritas (prorsum) $rC = sC + sC$; & Gravis B (eidem æqualis) celeritas $-sC$ (retrosum;) quæ sibi mutuò directè occurrant. Cùmque habeatur utrinque celeritas sC , sed ad contrarias partes; ferrentur post contactum (propter has celeritates) A quidem, celeritate $-sC$ (retrosum;) B verò, celeritate $+sC$ (prorsum;) per prop. 3. hujus. Sin demum intelligantur celeritates hæ; relinqueretur Gravi A, celeritas rC , quâ feratur in B ut quiescens: Et, propter hanc celeritatem, ferretur B (prorsum) celeritate rC ; & A (quiescens) celeritate oC : per prop. 5. hujus. Quæ si prius memoratis respectivè addantur; habebitur Celeritas A, $-sC + oC = -sC$ (retrosum;) & celeritas B, $+sC + rC = +rC$ (prorsum;) Hoc est, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

Adhuc aliter.

Sint Gravia æqualia A, B, quæ sibi mutuò directè occurrant; A quidem, celeritate $rC = sC + sC$ prorsum; & B, celeritate $-sC$ (retrosum.) Intelligatur autem utrique, conierri (motu communi) celeritas $+\frac{s}{2}C$ prorsum; quò fiat Celeritas A, $rC + \frac{s}{2}C$ (prorsum;) B verò, $-sC - \frac{s}{2}C = oC$: (ut feratur A celeritate $rC + \frac{s}{2}C$, tanquam in B quiescens.) Quod si ponatur; erit, post contactum, celeritas A, oC ; B verò $rC + \frac{s}{2}C$ (prorsum;) per prop. 5. hujus. Sed & idem erit (impulsum quod spectat) in casu proposito. Si itaque utrinque demat (quæ adjecta fuerat) celeritas $+\frac{s}{2}C$; habebitur ipsius A celeritas $oC - \frac{s}{2}C = -\frac{s}{2}C$ (retrosum;) & B, celeritas $rC + \frac{s}{2}C - \frac{s}{2}C = rC$ (prorsum;) Hoc est, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

PROP.

PROP. VIII.

Si Grave motum, quacunq̃ue Celeritate, in Grave quiescens (æquale vel inæquale) directè impingat; (sintque Elastica, alterum vel utrumque:)

Celeritas, post contactum, Gravis Impingentis, ad eam quæ priùs fuerat, est, ut differentia ponderum, ad eorundem summam; (& quidem prorsum vel retrorsum, prout Pondus impingentis majus est aut minus Pondere quiescentis; sin ea sint æqualia, quiescet:)

Celeritas autem Quiescentis, fiet (post contactum) ad eam quæ fuerat Impingentis, ut duplum ponderis impingentis ad eandem ponderum summam. Adeoque si pondera fuerint æqualia, eâ celeritate quæ fuerat priùs-moti.

ESto Gravis A moti, Pondus mP , Celeritas rC , adeoque Momentum $m r P C$: Et quiescentis B (cui directè impingit A) Pondus nP . Erit Elateris vis restitutiva (ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n} r P C$, Fig. 300.

per prop. 12. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicans, Celeritate dimidiâ $\frac{mn}{m+n} r P C$ tum Repellit A, tum Propellit B;

adeoque confert illi (propter pondus mP) Celeritatem $-\frac{n}{m+n} r C$ (retrorsum;) huic (propter pondus nP) Celeritatem $+\frac{m}{m+n} r C$ (prorsum.) Sed & aliunde ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) communi Celeritate $\frac{m}{m+n} r C$ (prorsum;) per propos. 2.

Cap. 11. Quæ si utrinque addatur, habebitur Celeritas A, $-\frac{n}{m+n} r C + \frac{m}{m+n} r C = \frac{m-n}{m+n} r C$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutrà verò si fuerint æqualia, propter $m-n$)

XXX

$m - n = 0 :$) & Celeritas B, $-\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC =$
 $\frac{2m}{m+n} rC$: Et quidem, si $m=n$, Celeritate rC . Quæ demon-
 stranda erant.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP ; & Gravis B, pondus nP : atque intel-
 ligatur A, Celeritate rC , directè impingere in B quiescens. Intel-
 ligatur item dividi Celeritas rC , in partes ponderibus reciproce pro-
 portionales; Nempe, $\frac{n}{m+n} rC$, quæ respondeat ponderi mP ; &
 $\frac{m}{m+n} rC$, quæ respondeat ponderi nP . Atque intelligatur porro
 utrique subtrahi Celeritas (quæ B respicit) $\frac{m}{m+n} rC$, seu tantun-
 dem retrorsum addi; (Quæ communis vel additio vel subductio impul-
 sùs valorem non immutat, per prop. 4. hujus:) Quò fiat Celeritas A,
 $rC - \frac{m}{m+n} rC = \frac{n}{m+n} rC$; & Celeritas B, $0C - \frac{m}{m+n} rC$
 $= -\frac{m}{m+n} rC$; quæ itaque sunt Ponderibus reciproce proportio-
 nales. Repercutientur itaque (per prop. 3. hujus) eisdem Celerita-
 tibus utraque quibus accesserant: Hoc est, A, Celeritate $-\frac{n}{m+n} rC$,
 (retrorsum;) & B, Celeritate $+\frac{m}{m+n} rC$ (prorsum.) Idémque
 erit impulsùs ratio in Casu præsentì. Adeoque si restituatur utrobi-
 que (quæ modò ablata est) Celeritas $\frac{m}{m+n} rC$ prorsum: habebi-
 tur Gravis A futura Celeritas $-\frac{n}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{m-n}{m+n}$
 rC (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutrà vero si
 sint æqualia;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC =$
 $\frac{2m}{m+n} rC$ (prorsum.) Ut priùs.

P.R.O.P.

PROP. IX.

Si duo Gravia (Elastica) utcumque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuscunque Celeritatibus, ferantur utraque per eandem rectam, ad easdem partes; (ita tamen ut Insequens, majore Celeritate latum, in Antecedens directè impingat:) Ferentur utraque, post contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas subjectus Calculus indicabit.

Si Antecedentis B, pondus $n P$, Celeritas $s C$ prorsum: Sequentis A, pondus $m P$, Celeritas (major) $r C = s C - t C$. Erit Elateris Fig. 301.
Vis restitutiva (Istui æqualis) $\frac{2 m n}{m + n} t P C$; per prop. 13. Cap. 11.
Quæ utrinque se æqualiter explicans, adeoque vi utrinque dimidiâ,
 $\frac{m n}{m + n} t P C$; Gravi A, propter pondus $m P$, Celeritatem confert
 $-\frac{n}{m + n} t C$ (retrosum;) & Gravi B, propter pondus $n P$, Celeritatem $+\frac{m}{m + n} t C$ (prorsum.) Sed & aliunde ferenda erant (si Elater nullus esset) Celeritate communi $\frac{m r + n s}{m + n} C$, per prop. 3. Cap. 11. Quæ itaque si utrobique addatur; habebitur Gravis A futura Celeritas,
 $-\frac{n}{m + n} t C - \frac{m r + n s}{m + n} C = \frac{m r + n s - n t}{m + n} C$
 $= \frac{m r - n r + 2 n s}{m + n} C$ (prorsum vel retrosum, prout signum $-$ vel $+$ prævaluerit, adeoque neutrâ si æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m + n} t C + \frac{m r + n s}{m + n} C = \frac{m t + m r + n s}{m + n} C = \frac{2 m r - m s + n s}{m + n} C$ prorsum. Quod ostendendum erat.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus $m P$; Gravis B, pondus $n P$: & ferantur utraque per eandem rectam ad easdem partes; puta, prorsum utraque:

X x x x

B

B quidem, Celeritate sC ; A verò, Celeritate (majore) $rC = sC + tC$, atque in B directè impingat. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta Celeritas sC , (Quæ, cum communis sit, impulsus non mutabit, per prop. 4. hujus.) Quo facto, B ad quietem redigetur (propter $sC - sC = cC$;) eique directè impinget A, Celeritate $rC - sC = tC$. Quo casu, ferretur post contactum A

Celeritate $\frac{m-n}{m+n} tC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n major

fuerit) B verò Celeritate $\frac{2m}{m+n} tC$ (prorsum;) per prop. præced.

Cum itaque eadem sit ratio (impulsus quod. spectat) in casu præsentis: Si restituatur utrobique, quæ modò ablata est, Celeritas sC prorsum;

habebitur futura Celeritas Gravis A, $\frac{m-n}{m+n} tC - sC =$

$\frac{mt - ms - nt - ns}{m+n} C = \frac{mr - nr + 2ns}{m+n} C$ (prorsum vel retrorsum,

prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit, adeoque neutra si æquipol-

leant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{2m}{m+n} tC - sC = \frac{2mt + ms + ns}{m+n}$

$C = \frac{2mr - ms + ns}{m+n} C$ prorsum. Ut prius.

PROP. X.

Si duo Gravia (Elastica) utcumque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuscunque Celeritatibus, per eandem rectam, sibi mutuò directè occurrant: Ferentur utraque, post contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas calculus indicabit.

Fig. 302. Sit Gravis A, pondus mP ; Celeritas $+rC$ (prorsum;) & Gravis B, directè occurrentis, pondus nP , Celeritas $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Erit Elateris Vis restitutiva (urpote.

Idui æqualis) $\frac{2mn}{m+n} zPC$; per prop. 14. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare satagens, utrinque destruit Vim dimidiam

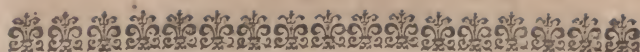
mn

$\frac{m}{m+n} zPC$. Adeoque Gravi A, propter pondus mP , celeritate n confert $-\frac{n}{m+n} zC$ (retrosum;) & Gravi B, propter pondus nP , celeritatem $-\frac{m}{m+n} zC$ (prosum.) Sed aliunde ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) celeritate $\frac{mr-n}{m+n} C$, per prop. 4. Cap. 11. Quæ itaque si utrobique addatur; habebitur Gravis A futura celeritas $-\frac{n}{m+n} zC + \frac{mr-n}{m+n} C = \frac{mr-nz-n}{m+n} C = \frac{mr-nr-2ns}{m+n} C$ (prosum vel retrosum prout signum $-$ vel $+$ prævaluerit, adeoque neutrà si æquipolleant;) & Gravis B, celeritas $\frac{m}{m+n} zC - \frac{mr-n}{m+n} C = \frac{mr+ms-n}{m+n} C = \frac{2mr+ms-n}{m+n} C$. (prosum item vel retrosum, prout prævaluerit signum $+$ vel $-$, adeoque neutrà si æquipolleant.) Quod ostendendum erat.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP ; Gravis B, pondus nP ; quæ sibi mutuò directè occurrant: A quidem celeritate rC (prosum,) B verò celeritate $-sC$ (retrosum:) sitque $r+s=z$. Intelligatur autem (motu communi, qui itaque impulsus non immutabit, per prop. 4. hujus,) addita utrique celeritas $+sC$ (prosum;) quò redigatur B ad quietem (propter $-sC+sC=eC$;) cui ut quiescenti impingat A celeritate $rC+sC=zC$. Quo casu ferretur, post contactum, A celeritate $\frac{m-n}{m+n} zC$; B verò, celeritate $\frac{2m}{m+n} zC$, per prop. 8. hujus. Adeoque, demptâ utrobique, quæ modò addebatur, celeritate sC ; habebitur Gravis A, futura celeritas $\frac{m-n}{m+n} zC - sC = \frac{mz-ms-nz-n}{m+n} C = \frac{mr-nr-2ns}{m+n} C$ (prosum vel retrosum prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit; neutrà si æquipolleant:) & Gravis B, celeritas $\frac{2m}{m+n} zC - sC = \frac{2mz-ms-n}{m+n} C = \frac{2mr+ms-n}{m+n} C$ (prosum item vel retrosum, prout signum $+$ aut $-$ prævalleat; neutrà si æquipolleant.) Quod ostendendum erat.

CAP.



CAP. XIV.

De Hydrostaticis.

PROP. I.

- A. Si Grave Fluidum (à latere ex omni parte & fundo ne effluat, conclusum; & ab aliâ Vi liberum;) supernè vel non prematur, vel æqualiter prematur ubique: Retinebit illud, supernam superficiem quod spectat, situm Horizontalem, seu potiùs Sphæricum, Telluri concentricum: (quæ hic pro eodem habentur.) Atque, inde deturbatum, suapte se Gravitate eò restituet.
- B. Sin supernè prematur Inæqualiter, (plus alibi, alibi minùs;) eâ parte quâ majori pressu urgetur, Descensus fiet; partibus ita pressis, alias, quæ vel non pressæ sunt, vel minùs pressæ, loco suo detrudentibus; quæ itaque, pro illo descensu, allurgent.
- D. Quódque de Superficie supremâ dictum est; alii cuiusvis (intra fluidum) parallelæ, similiter accommodabitur.

A. **E** Sto Gravis Fluidi (vase conclusi, & ab aliâ Vi liberi,) superficies
 Fig. 311. AB plana Horizontalis, (considerato scilicet Terræ Centro tanquam in infinitâ distantia, adeoque rectis perpendicularibus ut invicem parallelis;) seu potiùs Sphærica Telluri concentrica, (quæ hic pro eodem habentur,) quò partes ejus omnes sint æqualiter altæ, seu à Terræ Centro remotæ, (per prop. 3. Cap. 2.) Sitque supernè vel non pressa, vel æqualiter ubique pressa. Cum itaque partes infernè positæ sursum (propter Gravitationem suam) non nitantur, (per pr. 1. Cap. 2.) quò possit superficiei hujus pars ulla elevari; nec locus infra sit (utpote qui æquè gravibus jam occupatus est) quò possit descendere; neque sit quod supernè deprimat, si non prematur; vel saltem quod hic magis quàm alibi deprimat

deprimat, si æqualiter prematur; nullūque ea propter fiat motus, (per prop. 8. Cap. 2.) nihil est quod superficiem istam deturbet, quin retineatur.

Et quidem, si extra hunc situm, externā Vi, deturbetur; ut sit pars alia, puta D, cæteris altior: se ipsum, ad situm debitum, gravitate suā reducat Fluidum. Quippe pars illa D, partim deprimet (cum gravis sit) subjectas partes (ut post dicetur,) partim (cum fluida sit) diffuset in partes humiliores (propter Descensum qui sic obtinebitur, nec à partium connexionē impeditur, utpote fluidum) per prop. 1. Cap. 2. Atque hoc (ob eandem causam) quamdiu pars ulla manet reliquis altior. Redigetur igitur ad situm Horizontalem, seu (quem diximus) Sphæricum.

Sin aliquid hic accidentarium contingat, sive propter Fluidi renatam seu lentorem; sive quod supernè premens non ita commodè se possit omnibus partibus accommodare, (quæ causa esse potest cur Hydrargyrum in vase vitreo protuberet;) sive ejusmodi aliud: id hujus loci non est; sed à præsentī consideratione præcludendum.

Si quā verò sui parte præ cæteris magis prematur, ut in C; putà propter incumbens D Grave (quod saltem gravius sit quàm tantundem incumbens Aeris, aliūve quicquid sit æqualiter prementis,) aut aliam utcumque vim adhibitam: deprimentur fluidi partes in C, surgentibus alibi aliis, quò locus fiat depressis. per prop. 8. Cap. 2.

Quòdque de superficie AB ostensum est, similiter ostendetur de quavis aliā intra fluidum eidem parallelā, ut EF; quæ scilicet sit Sphærica Terræ concentrica, seu (quod nobis hic tantundem significat, ut & in sequentibus,) Planum Horizontale, (considerato scilicet Terræ centro tanquam in infinitā distantia.) Nempe, si æqualiter ubique prematur, (à fluidi parte superiore, & si quod aliud est supernè, vel intra fluidum, vel fluido innatans,) situm retinebit; sicubi vero magis prematur, putà in G, ab incumbente H, (quod gravius sit quàm Fluidi tantundem cujus locum occupat,) ibi deprimetur, surgentibus partibus minùs pressis. per prop. 8. Cap. 2. ut prius.

Atque hinc, ut totidem Corollaria, inferuntur propositiones sequentes.

B.

C.

D.

P R O P.

PROP. II.

Fig. 311. Si Grave D, summæ fluidi superficiei A B horizontali, in C incumbens, æquè gravitet atque tantundem Aeris circumpositi, (aut quicquid sit quod Aeris instar est, æqualiter prementis;) retinebit A B situm horizontalem.

(Quod de Aere hic dicitur, & similiter in sequentibus, similiter intelligendum erit de alio quovis quod Aeris instar est; putà si Aquæ super natet Oleum, vel Spiritus vini, vel horum aliquod Hydrargyro, aut aliquod simile; nam & hic eadem est ratio.)

Sequitur ex præcedente. Quippe cum C tantundem præcisè prematur ab incumbente D, ac si hoc sublato tantundem Aeris circumpositi (aut quod Aeris instar est) eundem locum occuparet; æqualiter ubique premitur.

PROP. III.

Fig. 311. Sin illud D minùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris, aut quod Aeris instar sit, (nec avolet tamen, aut ab Aere circumposito sursum pellatur;) Assurgent subjæctæ partes C, (utpote minùs pressæ,) subsidentibus aliis.

Qui quidem Ascensus partium C subjæctarum, eousque perseverabit (nec diutiùs) donec fluidi partes sic ascendentes compensant ipsius D levitatem, ut aggregatum ipsius D partiumque sic ascendentium æquè gravitet atque tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est.

Fig. 312. Sequitur ex primâ hujus. Quippe dum (propter incumbens D) levius quàm tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est, ut ad prop.

prop. præced. expositum est,) minùs premitur C quàm superficiei A B partes reliquæ; assurgent partes C subiectæ, utpote minùs pressæ: (per prop. 1. hujus;) subsidentibus aliis. Idquæ eousque donec quod fluidi sic ascendit, ut K, unà cum D, tantundem simul gravitent, quantum circumpositi Aeris (aut quicquid aliud sit ita circumpositum) tantum, quantum utriusque locum impleat. Donec enim id fit, minùs premitur; tum verò, æqualiter cum cæteris ipsius A B partibus premitur.

Dico autem, Si non aivolet D, aut ab Aere circumposito sursum pellatur. Quoniam si à circumposito aere non aliquo modo defendatur, D levius sursum feretur, (sive à levitate suâ, ut dici solet; sive à circumposito aere sursum pulsâ, quod potius dicendum est;) deferens eam cui incumbibat superficiem A B; neque propterea sic ascendent fluidi partes subiectæ, Aere ipso (depulso D) æquilibrium restituent. Si verò ita ab aere circumposito defensum intelligatur D ne hoc fiat; demonstratio locum habet.

PROP. IV.

Si illud D plùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris (aut quod Aeris instar est,) minùs autem quàm tantundem fluidi subiecti: innabit D; sed depressis eousque partibus C subiectis, donec eum situm obtineat D, ut æquigravitet aggregato Aeris & subiecti Fluidi quorum locum occupat.

Sequitur ite'n ex prop. 1. hujus. Deprimuntur enim partes C subiectæ, quia (propter D gravius quàm tantundem Aeris) magis premuntur, assurgentibus quæ minùs premuntur, utpote ab his depulsis: idque eousque donec situm assignatum obtineat; quippe tamdiu minùs premuntur subiectæ partes. Ubi verò eousque perventum est ut ipsum D æquæ gravitet atque tantundem subiecti Fluidi quantum impleat locum immerse partis K, atque tantundem circumpositi Aeris quantum impleat locum partis eminentis I: non ultra subsidet, sed innabit; quippe jam contigua superficies horizontalis E F, tantundem premitur in G, atque si locum I occuparet Aer, & locum K subiectum Fluidum; adeoque superficies E F est æqualiter ubique pressa.

Y y y

PROP.

PROP. V.

Si illud D, vel H, non modò plùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris, sed & quàm tantundem subiecti Fluidi : Mergetur penitus, ad fundum usque subsidens.

Fig. 311. **S**equitur & hoc ex prop. 1. hujus. Sive enim in summo intelligatur, ut D premens partes C; sive intra fluidum ubivis, ut H premens partes G; utrunque deprimet partes subiectas. Nempe partes C, quoniam gravius est quàm tantundem aeris; & partes G (in quacunque fluidi profunditate) quoniam gravius est quàm tantundem istius fluidi; adeoque C vel G magis premitur quàm si abesset D vel H ejusq; locum suppleret tantundem fluidi; & propterea magis quàm superficie EF partes alix. Atque hoc, donec ad ipsum fundum pervenitur.

SCHOLIUM

Feri quidem potest, (si fluidum illud non sit in omnibus sui partibus æquè grave, sed prope fundum gravius quàm prope summum,) ut non ad fundum usque mergatur H; utpote gravius quàm fluidum in summo, sed levius quàm fluidum in imo. Verùm hoc demonstrationem non turbat, quoniam ubi eò pervenitur, non jam plus gravitat H quàm tantundem subiecti fluidi. Idemque alibi intellige ubi opus erit, aut quod huic æquipolleat: ne opus sit istiusmodi sæpius insinuare.

PROP.

PROP. VI.

Si immersum H, minùs gravitet quàm tantundem fluidi cui Fig. 311.
immergitur; magis autem quàm tantundem aeris (seu
quod instar est:) Sursum propelletur; idque eousque
donec eum obtinuerit situm, ut æquè gravitet atque
tantundem Fluidi & tantundem superpositi Aeris (seu
quod hujus instar est,) quorum respectivè locum obtinet
simul sumpta.

Sin præcisè quantum tantundem Aeris (seu quod hujus
instar est,) aut eo minùs: assurget ad fluidi summam
superficiem, aut etiam altiùs.

Sequitur item ex prop. 1. hujus. Dummodo enim immersum H, Fig. 313.
minùs Gravitat quàm tantundem circumpositi fluidi; minùs pre-
mitur G quàm superficiei contiguæ E F partes aliæ; adeoque partes
ad G, simul cum H, sursum pellentur à partibus plus pressis. Atque
hoc eousque donec ad situm assignatum pervenitur; quoniam tamdiu
minùs premitur G. Ubi verò eò perventum est, ut ipsius H seu D,
pars extra fluidum ita emineat, ut totum simul tantum præcisè gra-
vitet quantum tantundem Fluidi istius cujus locum occupat pars im-
mersa K, & tantundem Aeris cujus locum occupat pars emersa I, (qui
casus est propositionis quartæ;) ibi perstabit: quippe jam, superficiei
E F contiguæ, partes omnes æqualiter premuntur.

Sin æquè gravitet atque tantundem incumbentis aeris, (aut quod
aeris instar est:) feretur ad summam fluidi superficiem, ibique consistet;
(qui est casus prop. 2.) nam eousque minùs premuntur partes subjectæ.

Sin minùs adhuc gravitet: aut avolabit, aut sursum pelletur: per
prop. 3. hujus.

SCHOLIUM.

Notandum interim erit; id tantum hic in considerationem venire
quod ex Gravitate simpliciter consideratâ provenit, non verò
quod aliunde ex Impulsu seu præconcepto Impetu oritur. Si enim
id in considerationem veniat, res omnino secus erit. Quippe Grave, ut
levius

Yyy 2

levius quàm est tantundem subiecti fluidi; si Vi deficiatur aut deprimitur, vel, propter acceleratum gravium descensum, vim cadendo conceperit; non statim in fluidi superficie hærebit, sed altius immergetur, pro impetu quo prius ferebatur. Et similiter, si submersum Grave, utut levius sit quàm tantundem fluidi, & gravius quàm tantundem superpositi aeris; dum tamen vel Vi sursum pellitur, vel, propter inceptum motum, impetum conceperit; etiam extra superficiem fluidi altius in aerem prosiliet. Sed eam Impetûs considerationem hic loci præcludimus; ut & in sequentibus. Quanquam enim certum sit rem ita fore; tamen, post vibrationes aliquot hinc inde ab impetu factas, ubi ad quietem redacta res est, eum situm obtinebit quam indicamus; & quem, si impetus ascititius abesset, statim assequeretur.

PROP. VII.

Si immersum H, æquè gravitet atque tantundem Fluidi cui immergitur: situm quem habet retinebit, absque vel ascensu vel descensu.

Fig. 311. Sequitur item ex prop. 1. hujus. Quippe cum tantundem gravitet Sacli, eo absente, locus fluido suppleretur; subiecta superficies neque magis premitur in G, quò hic ab H deprimeretur; neque minus, quò hic assurgeret ipsûmque H propelleret.

SCHOLIUM.

Secundum has leges; reddenda erit ratio variorum in Experimento; Torricelliano dicto, Phanomenum. Et quidem, in eam causam, hæc olim scripta erant, & Societati Regiæ Londinensi exhibita, Augusti 13 & 20. 1662. quò plurium Experimentorum, ibidem tum temporis agitorum, ratio Statica redderetur: Qualia sunt quæ sequuntur.

PROP.

PROP. VIII.

Sit Hydrargyri, subiecto vase contenti, superficies Horizontalis *AB* externo Aeris pressui exposita, atque Tubus *CD*, (clausus in *D*, & apertus in *C*,) hydrargyro impleatur, & dein invertatur, immerso ejus Orificio *C* infra superficiem subiecti hydrargyri *AB*, (obturato aliquandiu orificio *C* donec sic immergatur, ne Hydrargyrum invertendo effluat, atque tum recluso;) atque in eo situ sustineatur. Quibus positis.

Si Hydrargyrum tubo contentum, quod superficiei *AB* eminet, plus gravitet in subiectas partes *C*, quam pressus incumbentis aeris in reliquas ejusdem *AB* partes; fiet descensus in *C*, depulsis quæ à latere sunt partibus minus pressis, etiamsi à pressu superincumbentis aeris, clauso in *D* tubo, defendatur Hydrargyrum tubo contentum.

Qui quidem descensus eousque perseverabit; donec; effluente Hydrargyri parte (relicto intra tubum spatio *DI* vacuo Hydrargyri,) & surgentibus (propter hunc effluxum) superficiei *AB* partibus reliquis; quod in Tubo reliquum est *IC* tantundem premat *C* quantum Aer partes reliquas ipsius *AB*: eumque situm retinebit.

Pater ex precedentibus. Quippe dum Hydrargyrum tubo contentum (utut ab Aere supernè defensum) plus premat *C* quam ab aere premuntur partes reliquæ, deprimeretur *C* (hydrargyro effluente;) ubi verò eò perventum est ut hydrargyri reliquum *CI* tantundem premat *C*, quantum premuntur ab aere partes reliquæ; (propter æqualem ubique pressum,) situm illum retinebit. per prop. i. hujus.

SCHO-

S C H O L I U M.

Dico autem, *Spatium* DI *vacuum Hydrargyri*: non enim hic libet (neque opus est ad præsens negotium) disputare, num sit simpliciter vacuum, necne. Siquis enim vel gratis asserat, vel aliunde probatum eat, materiâ aliquâ repletum esse, quod vel pondus nullum habeat vel nullum quod in sensum nostrorum observationem incurrat; nobis illud hac in re neque obest neque prodest.

Dico etiam *plus gravitat, & tantundem gravitat*, potius quàm plus aut æquè Grave est: Quoniam quæ in se æquè gravia sunt, possunt tamen pro vario situ inæqualiter gravitare.

Fig. 315. Atque hic occurrit primò expedienda difficultas; Cur, si Tubus erectus DC , in situm obliquum reclinetur ut GE , Hydrargyrum nihilominus inibi contentum EF in situ obliquo, in eadem altitudine perpendiculari consistet atque CI in situ erecto; cum tamen (propter FE longiorem quam CI) suspensum Hydrargyrum FE plus sit (adeoque gravius) quam CI .

Hæc autem difficultas facillè solveretur si non subesset latentior alia. Quanquam enim verum sit, Cylindrum reclinatam FE majorem esse erecto CI , & plus Hydrargyri continere; tamen non minùs interim verum est, Basin etiam ampliari; nam ejusdem Cylindri sectio Obliqua E (Elliptica) longior est (nec latior tamen) quàm sectio recta (circularis) C ; adeoque basin E in eadem ratione majorem esse basè C , quàm recta E (ellipseos Axis major) longior est, quam C recta, Circuli diameter, eademque Ellipseos axis minor.

Sed & (quod mox demonstrabimus) in eadem ratione prolongatur C in E , quàm prolongatur CI in EF : Ut non sit mirum super majore basè (ellipticâ) plus hydrargyri sustineri (& quidem in eadem ratione plus) quàm super minore (circulari) C ; utut C & E sint ejusdem Cylindri sectiones. Si autem intelligatur, super eadem basè E , Cylindrus EK ; inveniatur ejus portio æquè alta EH , tantundem hydrargyri continere atque EF ; propter Cylindros (aut Prismata,) super eadem basè æquè altos, invicem æquales. At verò jam, Cylindrus (seu Prisma) EH (propter majorem basin) major erit quàm CI ; atque in eadem ratione major, quàm basis basè major est.

Fig. 316. Quòd autem eandem rationem habeat C ad E , quàm CI ad EF , sic ostenditur. Intelligatur Cylindrus CD situ erecto sectionem horizontalem habens LCM Circularem, obliquam verò NCO ellipticam:

cam: atque reclinetur Cylindrus hic in situm EG , ut sectio illa NCO jam fiat in situ NEO horizontalis, cui insistat Cylindrus EF inclinatus erecto EH æqualis (propter eandem utrobique tum basin tum altitudinem,) ipsique CI æquè altus. Manifestum est (demissâ, in NEO rectam, perpendiculari FC ,) propter æquales angulos FEC , $LENE$, adeoque similia triangula rectangula FEC , ENL ; eandem habere rationem EF ad FC , hoc est, ad CI , quam habet NE ad EL , seu NO ad LM ; hoc est, quam habet basis E ad basin C . Quod demonstrandum suscepimus.

Sed nova hinc suboritur difficultas. Quippe cum super eadem base E , Cylindrus EH in situ erecto, tantundem contineat Hydrargyri quantum in situ obliquo EF ; quidni magis in basin illam gravitet EH quàm EF , propter Descensum illic Declivorem, (gravitant autem æqualia Pondera in ratione Declivitatum, seu reciproca rectarum æquè altarum, per prop. 19. Cap. 2.) adeoque, quidni basis E in situ obliquo EF plus hydrargyri sustinere valeat (& propterea Cylindrum altiores) quàm in situ erecto EH .

Verum & hinc paria paribus compensanda sunt. Quippe, ut Hydrargyrum per descensum obliquum FE minus deorsum premit quàm per FC vel HE (perpendicularem) premeret; sic & vis sursum in E (quæ Hydrargyrum sustinet) minus premit sursum per EF quàm per EH premeret; & quidem in eadem utrobique ratione, propter eundem utrobique obliquitatis angulum EFC seu FEH . Adeoque non minus valet Vis sursum in E secundum directionem suam EH directè sursum premens, sustinere pondus Hydrargyri secundum directionem suam HE deorsum prementis, quàm Vis eadem per EF directioni suæ EH obliquam, pondus idem FE directioni suæ FC pariter obliquam deprimens sustinere; propter vires utrobique in eadem ratione diminutas.

Vel sic idem explices. Quâ ratione impeditur descensus hydrargyri, rectâ tendentis deorsum, à latere MO (producto) pondus illud partim sustinente, eadem ratione impeditur ascensus vis rectâ sursum tendentis in E , à latere (producto) NL eundem partim coercente supernè; (propter eandem utrobique obliquitatem;) adeoque eadem, quæ prius erat, manebit ratio pressuum contrariorum.

Supereft adhuc alia difficultas expedienda, quæ non tam ex Situ, quàm ex Figurâ tubi seu vasis superpositi oritur. Consideravimus enim hæcenus Tubos superpositos tanquam Cylindros seu Prismata, ejusdem

ejusdem ubique Crassitie; (quod erat necessarium ubi de mole seu pondere suspensi hydrargyri agebatur:) Potest autem superponi Tubus seu Vas cujuscunque figuræ, quod vel plus vel minus hydrargyri continebit quam Cylindrus seu Prisma super eadem base æque altum; altitudo tamen suspensi hydrargyri in omnibus eadem erit.

Fig. 317. Verbi gratia; In tubo Capitato CH, atque in Acuminato CK, eadem erit Hydrargyri CI altitudo, atque in Cylindro illic inscripto hic circumscripto.

Causa est, quod illud Hydrargyri quod in CH extra Cylindrum est, non tam à C sustinetur quam à tubi partibus seu lateribus sibi subiectis, quippe quibus sic manentibus non poterit illud nisi à latere latum iri quò descendat: Ne autem ad latus ferantur Hydrargyri partes, (sive quæ in Cylindro CH, sive quæ extra illum,) se mutuis occurribus & contrario nisu impediunt, ut nihil à C sustineatur præterquam quod est intra Cylindrum CH. Dummodo enim quod intra Cylindrum est ab æquipollente Vi in C sustineatur ne decidat; & quod extra est, similiter à Tubi lateribus: perinde est acsi solido fundo, sed minimè plano, coercerentur utraque; quo posito, superficiem supernam Horizontalem fore ad prop. 1. hujus ostensum est.

Simili modo; quanquam, in tubo Acuminato CK, minus contineatur Hydrargyri in trunco CI quam in Cylindro huic circumscripto; attamen non altius ascendet in illo quam in hoc Hydrargyrum. Quippe, quantum ad eas basis partes ubi libero ascensui locus patet, ad justam altitudinem ascendet CI; non ultra tamen, ne quæ subiectæ sint superficiei AB partes plus cæteris premerentur, & pressæ descenderent donec ad justam altitudinem perveniretur: quantum verò ad eas ipsius C partes quibus convergentia tubi latera liberum ascensum non permittunt, quod deest in pondere hydrargyri supereminentis, suppletur à coercentibus tubi lateribus; quippe quæ, utut non deprimant ut vis contraria, coercent tamen ut impedimentum, ne altius possit à vi infernè sursum premente Hydrargyrum protrudi.

Atque simile in aliis casibus fiet judicium.

Si verò vasa superposita, non tantum figurâ sint diversâ à Cylindricâ seu Prismaticâ, quod hic supponitur; sed etiam obliquo situ ponantur, quod supponebatur in difficultate priori: quæ utrobique reposta sunt; hic, conjuncta, locum obtinebunt: adeoque quæcunque sit vasis forma, & quocunque situ ponatur, ad eandem semper altitudinem (quatenus coercentia vasis latera non impediunt) hydrargyrum ascendet.

Nos autem tum hic tum in sequentibus (præsertim ubi moles suspensi hydrargyri

hydrargyri consideratur aut calculo subicitur) Cylindricam tubi formam potissimum spectamus: Inde autem, vi illorum quæ in hoc Scholio tradidimus, utur non quo ad eandem molem seu pondus, quo ad eandem tamen altitudinem suspensi hydrargyri, ad vasa cujuscunque formæ, utcunque inclinata eadem transferentur.

PROP. IX.

Positis ut prius; Si Tubus sic inversus vel ex se tam brevis sit, vel Orificium infra superficiem A B tam altè immersum habeat, vel denique ita inclinetur tubus, ut quod inibi (supra A B) continetur Hydrargyri minùs gravitet in partes subjectas, quàm aer in reliquas: Non effluet Hydrargyrum. Fig. 318.

Sed & si (manu vel aliàs) Tubus elevetur, ascendet etiam intùs Hydrargyrum; idque donec ad eam stationem perveniat, ut tantundem in partes sibi subjectas gravitet quantum in reliquas Aer.

Si verò non aliunde elevetur Tubus; non ab Hydrargyro propelletur fursum: sed deprimetur potiùs (si locus infra sit quo recipiatur) ab incumbente aere; nisi aliunde ab aeris vi defendatur.

SI enim tubus E brevior sit, vel ita immergatur orificium ejus ut quod superest C E brevius sit, quàm ut inibi Contentum Hydrargyrum tantundem premat subjectum C quantum ab aere premuntur partes reliquæ; vel etiam, si tubus F, utut satis Hydrargyri continere censeatur, ita tamen inclinetur ut non satis gravitet: Non deprimentur partes subjectæ, utpote non magis pressæ quàm reliquæ; (supponimus enim Tubos manu vel aliàs ita sustentos ut ab Aere Tubis incumbente nulla vis hydrargyro inferatur.)

Quinimo si elevetur tubus; assurgit inibi Hydrargyrum, (loco jam factò quo recipiatur,) propter partes subjectas minùs pressas quàm quæ aeris exponuntur. Idque eousque donec ad altitudinem C I pervenitur, (quâ statione supponimus partes subjectas æquè cum reliquis pressas;) quippe tamdiu minùs premuntur, adeoque Hydrargyrum à partibus plus pressis intro pellitur.

Z z z z

Si

Si verò altius elevetur tubus, ut ad D; illud tubi quod est supra I manebit hydrargyro vacuum; quippe, cum partes subjæctæ jam æquè cum reliquis premantur, cessabit illa sursum protrusio; (nec ob decantatam olim Fugam Vacui sursum altius trahi, experimentis nunc dierum ubique gentium notis abundè comprobatum est.)

Similiter si tubus F inclinatus, erigatur; ascendet simul Hydrargyrum, tubum replens: ita tamen ut si altius erigatur quam est C I; quod superest, ut I G, manebit hydrargyro vacuum; ob causas modò dictas.

At verò si tubus ille brevior, ut E, sibi permittatur; non tamen ab Hydrargyro ascensum moliente sursum propelletur; sed, contrà, detru-
detur ad fundum usque; (nisi quatenus ob Tubum minùs gravem quàm tantundem Hydrargyri impeditur.) Non quod Hydrargyrum alibi ab aere pressum non valeat illud in tubo & sustinere & sursum pellere; sed quoniam, (nisi tubus aliàs sustineatur aut ab externo aere defendatur,) non tantum ab eminente hydrargyro, sed & à supereminente aere tubum cum hydrargyro deprimente, premuntur partes subjæctæ; adeoque fortius quàm reliquæ, propter hydrargyrum in tubo plus gravitans quàm tantundem aeris: Quamdiu autem manu vel aliàs sustinetur tubus; eo impeditur aer ille (ob tubum in summo clausum) ne gravitet in partes tubo inclusas aut illi subjæctas.

Sin aliàs, quocunque modo, defendatur tubus ille brevior à superno aere; non modò sustinebitur, sed & sursum propelletur (donec ad Altitudinem I perveniat) ab hydrargyri partibus reliquis plus pressis quàm quæ Tubo subjiciuntur; propter superficiem AB eò loci minùs pressam.

Tota demonstratio dependet ex prop. 1. hujus, variè pro variis casibus applicatâ.

PROP.

PROP. X.

Positis ut prius; Si tubi sic inversi altitudo (supra AB planum) CD, tanta sit quanta est CI, aut eâ major; quò Hydrargyrum inibi contentum tantundem gravitet in partes subjectas quantum aer in reliquas: non minori Vi sustinebitur tubus, nedum elevabitur, (sive id manu fiat; sive librâ, positis ponderibus in adversâ lance; sive utcumque aliâs;) quàm quæ potis sit sustinere seu elevare (præter ipsum tubi pondus) totum superincumbentem aerem, seu (quod eodem recidit) tantundem hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

Dummodo enim tanta sit tubi intus altitudo ut retinere possit tantum hydrargyri quantum valeat ita premere subjectas partes Fig. 314: quantum reliquæ ab aere premuntur; (vel etiam major; quod tamen casum non mutabit, quippe plus inibi non retinebitur, quæcumque fuerit altitudo tubi, sed quo superest spatii ID relinquetur hydrargyro vacuum, ut supra ostensum est;) adeoque non adjuvetur vis elevans à vi partium hydrargyri extra tubum tanquam plus pressarum sursum pellente quod partibus C supereminet, tanquam minus pressis: Sustinentum jam erit vel elevandum, non modò tubus ipse cujuscunque fuerit ponderis, sed & totum illud aeris quod tubi cavo superincumbit; (Tubi, inquam, Cavo; nam quod Tubi lateribus utcumque crassis supereminet, ab Hydrargyro Tubi labiis subiecto sustinebitur.) Nam nisi hoc fiat, tubus (qui hydrargyrum jam deserturus est, ut quod altius non propelletur,) non sustinebitur vel elevabitur. Cui quidem, cum Hydrargyrum, ex pulsu sursum, jam nihil ferat auxilii; (ut prius tulerat, cum ad justam altitudinem nondum pervenerat;) nec possit aer (propter tubi orificium, quod supponimus, in hydrargyro infra AB submersum,) ut alibi fieri solet, circuitu facto, à tergo in locum derelictum succedere, (adeoque, quod ex prop. 1. hujus facile demonstrabitur, tantundem quasi sursum propellere, quantum supernè deprimit, dempto saltem pondere quo res elevanda superat tantidem aeris pondus:) tantundem virium in sustinente vel elevante requiretur, quantum (præter ipsum tubi pondus) totum illud aeris quo cavum premitur

Z z z z 2

premitur sustinere aut elevare poterit; (dummodo enim Vis sustinens aut elevans vi deprimente minor est, non sustinebit aut elevabit, per prop. 12. Cap. 1.) Id autem aeris quod sustinendum aut submovendum est, æquipollet hydrargyri Cylindro C I, (saltem dempto tantidem aeris pondere cujus locum occupat C D, propter Atmosphæræ minorem altitudinem supra D quàm supra C; quod merito tamen negligi possit: ut & submersa tubi labia minùs gravia quàm tantidem hydrargyri; cujus differentia auferenda erit, si strictè agas, à pondere elevando. Sed hæc negligimus.) Cum enim, Vis aeris extra Cylindrum hydrargyrum deprimens, tantum premat partes sibi subjectas quantum hydrargyrum in tubo premit subjectas sibi (quò superficiei partes omnes æqualiter premantur,) tantundem valet pondus aeris incumbentis quantum Cylindrus hydrargyri altitudinis C I: ut igitur tubus eleveatur, adeoque submoveatur Vis aeris deprimens, vis ea requiritur quæ potis sit (præter excessum ponderis tubi supra pondus tantidem aeris cujus locum occupat, quod est ipsum tubi pondus in aere,) etiam tantundem hydrargyri elevare quantum est Cylindrus C I: & quò sustineatur, quæ hydrargyri tantundem potis est sustinere. Quod demonstrandum erat.

Fig. 319. Adeoque si intelligatur tubi fundus D (fili ope) de librâ pendere, atque ex adverso pondus P: quò hoc tubo Gravato æquipoaderet, requiritur ut æquet pondere tum tubi pondus (demptis saltem, quas diximus, minutis,) tum tantum hydrargyri quantum æquet Cylindrum C I.

PROP.

PROP. XI.

Positis ut prius; Si tubi sic inversi, altitudo (supra A B Fig. 319. planum) C D, minor sit quàm C I, (quò, si locus esset, pertingeret hydrargyrum;) adeoque, qui partibus reliquis eminet, aer præponderet: Quantum valet hæc præponderantia, tantundem pressui in C sursum concedendum est; quod æquipollet sublationi tantidem ponderis incumbentis, aut ponderi æquali in adversâ lance posito: Adeoque tantò minor Vis (sive in tenentis manu, sive ponderis in adversâ lance positi, sive aliàs similiter applicata,) requiretur ad tubum sustinendum in hoc casu, quàm in casu propositionis præcedentis.

Quæ verò in eâ altitudine sustinere potis est Vis, non tamen altius elevabit; propter pondus elevando auctum, seu minutum subsidium Vis sursum prementis: sed neque in majore altitudine sustinebit.

Cum enim Vis sursum in C, potis sit sustinere tantundem ponderis quantum est Cylindrus Hydrargyri, super eâ base, altitudinem habens C I, sitque C D eo pondere minus: Sustinere valebit (& nisi aliunde impediatur, elevare) præter illud hydrargyri quod incumbit, tantundem ultra ponderis, quantum illic à justo pondere deest; Adeoque tanto onere sublevare sustinentis manum (seu quod hujus instar est;) & propterea tantò minus virium requiretur, quàm (qui casus est propositionis præced.) si Hydrargyri Cylindrus justam altitudinem C I obtineret.

Et quidem subsidium illud à vi sursum premente propter Hydrargyri altitudinem justâ minorem, tantundem est atque additamentum illi æquipollens sustinentis viribus additum, seu pondus æquipollens in adversâ lance positum. Et, si, quod porro deest ad pondus prop. præced. requisitum, in lancem illam immittatur; sustinebitur tubus (cum incumbente aere) pariter atque si, in casu prop. præced. totum illud pondus immitteretur.

At vero, utut tubum sic sustinere possit, non tamen elevare poterit, quoniam

quoniam prout elevatur tubus (donec ad justam altitudinem CI pervenit) assurgit intus Hydrargyrum (propter locum jam factum quo recipiatur) adeoque minuitur quod prius erat subsidium, adeoque vis (debilior facta) tubum sustinere in eâ altitudine non potis erit.

Et quidem, si aliâ vi aliâs eleveatur, sibi tamen permissa; ad eam altitudinem deprimitur: Sin infra detrudatur; eò assurgit: ut nempe, præter illud oneris quod ponderi P æquipollet, reliquum quicquid sit æquipolleet Hydrargyri Cylindro CI. Quæ omnia, per prius demonstrata constant.

SCHOLIUM.

Summa rei huc redit. Æquabilis aeris alibi incumbentis pressura, Sporest (per æquiponderantiam suam) sustinere in C; Vel Columnam Aeris æquialtam; Vel Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; Vel partem hujus partem illius (quæ simul earum alteri æquipolleant:) Non autem utramque totam, aut plus quam quod earum alteri æquipolleet.

Adeoque, Si pars C, externo Aeri exponatur: sustinebitur hic, ut in partibus reliquis, Columna incumbentis Aeris. Sed tunc nihil ultra Hydrargyri sustinebit vis ea, nedum elevabit.

Si ab incumbentis Aeris pressu (inverso tubi fundo, vel aliâs,) defendatur: sustinebit, istius vice, Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; aut etiam (si locus sit quo recipiatur) tantundem elevabit. At verò jam nihil Aeris sustinet; quippe à quo defenditur ab inverso tubo, qui aliunde sustineri intelligitur; puta à tenentis manu, vel pondere in adversâ lance.

Si verò ab incumbentis aeris pressu defendatur quoad partem, sed non quoad totum; puta à pondere P in adversâ lance quod minus sit quàm ut totius aeris pressui æquipolleet: potis erit, propter hoc subsidium; sustinere, non tantum totum aerem incumbentem, (quem quidem sine auxilio sustineret,) sed & tantundem Hydrargyri quod isti auxilio æquipolleet; neque sustinere tantum, sed & (si opus sit) eousque tubum impellere donec tantundem recipere possit.

Sin denique pondus P in adversâ lance majus sit quàm ut aeris pressui æquipolleet: proripiet tubum (nisi aliunde impediatur) in altum, etiam extra subjectum Hydrargyrum.

Exempli gratiâ. Intelligatur superficiei AB, pars C (inverso tubo inclusa,) tantæ amplitudinis esse, ut quæ, aperto aeri exposita, columnam aeris sustineret Ponderis unciarum 12 unius Libræ; (adeoque

pars

pars alia quælibet huic æqualis, propter æqualem aeris pressum, tantundem sustinere intelligenda est: & propterea, si ab hoc aeris pressu penitus defendatur, tantundem Hydrargyri, istius vice, sustinere poterit; hoc est, columnam hydrargyri Unciarum 12 unguis Libræ.

Cumque Tubus, quo sic ab aere defenditur C, suum pondus habeat; Ponatur hoc, Unciarum 2. (Pondus aeris, qui tubi lateribus supereminet non computamus; quoniam id ab Hydrargyro tubi labiis subiecto sustinetur.)

Totum igitur Onus (tubi cum superincumbente aere) erit Unciarum 14; quod aliunde sustinendum erit, quò pars C toto pressu aeris tubique liberetur. Quod factum intelligatur, posito, in adversâ lance, pondere P, unciarum 14.

Sustinebit igitur C (ab omni alio pondere sic liberata) columnam Hydrargyri Unciarum 12, (utpote vi sursum in C prementi æquipotentem;) atque ad illam altitudinem (si opus sit) tubum sic libratum propellet. Donec enim hoc fiat, minus premetur C quam partes reliquæ; nec huic ascensui quicquam officit Tubus cum incumbente aere, utpote qui sunt cum P pondere in æquilibrio positi. Veram jam, Contraponderans P, gravius esse debet (puta uncias 2, propter pondus tubi,) quam est suspensa Hydrargyri columna; utut Hydrargyrum illud non à P pondere, sed à vi sursum in C, sustineatur.

Si verò à Pondere P auferantur, verbi gratiâ, uncie 4, ut nonnisi 10 super sint, non poterit hoc pondus; Tubi aerisque incumbentis pressum sustinere (utpote unciarum 14,) sed istius tantum 10 uncias; adeoque reliquis uncias 4 adhuc urgetur pars C; quæ itaque (cum non possit plusquam 12 uncias omnino sustinere) non ultra 8 uncias hydrargyri (quæ cum illis 4 conficiunt 12) sustinere poterit. Sed & ad hoc requiritur contraponderans P, unciarum 10, quod gravius sit (puta 2 uncias) quam suspensum Hydrargyrum, unciarum 8: utut hoc; non à P, sed à Vi in C sustineatur.

Sin, pro demptis uncis 4, tolleretur totum Pondus P unciarum 14, vel saltem inde demerentur uncie 12: Subsideret Hydrargyrum omne cum onusto Tubo; vel demptis 2 uncis, quippe jam pars C onere saltem unciarum 12 (quo majus ferre non potest) Oneratur. (Saltem si tubi partem subsidendo demersam ponderi eximamus; atque etiam, si omnes minutas sectare velimus, excessum ponderis Hydrargyri supra pondus demersæ partis tubi: Quæ tanta non sunt quin hic merito possint negligi.)

Si jam ex demptis illis Uncis 4, restituantur uncie 2, (quo Pondus P jam fiat unciarum 12; adeoque ex omnibus 14, nonnisi uncis 2 pre-

matur

matur C,) Assurget Tubus donec supra A B emergant Hydrargyri uncia alia duæ: Adeoque sustineat C, à pressu aeris tubique Uncias 2, atque Hydrargyri uncias 10; quæ simul faciant ipsius justum onus unciarum 12. Sed & adhuc pondus P unciarum 12, majus est (puta uncias 2) quàm suspensi Hydrargyri unciarum 10; utut hoc, non à P sed à Vi in C sustineatur.

Atque si adhuc restituantur alia 2 Unciæ, quò fiat Pondus P (ut prius) unciarum 14: Ascendet Hydrargyrum ad justam altitudinem C I, (tubumque, si opus sit, eò propellet,) quo pars C (ab alio onere penitus libera) sustineat Hydrargyri Uncias 12, quæ pressui aeris in reliquis partibus æquipolleat.

At verò si porro augeatur pondus P, ut fiat, verbi gratia, Unciarum 16: Sursum adhuc in altum proripietur tubus (propter ponderis præpollentiam;) sed non simul Hydrargyrum, (utpote quod jam ad summam altitudinem ascenderit quam ferre potest C;) sed relinquetur superna tubi pars hydrargyro vacua. Idque eousque, donec vel obice impediatur descensus ponderis aut ascensus tubi; vel saltem donec, emerlis extra subiectum hydrargyrum tubi labiis, Hydrargyrum inibi contentum (viâ jam patente) totum decidat, eique protinus succedat Aer irruens, tantundem quasi subtus propellens sursum, quantum supernè deprimit tubum; ut jam nihil aliud sustinendum restet quam ipsum tubi pondus.

Quod autem Experimenta his Demonstratis respondebunt; tantum abest ut metuam, ut ea jam ante in *Societate Regiâ* administrata fuerint (& quidem cum hoc eventu) quàm hæc primò scriberentur (Anno scil. 1662, ut supra insinuatum est.) Nempe, præter notiora Experimenti Torricelliani phænomena; (quæ recensere non erit opus,) observatum erat, 1. Si tubus ad justam altitudinem C I tenderetur; opus erat in adversâ lance quò sustineretur tubus, pondere aliquantò majore quam erat Hydrargyri suspensi pondus; (& quidem tantò majore quantum conjectando æstimabant ipsius tubi pondus.) Idemque accideret, si altius adhuc elevaretur D; relicto I D, hydrargyri vacuo. 2. Si infra justam altitudinem C I, subsideret C D; minori opus esset pondere in adversâ lance, quò (propter æquilibrium) sustineretur tubus; & quidem tantò minori quantò minus erat pondus hydrargyri suspensi. 3. Si tamen superfluum illud pondus aut ejus pars aliqua (ultra quam quod necessarium erat) in lance relinqueretur; ascenderet Tubus, unâ cum hydrargyro, donec fieret æquilibrium. 4. Denique, si plusquam illud superfluum pondus lanci

lanci eximeretur; subsideret tubus, unà cum hydrargyro, ad æquilibrium. Et quidem; universim, (prout in Regiæ Societatis Commentariis res summatim colligitur) *Pondus in adversâ lance contraponderans, æquipollebat suspensi Hydrargyri, cujuscunque altitudinis, atque simul (quantum conjectando estimabant) suspensi Tubi ei parti, quæ stagnantis in subiecto vase hydrargyri superficiæ supereminēbat.*

Quæ quidem res, cum primo aspectu incautis nonnullis, atque ad rem staticam minus attentis, facile imponeret, quasi ab adverso pondere P sustineretur, non tantum Tubus ipse, sed (propter nescio quam cum tubo connexionem, seu Vacui fugam) contentum inibi Hydrargyrum: Quò scrupulus ille facilius tolleretur; ea statim scripsi quæ in hoc Capite hætenus habentur, (eisdem ferè verbis, nisi quod jam in Propositionum & Demonstrationum formam redacta sint,) eademque Regiæ Societati exhibui, verbo quidem Augusti 13. 1662. quo Observata illa libero sermone exponebantur, atque deinde (id rogatus) scripto etiam Aug. 20. quo die etiam Observatorum illorum summa ab ipsis Observatoribus scripto exhibebatur. Quibus ostenderem, ex Principiis Hydrostaticis, rem ita omnino accidere debere, si suspensus Hydrargyri Cylindrus poneretur à Vi in C sursum premente sustineri, dummodo inverso Tubo ab incumbente Aere defenderetur, Tubusque ille sustineretur aliunde.

Si verò jam quærat, Quanta sit illa altitudo CI; ubi, propter pressum aeris in partes reliquas, consistet suspensum Hydrargyrum supra subiecti superficiem AB:

Dicendum est, Altitudinem illam neque omnibus Locis, neque omnibus Temporibus, eandem esse, sed, pro variâ Aeris Gravitate, subinde mutari.

Hic autem *Oxonis*, quomodo se res habet, quantum ex propriis Observatis colligere licuit, sic habeto. Jam ante Sex Annos, Tubum (Quatuor pedes longum cum semisse) implendum curavi Hydrargyro, ab intermisso Aere diligenter purgato, (non summâ tamen diligentia;) eumque sic impletum inverti, obrurato primum diligenter orificio, nec prius recluso quàm infra superficiem Hydrargyri in subiecto vase contenti demergeretur; dein, factâ subtus exeundi potestate, effluxit Hydrargyri tubo contenti pars magna, cum impetu notabili, factisque propter impetum illum vibrationibus aliquot, subsistebat tandem ad altitudinem Unciarum pedis Anglicani (plus minus) 29. Tubumque cum subiecto vase (cujus fundo

A a a a

apertum

apertum tubi orificium, sed ita ut intrandi & exeundi à Vase in Tubum Hydrargyro via non intercluderetur) in pegnia quoddam prius ad id paratum intuli, atque in hunc diem in eo statu conseruo.

Nec ita multò post; scilicet à Calendis Januariis Anni (exeuntis 1664, sed) ineuntis 1665, Ephemeridem continuam Altitudinis Hydrargyri in Tubo contenti, supra stagnantis in subiecto vase superficiem, institui, (nisi cum fortè me domo abesse contigerit,) atque etiamnum instituo.

Observavi autem, ut plurimum, infra triginta Uncias pedis Anglicani subsidere, sed supra Uncias Viginti octo; intra hos limites subinde nunc ascendendo, nunc descendendo. Semel autem iterumque tantillo supra 30 ascenderat, semelque subsiderat infra 28, (sed vix aut ne vix decimâ unius Unciæ parte, utrovis casu,) ut altitudo mediâ sit Unciarum 29.

Verum quidem est, me aliquoties comparasse altitudinem in Tubo meo, cum altitudine in Tubo similiter inverso Honoratissimi D. Boylei, dum hic Oxonii ageret; atque altitudinem illius, altitudine meâ, aliquanto maiorem deprehendisse, (quasi octavâ parte unius uncia, si ritè memini,) sive quod in variis ejusdem urbis locis positi fuerint Tubi, sive quod Hydrargyrum ejus meo fuerit aliquanto levius, sive quod alterum altero fuerit ab intermixto aere aliquantò depuratus, non dixerim: sed exiguum quicquid est discriminis innuere visum est, quò perspiciatur tantillum discriminis ex minutis & non observatis circumstantiis oriri posse.

Observo etiam, à Scriptoribus Gallis, altitudinem assignari solere Unciarum 27 pedis Parisini. Quod non tam altitudinum hic atque illic differentiæ dandum est; quàm differentiæ pedis Parisini, atque Londinensis seu Anglicani. Quippe Pes Parisinus superat Pedem nostrum Anglicanum, quasi quatuor quintis uncia nostræ, (quod ego, collato semipede nostro, cum semipede Parisino ut dicebatur accuratissimo, memini me satis accuratè observasse;) Adeoque Unciæ Parisinæ 27, respondent nostris 29 quàm proximè. (Nam $12 : 12\frac{2}{3} :: 60 : 64 :: 27 : 28\frac{2}{3}$.) Ut vix ulla inde inferri possit differentia altitudinis istius apud illos observatæ ab altitudine mediâ Oxonii observatâ; quin eadem hic & illic (præter propter) altitudo censenda sit.

At interim, eadem manente Aeris (quoad gravitatem) constitutione, aliam atque aliam deprehensam fuisse, eodem tubo æstiman-dam, altitudinem Hydrargyri, non tantum in ejusdem Montis, sed & ejusdem Turris, summo & imo, observatum fuit: minorem utique esse in summo quàm in imo altitudinem Hydrargyri, propter breviorē
illic

illic quàm hic incumbentis aeris Cylindrum, & leviorè pressum: quod, unà cum Honoratissimo *Boyllo*, ego aliquè experimentis aliquoties factis deprehendimus. Sed quâ proportionè decreſcat, altior est inquisitio quàm ut eam hic expedire locus sit.

Atque hætenus consideravimus pressum incumbentis Aeris, nullo facto discrimine, sive ab Aeris Gravitate, sive ab ejusdem Elatere procedat: Et quidem perinde est ad rem hætenus traditam utrovis modo fiat, modo pressus fiat.

Verùm aliunde certum est, ab innumeris Experimentis hoc seculo institutis, tum in *Organo Pneumatico Boyliano*, tum aliàs: Et Aeri inesse *Gravitatem*, quâ deorsum premit; & *Vim Elasticam*, quâ se vel à Gravitate suâ vel aliunde compressum restituere conatur.

Quibus positis, necesse erit, propter Aeris Gravitationem, ut superiores ejusdem partes proximè subjectas deprimant, & deprimendo comprimant, adeoque Elateri vim undiquaque reſtitutivam imprimant gravitati partium incumbentium æquipollentem (donec enim æquipoller renitentia, porro flectetur;) & quidem eâdem vi undiquaque se expedire satagentem; (Quod enim ad prop. 1. Cap. præced. ostensum, de Elatere, putà recto, se prorsum atque retrorsum æqualiter porrigente: pariter valet de Corpore Elastico se in Orbem explicante; Nempe, siquâ parte minus vel prematur vel coerceatur, eâ se expediet, pressum alibi declinans; idque eousque donec undiquaque comprimatur æqualiter.) Eadèmq; vi, unà cum harum pondere; in partes adhuc subjectas propagatur: Atque sic porro, ad inum usque, aucto continuè pressu ob auctum pondus incumbens. Unde fit ut partes Aeris inferiores sint superioribus magis compressæ; adeoque & (propter plus aeris intra easdem dimensiones) graviore superioribus.

Haud secus atque Lanæ Vellera accumulata; quæ sunt & Gravia simul & Elastica. Vellus supremum, gravitate suâ premit secundum; cui vel Vim imprimi reſtitutivam sursum gravitati comprimenti æquipollentem (secus enim adhuc ultra comprimeretur;) quæ cum sursum se liberare non possit (propter urgens onus quod compresserat) eâdem Vi deorsum nititur; additâ tamen gravitate suâ; quibus cum premittur tertium, tantundem est atque utriusque gravitate premi: Vel, quod eodem recidit, (quòdque omnino dicendum esset si Elateres abessent,) secundum sustinet supremi pondus; & tertium, utriusque; seu secundi primo gravati. Utrut enim secundum à primo quantum potest comprimatur, id tamen non impedit quin sic compressum adhuc deprimatur, & utriusque onus à tertio sustineatur. Id saltem interest,

A a a a 2

terest, quod, propter compressionem secundi, primum tertio propius quidem, sed eodem pondere, incumbat. Atque sic porro, Quartum à trium illorum Gravitate (sive interveniente, sive non interveniente, vi Elasticâ,) premitur; & Quintum ab illorum quatuor; & sic porro ad Sextum, & quæ sequuntur: Ut perinde omnino sit, sive à superiorum omnium Gravitate per se, sive interveniente Vi Elasticâ, comprimimus dicamus. Dummodo saltem Vellera perfectè Elastica ponamus, nec simpliciter-Mollium naturam quadantenus participare; quippe, quatenus hoc obtinet, ad Gravitatem simpliciter recurrendum erit.

Sed &, propter Vim Elasticam, sive in Vellere sive in Aere, ad latera etiam undiquaque se expedire satagentem (siquâ parte debilior sit resistentia,) eâdem Vi Elasticâ (quæ incumbenti Gravitati, in quâcunque altitudine, æquipolleat,) ad latus undiquaque premit, quâ deorsum; haud secus atque alia fluida, quæ (propter facilem partium separationem) siquâ fortius premantur, eâ quâ minus premuntur se expediunt; sive id deorsum sit, sive à latere, sive etiam sursum.

Dato igitur, quòd Aer sit corpus elasticum, (de quo non ambigendum est,) quaquà versum à pressu se liberare satagens, procedimus ad propositionem sequentem.

PROP. XII.

Vis Aeris Elastica Vase inclusi, ejusdem tenoris cum ambiente, tantundem præstat atque onus incumbentis aeris aperti.

Atque hinc ex *Experimentis Boyleanis* plurima (nempe quæ ex Aeris Elatere dependent) explicationem facilem sortientur, & Phænomenum causa reddetur. Quod de aliorum item *Experimentis Hydraulicis*, aliisque innumeris, pariter intelligendum est.

Fig. 320. **I**ntelligatur Tubus D, seu Vas quodpiam IH (cujuscunque formæ, & quocunque situ,) orificium habens E apertum, quo cum aere externo communicet internus. Si adjacentes aeris externi partes minus premantur quàm quæ sunt intra vas, hæc dilatabunt sese donec ad æquipollentiam res redigatur, (per prop. 1. hujus.) Si verò partes extrâ adjacentes (ob pressum aeris incumbētis) magis premantur quàm quæ
intus

intus sunt, seu quàm harum vis elastica potis sit sustinere, comprimuntur adhuc quæ intus sunt (per eandem prop. i. hujus,) eousque donec æquipolleat earum Vis Elastica Vi extra comprimenti, hoc est oneri incumbentis aeris. Re itaque sic ad Æquipollentiam redactâ (ut ejusdem tenoris seu tensionis sit aer internus cum externo, adeoque Elateris vis eadem utrobique, ea scilicet quæ Oneri incumbentis aeris sustinendo par sit,) si firmetur orificium E, Vis Elastica (propter eandem quæ prius tensionem) etiamnum æquipollebit oneri incumbentis aeris externi.

Atque hinc, ex D *Boylei* aliorumque Experimentis Pneumaticis, Hydraulicis, aliisque, plurimorum ratio facile assignabitur. Quippe si, ad ea quæ alias pressu vel trusione fieri possent, istius vice adhibeatur vis Aeris Elastica æquipollens, idem effectus consequetur. Quod in singulis prosequi supervacaneum esset, cum Theorematis generalis ad particulares casus applicatio facilis sit: sintque ea fere omnia vel hinc orta quod Aeris inclusi compressio (adeoque Vis Elastica) major fiat quàm est exterioris aeris, (unde plurima in Hydraulicis Phænomena derivantur à compresso aere orta;) vel, quod aeris exterioris compressio & vis elastica debilitetur minorque fiat quàm est aeris conclusi; (quod in *Antliâ Boyleana* sæpe fit; putâ si *Antliæ Recipienti* immittatur Vesica seu Phiala vitrea Aerem ordinariæ tensionis continens, atque Recipientis Aer quadantenus saltem exhauriatur; qui, utut respectu aeris liberi Internus sit, respectu tamen aeris in Vesicâ illâ seu Phialâ contenti est Externus; cujus itaque exhaustionis partis debilitetur Vis: idem fit ac si, hoc in statu suo permanente; fortius comprimeretur ille:.) Utroque enim casu aer qui reliquo magis compressus est vim suam Elasticam in eum qui minus est compressus exercebit.

SCHOLIUM.

D Ici quidem potest, aliam esse Externi aeris pondus ad E, quàm ad H vel D, quoniam E premitur, non tantum ab aeris partibus quæ ipsis H vel D supereminet, sed & ab interjectis. Quod quidem verum est, utut in exiguâ altitudine tantillum id sit ut merito negligatur: Sed hoc, quicquid sit, præsentem speculationem non turbat; quippe idem intra vas evenit. Nam & hic partes E (infimæ) plus premuntur, quàm (supremæ) H vel D, quoniam illæ partium interjectarum pondus sustinent. Adeoque Vis Elastica interni aeris in E, æquipollet pressui externi in E; atque interni in H, externi itidem in H. Quod utut in vastis altitudinibus fieri possit alicujus momenti, in minutis tamen merito negligendum est.

PROP.

PROP. XIII.

Si inverſi Tubi, aliſve Vaſis, D vel H, aere pleni (ejuſdem tenoris cum ambiente) Orificium apertum, Hydrargyri plano A B applicetur: Hydrargyri nihil inibi vel aſſurget, vel deprimetur.

Fig. 320. I Ntelligatur enim Tubi ſeu Vaſis D vel H (aere pleni) orificium E, ſuperficie Hydrargyri A B admoveri in C. Cum Viſ Elastica aeris incluſi, æquipolleat oneri incumbentiſ externi, (per prop. præced.) æquè premitur A B in C atque in reliquis ejuſdem partibus; (vaſ ipſum enim aliunde ſuſtineri ſupponimus:) Adeoque nulla propterea Hydrargyri inibi vel aſcenſio vel depreſſio: per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

Propoſitiones has duas de aeris Vi Elastiâ, ejuſque effectu, apponendas cenſui, ut obviâ eatur ſcrupulis quorundam inde ortis quod huic non attenderint.

Putà, Si inverſus Tubus D C, aere plenus ejuſdem tenoris cum ambiente, Hydrargyro in C ſuperponatur; Tuboque (aliunde ſuſtento) impediatur preſſus ſuperincumbentiſ aeris; adeoque pars C aere tantum qui tubo includitur (modicæ altitudinis) prematur, reliquæ autem toto onere aeris incumbentiſ (altitudinis immenſæ:) Certum eſt, pondus aeris prementiſ C, longè minus eſſe quàm alibi prementiſ partem huic æqualem; adeoque, ſi pondus tantum ſpectetur, aſſurgere deberet Hydrargyrum in C; (neque huic obſtaret aer tubum occupans, ut qui compreſſionis capax eſt, & reapſe comprimeretur ſi elater debilior eſſet quàm viſ in C ſuſum prementiſ:) Sed, propter Elateriſ vim æquipollentem ponderi externi aeris, non minùſ ab aere qui includitur tubo premitur C, quàm ab aperto aere partes reliquæ.

Similiter in *Antliâ Pneumatica*, ſeu *Organo Pneumatico Boyliano*, ſi pondere tantum, non elatere, ageret incluſus aer; immiſſa antlia, etiam àbſque aeris exſuctu, paria fere paterentur (urpote minùſ preſſa quàm in aperto aere) atque jam poſt exſuctum aerem.

Item, in eâdem Antliâ, ſi intromittatur Vaſ hydrargyrum continens, cui ita ut ſuprà dictum eſt immergantur inverſi Tubi (hydrargyro priùſ

prius repleti) labia: Postquam undique occluditur Antlia ne ulla fiat communicatio cum externo aere, manet adhuc hydrargyrum in tubo eadem quā prius altitudine suspensum, putā ad uncias pedis Anglicani plus minus 29; non quod eodem quo prius pondere prematur subiecti vasis hydrargyrum, sed quod inclusi aeris vi elasticā externi aeris ponderi æquipollente prematur; nec prius subsidit, quā vis illa debilitetur. Ubi verò, propter exsuctam aeris partem, reliqui (utpote jam minùs compressi) Elater debilitatur, subsidit Hydrargyrum ad minorem minoremque continuè altitudinem prout plus plùsque Aeris exsugitur: Idque eousque, me spectante, aliquando factum fuit, ut vix ultra pedis Unciam unam altitudinis suspensum manserit: (Sed &, si intruso aere fortior redderetur elateris vis, adhuc altius ascenderet Hydrargyrum quā extra Antliam.) Quod & inter Experimenta *Boyliaana, Physico-Mechanica* occurrit; *Experimento, 17.* Sed &, ex eo tempore, vase jam commodius preparato, observavit idem Honoratissimus *Boylus* aliquoties (quod ab eo ipso accepi;) Hydrargyrum in Tubo contentum, eadem operatione præstitā, ad ipsam usque stagnantis infra Hydrargyri superficiem subsidisse, neque supra illam omnino eminuisse.

Atque similis ratio assignanda erit in variis istiusmodi phenomenis quæ non ab aeris gravitate immediatè dependent, sed ab ejus vi elasticā à gravitatis pressu impressā. Quippe nisi foret hæc vis Elastica, gravitas aeris ubi non posset directè applicari (ut in vase clauso) non id præstaret: Sin autem Gravitas non foret, nec esset ea vis Elastica, à pressu ponderis aeris incumbentis orta; Elater enim, utcumque in se fortis, nisi comprimatur nil agit, utpote cujus tota Vis activa est tantum conatus se restituerendi in situm unde detrusus fuerat.

Ex eodem principio (de conclusi Aeris Elatere) reddenda est ratio, *Cur Aeris pondus non sentiamus.* Quippe si tanti ponderis sit Aer quanti jam perhibetur (cum antehac, non modò nullius ponderis censeretur, sed positivè levis,) mirum videri possit quod tantum onus sustinentes non eo nos premi sentiamus.

Item, *Cur Aquæ immersi non sentiant Aquæ pondus.* Cum enim, non modò nunc dierum, sed & in veteri Philosophiā, Aquam gravem esse non dubitetur; eò magis mirandum videatur, quod, Aquæ suppositi, incumbentis gravitatem non sentiant; cum interim minorem aquæ molem alibi impositam ferentes opprimerentur. Quodque de Aquā hic dictum est, de aliis item fluidis intelligendum est: imò & quæ fluidorum instar sunt, putā, siquis *Arenæ seu Farinæ cumulo* pe-
nitus

nitus immergeretur, non magis ille (credo) Arenæ seu Farinæ, quàm Aquæ, pondus sentiret.

Ratio est, (non, quod dici solet, quod Aqua non gravitet in suo loco; putà supra aquam, aut gravius quiddam; contrarium utique dicendum est, nam superiores aquæ partes premunt interiores, ut ex multis Experimentis seu Observatis satis liquet; sed) quoniam Aer vel Aqua ex omni corporis immerfi parte æqualiter premens, partium positionem non turbat. Comprimit quidem (propter Aerem in sanguine aliisque humoribus compressionis capacem) quod observavit Honoratissimus *Boyleus* (*Paradox. Hydrostat. in fine*) in Gyrinis (nostrates, alibi *Tad-poles* appellant, alibi *Hob-nails*,) aqua inclusis validè compressa, ubi satis vividè se movebant, sed magnitudine imminutâ: Sicut, ex adverso, Animalia, Antlia Pneumatica inclusa, subducto aere, augeri solent; propter aerem humoribus contentum insigniter dilatatum; neque id sine dolore, propter insignem vasorum contentium & fibrarum seu membranarum distentionem, fortè & lacerationem.

Aerem autem, seu quod Aeris instar est, (*Spiritus* fortè dicas,) magnâ copiâ in Sanguine contineri, certissimum est, potèstque ad oculum demonstrari: Sanguinem enim, in aperto vase contentum, si *Antlie Pneumaticæ Boyleianæ* immiseris; subducto aere (quod ipse aliquoties vidi, spumescit protinus, & non in spumam tantum sed amplissimas bullas se expandit, (aere sanguini immisto, propter sublatam ab extra compressionem, se insigniter ampliante;) & quidem plus quàm speraveris, ita ut saponis inter lavandum expansio in bullas, huic aeris in sanguine expansioni cedat.

Quòdque inde rumpantur fibræ, videtur hinc saltè existimandum, quòd Sanguis ille, post innumeras istiusmodi bullas turgente aere sic inflatas ruptisque, per aliquot dies postea reservatus, non (ut fieri solet) in grumulosam massam coaluerit, sed liquidus permanferit. (Quod ipse vidi, & inter Experimenta *Boyleiana* alicubi, si bene memini, memoratur.)

Contra verò; ubi ex omni parte (pro fluidorum naturâ) æqualiter premitur immersum Corpus; aerisque particule, in minutissimas quasque partes sese cum humoribus insinuant, & pridem fuerant æqualiter pressæ (nam nisi sic fuissent, partes minùs pressæ reliquis locum concederent quo ampliarentur, per prop. 1. hujus,) & novâ pressione jam accedente ab incumbente aquâ, æqualiter item (ob eandem rationem) porro comprimuntur; manent partes similiter ut priùs ad invicem sitæ, nec ulla fit fibrarum seu membranarum distractio aut laceratio, adeoque nullus dolor seu sensus oneris.

Con-

Contrahuntur quidem hac ratione fibræ membranæque sed non renitentes; (quippe jam ante in statu tensionis erant; quod patet ex fibrarum aut membranarum, siquando secantur, spontaneâ contractione;) adeoque nec dolor inde oritur seu sensus oneris. Et quidem, dummodo nulla sit inæqualis pressio seu partium dislocatio, nec caro ossium (utcunque conjunctorum) nec ossa carnis ullam ex sensu perceptionem habent; sed sicubi inæqualis pressio aut dislocatio fiat, quæ partes extra situm suum detrudantur, tum tandem fit tactûs perceptio. Sed hoc in immersis fluido (ut jam ostensum est) non contingit; adeoque nec sensus Oneris, sive ab Aere sive ab Aquâ (alióve liquore) incumbente.

Possunt hæc ex *Antlia Boyliana* confirmari. Quippe, si *Antliæ Recipienti* immiseris *Vesiculam*, flaccidam quidem (utpote parum aeris inibi habentem,) sed stricto collo probè obturatam (nequid effluat;) dummodo eadem ubique maneat aeris *Compressio* adeoque & *Vis Elastica*, omnia ut prius perseverant.

Sin ex *Recipiente* aliquid aeris exhaurias, adeoque *compressionem* & vim elasticam aeris in *Recipiente* minuas; aer in *Vesicâ* (utpote magis compressus adeoque & magis elasticus quàm qui est extra *Vesicam* in *Recipiente*) se expandet, *vesicâ* interim (tanquam inflatâ) turgente. Idque eousque fiet quamdiu *Vesicæ* latera ita extendi possint ut aer intus contento *expansionem* similem concedant ei quam habet aer *Recipientis*. Ubi verò non ita possit extendi *Vesica*, si *Recipientis* aer reddatur adhuc minus elasticus, qui itaque pressui interno minus æquipolleat; violenter distenditur *vesica*, (nempe pro eo gradu *vis Elastice* quo superat interior aer exteriorem;) quod quidem, si adesset sensus, non sine dolore fieret; eaque violentia, si major sit quàm quæ laterum *Vesicæ* firmitati æquipolleat, rumpetur *vesica*. Quod & in *phialis vitreis*, tenuis corticis, sæpius observatum est.

Si verò inflatâ sic *vesicâ* (nec rupta tamen) aerem in *Vas Recipientis* denuo admittas; flaccisset iterum *vesica* atque in minorem locum (fibris se retrahentibus) recipiet: quod etiam si adesset sensus, sine dolore fieret, cum nulla vis fibris inferatur. Quodque in hac *vesiculâ unicâ* videre est, idem de innumeris in corpore *vesiculis* sive bullis (exiguas Aeris seu Spirituum particulas continentibus) intelligendum est; quarum pressio ex aere æquabiliter incumbente vix major erit quàm quæ fibrarum extensio prius fuerat se jam retrahentium.

Verum quidem est, si *vesicæ* loco *phialam vitream* immiseris, cujus
B b b b b latera

latera rigida sint neque se (ut fibræ) contrahant, (modò vitri tenuitas & forma tales sint ut externæ pressionis excessui supra internam sustinere non valeant,) rumpetur phiala, partibus corticis intra trasis; at hoc in immeris fluido secus est, ubi vesicularum cortices flaccidi sunt, & pressum sine violentiâ, capaces. Si verò eò usque urgeretur (ob immensam puta aquæ profunditatem) compressio, ut non possent vesicularum cortices se ulterius sine dolore contrahere; non dubito quin oneris & doloris sensus tum futurus esset. Ossa vero, & cartilagine, in compressionibus minoribus, utut flaccida non sint, dolorem a pressu illo non sentiunt, eo quòd partes illæ corporis duræ sint perceptionis minus (si omnino) capaces; sitque sensatio tantum in nervis, fibris, membranis, aliisve corporis partibus mollioribus.

Quanta verò sit ea sive Compressio sive Dilatio cuius capax est Aer, non faciliè dictu est. Magnam certè esse, ultra quam quis putaverit inexpertus, experimentis plurimis compertum est.

Illum Aeris statum qui nobis ordinarius est, naturalem esse (quem sponte suâ subiret aer non vi compressus,) non est existimandum. Quippe, nisi compressus esset, nulla foret in eo statu vis Elastica, (quam esse experimur,) ut quæ ab Elateris compressione tota pendet, in situm ampliore conantis se restituere.

Quousque verò, si omnis compressio tolleretur, se ampliaturus esset Aer (qui ex innumeris corpusculis Elasticis variâ figurâ variòque situ videtur componi,) tentatum potius quam penitus exploratum est.

Mersennus olim, Eolipilæ ope, ingenti caloris vi adhibita, (quantam ejusmodi vasa sine fusione ferre possent,) Aerem se ita dilatasse affirmat ut spatium *Septuagiesuplum* illius quod prius habuit occupaverit.

Honoratissimus *Boyleus* noster, absque caloris ope, solâ vi suâ elasticâ Aerem se dilatasse expertus est, in locum pristino majorem vicibus primùm 9; tum, vicibus saltem 31, (sed majoris adhuc expansionis capacem esse si spatium esset quo reciperetur:) deinde, plusquam vicibus 60: tum, vicibus plusquam 152; (quæ plusquam duplâ est expansionis Mersennianæ, vi caloris obtentæ, quæ tamen tantum non incredibilis existimata fuerat:) Quæ recenset ille, inter *Experimenta sua Physico-Mechanica de Aeris Elatere*, &c. Experim. 6.

Post id temporis, sed jam ante Octennium vel Novennium plus minus, (ut idem refert in Experimentis nuper Editis de *Admiranda Aeris Rarefactione*,) Expansionem illam, aliis mediis, multò adhuc promovit; nempe, usque ad vices saltem 8000, (vi suâ Elasticâ solâ, absque caloris ope:) atque, iterato experimento etiam adhuc major inventa erat; quibus Experimentis etiam ipse interfui.

Id. m.

Idemque, Experimento adhuc aliter instituto, (prout ibidem recensetur) ad vices pervenit plusquam 10000, (seu plusquam *Decies Millesuplum* loci quem prius occupaverat idem Aer,) imo ad locum occupandum vicibus 13769 majorem.

Et quidem, inter ingeniosa illa atque subtilia *Experimenta Florentina* ante paucos annos edita, inventus est Aer, non modò absque *Caloris* ope, sed & absque ope (quam *Boyllius* adhibuerat) *Antlia Pneumatica*, solius *Experimenti Torricelliani* auxilio, expansus in molem saltem 173 vicibus pristinâ majorem.

At quis interim spondere possit, etiam in expansionum harum actu præstitarum maximis, compressionem omnem penitus sublatam esse? Quod in factum fuerit, etiam adhuc majoris Expansionis capax censendus erit Aer. Quem itaque judicemus, ex tenuissimis, eisque maximè convolutis, particulis, & Elatere forti præditis, compositum esse. Quippe secus, vix cogitari potest quomodo in tam vastam amplitudinem, solâ suâ Vi Elasticâ (sublatâ vi extrinsecus comprimente) se dilatare posset exiguus Aer.

Cùmque se ita sponte dilataturus foret (si abessent impedimenta) quem hic habemus Aer; manifestum inde est, quod parem huic Compressionem jam sustineat. Sed majoris adhuc Compressionis capacem esse, non est quod dubitemus; imò quotidie experimur.

Huc referri possunt *Sclopeti Pneumatici* dicti, seu *Spiritualis*, (nostri *Wind-gun* appellant) Experimenta, à *Mersenno* recensita; ubi, à compresso Aere, globulus magnâ vi projicitur, tanquam à pulvere Pyrio. In quo tamen summâ quâ potuerunt industriâ non in minorem quàm partem quindecimam, ejus quem prius occupaverat loci, aerem vi comprimere valuerunt: & quidem etiam de hoc dubitat, qui illa instituit, *Mersennus* ipse (*Phanom. Pneumat. prop. 32.*) an in partem $\frac{1}{4}$, an $\frac{1}{8}$ potius dicendum fuerit, ob fallaciam aliquam quam Experimento subesse suspicatus est.

Item quæ in *Machinâ Compressivâ* (à *Societate Regiâ Londini* in hunc usum paratâ) instituta sunt Experimenta: in quâ compertus est Aer in soliti spatii partem $\frac{1}{10}$, vel etiam $\frac{1}{12}$ (*decimam*, vel *duodecimam*;) vi coerceri.

Eaque quæ habet *Boyllius* idem (à quo & cætera desumpsi) *Experimenta Condensationis Aeris à Frigore*. Alterum quidem; in quo, quum Glaciem Sale mixtam circumposuerat undique vasi vitreo quo continebatur conclusus Aer, (eo modo qui in congelandâ aquâ adhiberi solet,) contractum deprehendit in spatium quod ad pristinum erat ut 147 ad 158 plus minus; (quæ multò minor est quàm quæ vi mechanicâ

B b b b b 2

mechanicâ obtineri solet; quippe hic non nisi $\frac{1}{10}$ pristini spatii amittitur, hoc est, $\frac{1}{4}$ fere; cum illic adhibitâ vi mechanicâ vix tantundem retineretur: dum tamen frigus sic adhibitum tantum fuerit ut aquæ congelandæ abundè sufficeret, summumque hyemis apud nos rigorem superaverit.) Alterum; quo quum Glaciem vel Nivem Sale mixtam vasi similiter circumposuerat, cui Aeris exiguum & Aquæ multum includebatur, Aqua vi frigoris expansa (utpote congelationi proxima) Aerem sic compressit ut intra partem *Quadragesimam* seu $\frac{1}{4}$ pristini spatii concluderetur; fortiùs adhuc eundem compressura si non (quod contigit) vas ipsum rumperetur. Quæ quidem Contractio, seu Condensatio, utut minor sit quàm modo dicta Expansio seu Rarefactio, (eò quod Aer jam fuerat, in statu ordinario, insigniter compressus;) multò tamen major est quàm vel hybernum Frigus, (aut illud artificiale, hyberno fortius,) vel vis Mechanica hætenus adhibita, poruerit efficere.

Si verò utramque (summæ Rarefactionis summæque Condensationis supra quàm est in statu aeris apud nos ordinario) considerationem componamus: Cum spatium quod occupat Aer sic Dilatatus, sit ad spatium quod occuparet Aer nobis Ordinarius, ut 13769 ad 1; atque quod Aer Ordinarius occupat ad spatium quod occupat sic Compressus, sit ut 40 ad 1; erit spatium Aeris sic Dilatati ad spatium ejusdem sic Compressi, ut (13769 x 40 =) 550760 ad 1; vel, numero rotundo, ut 550000 ad 1, seu ut *Quinquies Centena & Quinquaginta Milia*, ad *Unum*. Et, quantò, per media olim fortè excogitanda, removeri adhuc possit ab invicem uterque terminus; conjicere non valemus.

Unicum adhuc ex iisdem D. *Boylli* (de Aeris Rarefactione & Condensatione, seu Dilatatione & Contractioe,) Experimentis monendum duxi. Nempe, quòd, utut Aerem in statu admodum laxo seu dilatato conclusum detinuerit in vase vitreo per Menses aliquot, imò per aliquot Annos; non tamen hætenus observare potuit, quin Elaterem suum retinuerit, & quidem in eodem quo prius vigore; nec ob laxitatem illam languorem contraxerit: Cum tamen non raro observemus, Corpora Elastica (putà, laminam Ensis, aliàmve chalybeam) ubi aliquadiu in situ indebito detenta fuerint, Elaterem suum deperdere, nec vi suâ se in pristinum situm restituere; Sed & Magnetem, Acumve Magnete incitatam, si extra situm suum longo tempore detineas, vel polos mutare, vel sensim deperdere verticitatem suam. Tantus scilicet est, etiam in rebus inanimatis, diuturnæ in eodem situ positionis effectus.

Verum

Verum hic loci dissimulandum non est Experimentum aliud, illustre quidem & fati stupendum, quodque me de Phænomeni causâ sollicitum tenuit.

Nempe; Si Hydrargyrum inverso Tubo (ut dictum est) suspensum, sit ante inversionem ab omni Aere accuratissimè depurgatum (quod nonnisi summâ curâ & diligentia fiet,) atque inversione cautè factâ, Tubus in loco firmo ab omni concussione liber constituatur; Hydrargyrum (aperto infra orificio) suspensum permanebit, etiam longè ultra altitudinem supra indicatam: Si verò, Hydrargyro sic suspensò, vel tantillum Aeris admittatur, vel concutiat Tubus; statim precipitabitur Hydrargyrum usque ad solitam altitudinem, ibique (post reciprocationes aliquot factas) consistet.

Phænomenon hoc, Experimentis quibusdam, in Organo Boyliano primum, deinde in aperto aere factis, debemus. Observaverat utique Honoratissimus Boyleus (quod ex ejus Experimentis Physico-Mechanicis, Anno 1660. editis, Exper. 17. ante monuimus,) Hydrargyrum, intra Antliam suam Tubo suspensum, subducto Aere gradatim descendere, uti expectaverat; non ita tamen quin, quamcunque adhibuerit diligentiam, supra stagnantis inferius Hydrargyri superficiem (contra quam speraverat) extaret adhuc ad altitudinem *Unciæ* vel saltem *Semi unciæ* (præsertim si ab aere prius depuratum fuerit,) cui in Aquâ respondent pedis *Unciæ* saltem 7 aut 8. Idemque in Aquâ expertus, immissis in Antliam tubis brevibus (putà, 5 aut 6 unciarum pedis) eâ repletis, Aquam reperit (saltem si ab Aere prius depurgata fuerit) non descendere. Quæ quamquam Organo minus præcisè obturato, quàm ut potuerit Aer omnis inde exhauriri, impurari posse videretur; rem tamen cum iis è *Societate Regiâ* qui tum temporis solebant convenire communicavit, ut altiore dignam examine.

Cumque, post Librum illum editum, Organumque ipsum *Londini* 1661 conspectum, variis adhibitum usibus, id eoque approbavit *Clar. Hugenius*, ut domum reversus aliam sibi ad ejusdem Antliæ formam parandam curaverit: id ipsum ille in Aquâ expertus similiter evenire deprehendit, (nescius, credo, D. Boyleum id pridem deprehendisse:) Nempe, immissò in Antliam tubo breviusculo aquâ repleto ab aere depuratâ, post Aerem ex Antliâ quantum potuit exhaustum, Aqua adhuc suspensa mansit.

Idemque (suis literis) ut notabilem in doctrinâ *Boyleanâ* (de Aeris Pondere & Elatere) difficultatem objecit.

Cui (literis suis) reponerat D. Boyleus, rem planè ita esse, atque ab ipso

ipso jam ante observatam, tum in Aquâ (ut D. *Hugenius*) tum etiam in Hydrargyro; agnitamque difficultatem, & cum Societate Regiâ communicatam, ut ulteriori adhuc examine dignam. Interea tamen solvi difficultatem videri posse ob Antliam non ita penitus exhaustam quin ut residuus Aer exiguum illud pondus sustinere potuerit, & si quando Aqua illa brevium tuborum, aut huic aqipoliens Hydrargyrum, ab aere nondum depuratum, subsideret, id imputari posse latenti intus Aeri elatere suo depellenti vim Aeris extra tubum jam valde debilitatam.

Quod quidem responsum, utut Objectioni (prout tum res erant) satisfacere videretur; non tamen fecit quin Societati Regiâ visum fuerit in rem illam altius inquirere, Experimentis tum coram ipsis publicè, tum alibi privatim, præsertim ab Honoratissimo Præsidente D. Vicecom. *Brounckero* & D. *Boyle*, (quorum præsertim curæ res ea demandata fuit,) live in Organo *Boyliano* live in aperto Aere, faciendis.

Póstque varia facta tentamina, retulit tandem Societati Regiæ D. *Præses*, se Hydrargyrum sic suspensum detinuisse, ultra solitam altitudinem ad Equipondium necessariam (putà unciarum 29 aut 30,) nempe ad pedis uncias usque 34: Posteaque D. *Boylus*, se idem expertum in altitudine unciarum 52: Iterumque D. *Præses*, se idem ad pedis usque uncias saltem 55, pollicitus porro se rem ulterius adhuc prosecuturum. Quæ ex Regiæ Societatis Regestis Annorum 1662 & 1663 liquent.

Idemque ex eo tempore, frequenti experientia, in aperto Aere (absque Antliæ ope) Experimentis Honoratissimorum *Brounckeri*, *Boylii*, aliorumque, crebrò iteratis (quibus & ego aliquando interfui) confirmatum est; Hydrargyrumque, non tantum ad usitatam altitudinem (quò Equilibrium cum externo Aere fieret,) putà, ad pedis Anglicani Uncias 29 circiter, sed etiam ad Uncias usque 40, 50, 60, aut etiam plures, suspendi deprehensum est, atque ita suspensum per dies aliquot consistere; sed concussione factâ, vel tantillo Aeris admissio, statim præcipitari ad Equilibrium usque: Ut de Phænomeni certitudine jam dubitandum non sit.

Atque hoc quidem Experimentum, illustre & insperatum, cum leges Staticas suprâ positas quadantenus turbare videatur, in Gravitatis naturam altius inspiciendum monet, eoque facem non contemnendam præferre fortè deprehendetur olim.

Interim, donec certius aliquod à Viris Eruditis conclusum fuerit, hac mihi ratio videtur non improbabilis. Nenupe; Cum olim, in
veteri

veteri Philosophiâ, Terra, Aqua, aliâque ejusmodi Corpora, Gravia censerentur; Aer autem Levis: videri possit contrarium quadantenus hinc dicendum; omnemque Gravitationem actualem ab Aeris Ætherisve pressu vel Elatere (expansionem moliente, ceterâque propterea loco suo deturbante,) provenire: Absque quo, segnia hæc Corpora, quæ Gravia dicimus, in quiete posita sic permanerent, sine Gravitatione actuali sive descensu; neque magis essent ad motum deorsum proclivia quàm ad lateralem. Hydrargyrum itaque ab omni intus Aere depuratum, atque ita ut dictum est suspensum, etiam ultra consuetam altitudinem ad æquilibrium necessariam, cum ab omni Aeris pressu liberum sit, nec ejus vel gravitate vel elatere urgeatur, (quippe, qui intus deprimeret, nullus est; quique extra est, si omnino premeret, sursum premeret; nempe, per Tubi orificium, quâ solum patet aditus; nam à pressu aeris superno vel laterali à Tubo defenditur;) in quiete positum immotum manet, suumque situm retinet. Si verò, propter Tubi concussionem aliquam, aliquâve intus commotionem ab Aeris elatere, vel prius inibi relictis vel jam demum admissis, in motu ponatur, motum illum (pro ratione quantitatis materiæ, vel densitatis partium, vel quicquid id sit quod *Ponderis* nomine vulgò insinuamus,) prosequitur, deorsum (quâ via patet) vergens. Adeoque, quicquid id sit quod in Hydrargyro (aliisque similibus) *Pondus* dicimus, utur absque Elatere vel pressu aeris aut quod hujus instar sit non inchoaret motum, motu tamen undecunque orto rationes Staticas deinceps observat. Atque hæc est quæ mihi videtur Phænomeni hujus non improbabilis ratio.

Addo tamen, Tubi superficiem utcunque politam (quod de aliis superficiebus pariter intelligendum) non ita ab omni asperitate seu inæqualitate immunem censendam esse, quin etiamnum aliquid asperitatis supersit, unde corporis adjacentis cohesio aliqua & (si moveatur) frictio oriatur, (ut suprà aliquoties insinuatum est,) quâ motus aliquatenus impediatur, atque ob quam mota corpora alii contigua Volvi facilius quam Labi deprehenduntur. Atque hinc, si post omnem adhibitam diligentiam nonnihil aeris utur exiguum permanere censeatur, compensatio fieri possit ne Hydrargyrum excutiat.

Fateor interim mihi ne sic quidem penitus satisfactum esse, scrupulosque adhuc superesse & difficultates quibus respondendis necdum sufficio, quin aliquid adhuc mecum hæreat. Et quidem fieri potest (quod D. Vicecom. *Braunckerus* suspicatur) Aeris pondus multò majus adhuc esse quàm ut altitudini Hydrargyri unciarum plus minus 29 respondeat; sed ab aere intus latente (nisi expurgetur) ad eam usque
alti-

altitudinem depressam esse Hydrargyrum: At ubi expurgatur Aer, nihilque tum supersit quod externi aeris ponderi se opponat præter nudum Hydrargyri pondus, rem secus deprehendi, hydrargyrumque ab aeris æquipondio altius sustentum iri.

Sed nihil certi hic ausim determinare, severiori adhuc disquisitione rem dignam censens.

PROP. XIV.

Quæ de Hydrargyro propositionibus superioribus ostensa sunt eadem in aliis Fluidis, servatâ Gravitationum proportionem, pariter obtinent.

Cum enim omnium Demonstrationes Hydrargyro speciatim applicatæ, procedant ex generali Fluidorum naturâ, eadem pariter obtinebunt in fluidis aliis, pro suâ cujusque gravitate.

Verbi gratiâ: Cum pondus Aquæ ad pondus Hydrargyri, æqualis magnitudine, sit ut 1 ad 14 (numero rotundo,) seu potius (quod D. Boyleus ex suis Experimentis accuratius judicat) ad $13\frac{1}{4}$ circiter; (Geraldus, in suo Archimede promoto, ponit ut 1 ad $13\frac{1}{2}$;) Quò Cylindrus Aquæ æquipolleat externi Aeris pressui, requiritur ut altior sit Cylindro Hydrargyri æquipollente, vicibus 14, saltem $13\frac{1}{2}$, aut $13\frac{3}{4}$; prout hæc, illa, vel ista proportio sit accuratior; & quidem pro diverso sive Aquarum sive Hydrargyrorum pondere, poterit nunc hæc nec illa esse accuratior; potest enim & Aqua aquâ & Hydrargyrum Hydrargyro levius esse graviusve. Adeoque quam posuimus altitudinem C1, (fig. 314.) in Hydrargyro, unciarum plus minus 29; ponenda erit, in Aquâ, pedum plus minus 33.

Huic consonum est D. Boylei Experimentum (cui & ipse cum aliis interfui) cujus meminit in *Continuatione Experimentorum Physico-Mechanicorum*, Experim. 15. Qui, experimento quærens quousque posset Aqua Suctione elevari in tubo, supra superficiem infra stagnantis aquæ cui insistebat, invenit (summâ adhibitâ diligentia) maximam ad quam tunc temporis elevari posset altitudinem fuisse pedum 33 & unciam 6, hoc est pedum $33\frac{1}{2}$; quo tempore altitudo Hydrargyri propter Atmosphæræ æquipondium suspensi, fuit unciarum pedis $29\frac{1}{4}$ proximè; quæ quidem Hydrargyri altitudo per $13\frac{1}{4}$ multiplicata, exhibet uncias 402 proximè, hoc est pedes 33 cum 6 uncis. Atque, eadem

eâdem analogiâ, quo tempore assurgeret Hydrargyrum ad pedis Anglicani uncias 30 (qui ascensus est quali maximus,) assurgeret Aqua ad altitudinem unciarum $412\frac{1}{2}$, hoc est pedum 34 & unciarum $4\frac{1}{2}$: Quo tempore verò Hydrargyri ascensus esset nonnisi unciarum 28 (qui quasi minimus est,) ascenderet aqua ad altitudinem unciarum 385, seu pedum $32\frac{1}{2}$. Ut maximam Aquæ ascensionem ob Suctionem (seu, quod tantundem est, ob Atmosphæræ æquiponderantiam) obtinendam, ritè judicemus, nunc pedum $34\frac{1}{2}$, nunc pedum 32, (proximè,) nunc his intermediam, prout maxima minima vel intermedia fuerit Atmosphæræ gravitatio; saltem ab his limitibus quam parum recedendum erit.

Verùm non opus est, ad hoc de Aquâ Phænomenon probandum, (quod non ultra certam altitudinem suctione possit elevari,) ut ad idem in Hydrargyro tentatum recurramus. Quippe illud in Aquâ primò deprehensum est. Utat enim, qui ob Fugam Vacui suctiones fieri existimaverint, putaverint etiam (nec quidem inconsequenter) ad quantamcunque altitudinem sic posse Aquam elevari; nec dubitarint quin Antliarum atque Siphonum ope posset aqua etiam supra altissimas Turres nedum Montes suctione trahi: Deprehenderant tamen Antliopœi, cum ad praxin deventum esset, rem non succedere; omnesque aquam supra certam altitudinem his mediis elevandi conatus frustra esse. Atque hoc ipsum est quod *Galileo* primùm in animum induxit, Vacui Fugam illam non infinitam esse, sed intra certos limites coerceri; Aerisque Æquipondium illius loco substituendum. Indèque *Torricellio* ansa data est idem in Hydrargyro tentandi. Quippe non imprudenter coniecit ille, si ob Aeris Æquipondium nonnisi ad certam altitudinem elevaretur Aqua, ad minorem adhuc elevandum fore Fluidum aquâ Gravius: atque, in Hydrargyro tentata, res successit ex voto. Atque exinde, *Torricellio* præeunte, res jam redacta ab altitudine pedum plus minus 33, ad altitudinem tubi breviusculi, unciarum putà 29 plus minus, facta est magis tractabilis; (cum tubi tot pedes alti, liquoribus aerique impervii, nec facile obtineri possent, nec commodè tractari:) Unde tot tantique momenti Experimenta profluxerunt, profluuntque indies.

Quòdque in Aquâ ostensum est, in Fluidis aliis, servatâ proportionè gravitatum, perinde obtinere censendum est.

Ccccc

PROP.

PROP. XV.

Quæ de Hydrargyro, aliisque Fluidis, in Tubo suspensis
ostensa sunt; eadem Siphonibus, Antliis, aliisque ejus-
modi organis, accommodanda sunt.

Fig. 321. **E**sto enim, verbi gratiâ, Siphon seu Tubus incurvus CDE (u-
trinque apertus,) cujus alterum extremum C Aquâ aliôve Fluido
immergatur, alterum E extra propendeat. Notum est Experimen-
tum (ut in deplendis vasis vinariis, aliisque,) si sugendo in E proliciatur,
liquor donec effluat, omisâ deinceps suctione continuabitur effluxus,
donec liquor in vase vel penitus exhauriatur, vel à justâ altitudine de-
ficiat: Eâ tamen lege, ut orificium E inferius sit quàm AB liquoris
in vase superficies.

Hujus Phænomeni causa à Fugâ Vacui peti solebat olim; nempe,
quod exsucto in E aere qui in Siphone fuerat, ascendat (contra gra-
vitatē suâ propensionem) Fluidum in C, ne daretur (quod naturam
omnibus modis averfari putabatur) Vacuum in Siphone. Et, conse-
quenter, hujusmodi artificio etiam supra altissimos montes in oppositas
valles aquam transferri posse putabatur.

Postquam vero experimento compertum est, non posse aquam
(aliudve fluidum) ultra certam altitudinem suctione attrahi, eamque
in altitudinem immensam sic elevandi spes fuisse fallaces; cœpitque
in Fugâ Vacui locum succedere (Galilæo id primùm suggerente, &
promovente Torricellio,) Aeris Æquipondium: ad leges Staticas de-
ventum est, quò altitudines illæ pro cujusque Fluidi gravitate determi-
nentur.

Exsucto igitur Aere in E, (seu potius, loco facto in sugentis Thorace
dilataro quo recipiatur aliunde protrusus aer,) subjectum Fluidum ab
aeris extrâ incumbētis pressu in Siphonem protrahitur (eâdem ratione
quâ, suprà, in Tubum rectum) in C; idque eousque (nec ultra)
donec fiat Æquilibrium cum externi Aeris pressu, (per ante demon-
strata;) putâ, ad altitudinem CI; (hoc est, in Hydrargyro, Uncia-
rum quasi 29; in Aquâ, Pedum quasi 33, plus minus; atque in aliis
liquoribus proportionaliter pro suâ cujusque gravitate.) Si itaque
Siphonis summum D, altius non sit quàm I; assurgit fluidum ad
summum usque; exituque illic invento per crus descendens DE, effluet
ex

ex E; atque hoc continuè, causis perseverantibus. Eâ tamen lege, ut inferius sit E quam C (superficieî A C B:) Secus enim, cum æquali Atmosphæræ pressu urgeantur C & E, si Cruris D E altitudo minor sit quam Cruris D C, adeoque fluidum quod illo continetur minus gravitet quam quod in hoc, contrario cursu feretur fluidum ab E per D ad C, succedente Aere in E: Saltem, nisi Siphonis amplitudo tanta sit ut possit Aer simul ascendere (per fluidi latera) dum defluit fluidum curis D E; quo casu, partiri poterit fluidum in D, descendente parte alterâ per D C, alterâ per D E, ascendente Aere per fluidi D E descendents latera; in Siphonibus vero strictioribus retrò feretur fluidum in E, per E D C, ab aere in E urgente propulsum.

Sin D altius sit quam I, sursum propelletur Fluidum (ob causas suprâ traditas) à C ad I usque, sed non ultra; adeoque ad D non pertinger: Adeoque tantum abest ut cessante suctione continuè profluat per D ad E, ut nullâ suctione ad E protrahi possit. Cum enîna suction non aliter agat quam (aperto Thorace, aut quod Thoracis instar est,) locum faciendo quo recipiatur fluidum (non suctionis vi tractum, sed) ab externi aeris pressu (seu quod hujus instar est) propulsum; si, utut loco factò, non valeat tamen externus aer eò propellere Fluidum (propter D altius quam I,) Fluidum ad I consistet, neque altius feretur quò per D ad E possit pertingere. Et quidem, si totus fluido impleatur Siphon C D E, aperto utrinque orificio, factâ partitione in D, quod est in crure D C deprimetur saltem usque ad I, (ne plus prematur C quam superficieî A C B partes reliquæ,) quòdque est in crure D E effluet per E (aere in illius locum succedente;) saltem nisi tam strictum sit crus D E ut non commodè possit ascendens Aer descendens fluidum præterire; quo casu, postquam descenderit fluidum in D usque ad altitudinem I, suspensum illic detinebitur donec se possit Aer sensim insinuare; viâque tandem factâ quâ possit externus Aer liberè per E intrans vim suam exercere, deprimetur quod erat residuum in crure D E ad C usque.

Idémque in Antliâ (seu Organo Ctesibianâ) obtinet; Cujus structura ad hunc fere modum fieri solet; Lignum oblongum (vel ex pluribus, si opus sit, compositum) intus excavatum Cylindricè, in puteum demittitur, (extante parte superiore,) infra superficiem aquæ in putei fundo; quæ quidem Aqua intelligenda est, non libera ab aeris pressu, sed eidem obnoxia (secus enim non sursum propelletur aqua;) Atque alicubi in Antliæ cavo repagulum transversum figitur in

Ccccc 2

in cuius medio est foramen D per quod ascendat Aqua; & huic foramini incumbens operculum seu valva E, transversario ita fixa ut aperiri aut claudi possit prout infra supræ premittitur; Item, Situla à manubrio supernè demissa, (ita Cavi lateribus aptata ut non possit Aer per latera se insinuans transire,) quæ similiter in fundi medio foramen habeat F, eique sic aptatam valvam G, ut E ad D.

His ita constructis; dum manubrium versando Situla sursum trahitur, cumque illâ incumbens Aer, quò minus subiecta intra Antliam aqua eo prematur, impelletur in Antliæ cavum aqua aliunde pressa per C ad D, & per foramen (valvam E aperiens) ad fundum usque situlæ (modò altior non sit quàm CI summa æquilibrii altitudo,) utpote a pressu supernè libera, atque infra propulsa: Contrà vero; dum manubrium aliàs versando deprimitur Situla, deprimatque proximè subiectam aquam quæ per D ascenderat; clauditur hac depressione valva E, atque aperitur G; per quam aqua, situlam supergressa, cum retractâ situlâ (clausâ G valvâ) sursum trahitur, viâque illic inventâ per orificium H effluit, succedente ut prius in retractâ situlâ locum aquâ per D denuo assurgente: atque hoc continuè.

At verò, si altitudo C D major sit vel non minor quàm C I (quâ fieri supponimus æquilibrium cum externi aeris pressu) Aqua per D non ascendet (ne plus premeretur C quàm superficiei A C B partes reliquæ,) totiusque Antliæ labor incassum erit. Sin D sit infra I, ascendet aqua per D ad I usque, modò non impediatur; saltem ad usque fundum situlæ, nisi altior sit hic quàm I. Si verò eonsque sursum trahatur situla ut F vel G superet altitudinem I, defertâ situlâ infra subsistet aqua ad I; ita tamen ut si situla dum infra I fuerat aquam per F G hauserat, hanc secum (clausâ G valvâ) elevabit atque per H effundet; sed cum majore exaltantis vi, utpote cui nihil subsidii conferat aqua infernè premens.

Hinc est, quòd Hydrargyrum non possit Siphone, Antliâ, Syringâ (nam & illic eadem est ratio,) aliòve Suctionis Organo quocunque, ultra pedis Uncias 29 aut 30 in altum trahi; nec Aqua, ultra pedes 33 aut 34, circiter; aliâque Fluida pro suâ cuiusque gravitatis ratione. Causa utique in omnibus eadem est; Nempe, Ea quæ Suctione fieri videntur omnia, Pulsione reverâ fiunt; putâ, ab aere extrâ gravitante, aliòve pressu; suctione nil aliud faciente quàm ut locus paretur ad recipiendum id quod pressu aliunde pellitur.

CAP. XV.

Epilogus, ex Miscellaneis.

Cum tandem ad umbelicum perveniendum sit, ne opus in immensum crescat, (utut pro materiæ copiâ satis arctum;) nonnulla in caput hoc strictim congerere visum est, quæ vel suis locis omiſſa fuerant, vel consulto huc rejecta.

PROP. I.

De Spatiis Hyperbolicis, addi possunt supra traditis hæc quæ sequuntur.

Nempe, in hujus Operis Parte Secundâ, Cap. V. prop. 31. prope finem, pag. 555. post lin. 23. hæc inserantur.

SCHOLIUM.

Priusquam autem hoc Spatium Hyperbolicum dimittam, libet ejusdem cum aliis aliquot figuris Symbolizationes, non olim observatas, recolligere.

1. Si rectarum quolibet arithmetice proportionalium quadrata, quadratis invicem equalibus (vel eodem communi) augeantur; aggregatorum latera quadratica, ad rectam ut axem equalibus intervallis ordinatim applicata, complebunt Spatium Hyperbolicum, Curvæ, Semi-axi transversæ, & Axi Conjugatæ interjectum, rectæque axi transversæ parallelæ clausum. Puta, Si expositæ rectæ CA fig. 323. Fig. 323. normalis fiat C δ A quantumvis producta, in quâ sumantur partes æquales quolibet C δ , δ A, &c. adeoque C δ , C δ , C δ , &c. arithmetice proportionales; & junctis δ A, δ A, &c. æquales ponantur δ O, δ O, &c. Erit A O O curva Hyperbolica, cujus Semiaxis transversus CA, & C δ A axis conjugatus, spatiumque C A O δ hyperbolicum complebunt rectæ δ O, &c. iplis δ A æquales. Hoc demonstramus.

stramus in Tractatu De Curvaturis *Evdwōtes*, iterumque ad prop. 32. hujus Capituli V.

Fig. 323,
324.

2. Si exponatur, fig. 324. A o O parabola, cujus Axis interceptus A d D, ordinatim-applicata D O, tangensque O F axi producto occurrat in F; tangatque in vertice A T, = D O, divisa utcumque in τ ; cui æqualis ponatur C d Δ (fig. 323.) similiter in d divisa; fiatque angulo D F O, æqualis C d A, determinans (in recta ipsi C d Δ normali) rectam C A; & junctis d A, Δ A, æquales ponantur d o, d O, ipsi C A parallelae, fiatque (ut modò dictum est) A o O Hyperbola, cujus Semiaxis C A; sitque asymptota C m M: Erit, *ut spatium hyperbolicum* C d O A, ad C d M triangulum; sic A o O curva parabolica, ad ejus axem interceptum A d D: *Itemque*, ut C d o A, ad C d m; sic A o curva parabolica, ad ejus axem A d; & sic ubique. Hoc demonstramus in eodem De *Evdwōtes* tractatu, iterumque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

3. Si conversione Parabolæ A O D circa Axem A D describatur Conoides parabolicum; & conversione Rectanguli circumscripti A D O T, circa eundem axem describatur Cylindrus: Erit, *ut momentum spatii hyperbolici* C d O A, ad momentum trianguli C d M, respectu ejusdem C A; seu, ut erecta Ungula super illud, ad Ungulam erectam æque altam super hoc, quarum communis acies sit eadem C A; seu, ut Solidum ex conversione illius, ad Solidum ex conversione hujus, circa eandem C A; (sunt enim hæ rationes, eadem omnes:) Sic Conoidis hujus parabolici superficies curva, ad duos trientes superficiei curvæ Cylindri circumscripti. Vel etiam (propter C d O A = C d O D = A O D.) Ut Momentum Rectanguli C d O D minus momento Semihyperbolæ A O D, ad momentum Trianguli C d M, (respectu ejusdem C A D;) Sic Conoidis hujus superficies Curva, ad duos trientes curvæ superficiei Cylindri circumscripti. Quod ibidem demonstramus, atque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

4. Sed; positis (ut § E. prop. 32. hujus Cap. V.) $A C = S = \frac{1}{2} T$,
Laterèque recto = L, A D = d, D O = C d = h = $\sqrt{\frac{d T + d^2}{T}} L$,
 $\Delta O = C D = c = \frac{1}{2} T + d = S + d = \sqrt{s^2 + \frac{T}{L} h^2} = \sqrt{\frac{1}{4} T^2 + \frac{T}{L} h^2}$,
 $\Delta M = \sqrt{\frac{T}{L} h^2} = h \sqrt{\frac{T}{L}}$: Momentum Semi-hyperbolæ A O D
respectu rectæ C A D (utpote Semiquadrata omnium D O) est
 $\frac{\frac{1}{2} d^2 T + \frac{1}{2} d^3}{2 T} L$; (Quod ibidem ut demonstratum assumimus ex
prop.

PROP. I. Epilogus, ex Miscellaneis. 749

prop. 164. *Arithm. Infin.* iterumque ostendimus ad § L. prop. 31. hujus Cap. V.) Momentum autem (respectu ejusdem C A D rectæ) Rectan-

anguli C A O D, $\frac{1}{2} c b^2$; & Trianguli C A M, $\frac{1}{3} h^3 \sqrt{\frac{T}{L}}$; (per pr.

6. ejusdem.) Ergo, Ut $\frac{1}{2} c b^2 : \frac{1}{2} T + \frac{1}{3} d^2 L$, ad $\frac{1}{3} h^3 \sqrt{\frac{T}{L}}$; hoc est,

Ut $c b^2 T : \frac{1}{2} d^3 T L - \frac{1}{3} d^3 L$, ad $\frac{1}{3} h^3 T \sqrt{\frac{T}{L}}$; Hoc est (propter

$c = \frac{1}{2} T + d$, & $b^2 = \frac{dT + d^2}{T} L$.) Ut $\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{1}{3} d^2$, ad $T + d$, in $\frac{1}{3} \sqrt{dT + d^2}$: Sic illa superficies curva Conoidica, ad $\frac{1}{3}$ Cylindrica: Seu, Ut $\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{1}{3} d^2$, ad $T + d$, in $\sqrt{dT + d^2}$; Sic Conoidica ad Cylindricam.

5. Sed & eadem est ratio momenti curvæ parabolicae A O, ad momentum rectæ T O, respectu ejusdem rectæ A D, (nempe, quæ est conversione factorum:) Cum itaque Momentorum ratio ex rationibus ponderum & distantiarum componatur; si ex hoc momentorum ratione eximatur ratio magnitudinum; hoc est (ut modo ostensum est) quadrilinei C A O A ad triangulum A A M, (seu hujus conversa cum eâ componatur:) habebitur ratio distantie Centri gravitatis curvæ parabolicae A O, ad distantiam centri gravitatis rectæ T O, (ab eadem A D,) hoc est ad A T = C A = D O = h = $\sqrt{\frac{dT + d^2}{T}} L$:

Adeoquæ $\frac{\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{1}{3} d^2}{T + d}$ in $\sqrt{dT + d^2}$ x $\frac{A A M}{C A O A}$ A T Distantia Centri gravitatis curvæ parabolicae A O ab ejus axe A D: Vel, propter A A M = $\frac{1}{2} h^2 \sqrt{\frac{T}{L}}$, si ponamus h g = C A O A, adeoque

$\frac{A A M}{C A O A} = \frac{\frac{1}{2} h}{g} \sqrt{\frac{T}{L}}$; erit ea distantia $\frac{\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{1}{3} d^2}{T + d}$ in $\sqrt{dT + d^2}$ x $\frac{1}{2} h \sqrt{\frac{T}{L}}$, hoc est, reductione factâ, (propter $h = \sqrt{\frac{dT + d^2}{T}} L$ &

$h \sqrt{\frac{T}{L}} = \sqrt{dT + d^2}$;) $\frac{\frac{1}{2} T^2 + dT + \frac{1}{3} d^2}{T + d} \times \frac{\frac{1}{2} h}{g} = \frac{3 T^2 + 6 d T + 4 d^2}{6 T + 6 d}$ x $\frac{\sqrt{dT + d^2}}{2 g} \sqrt{\frac{L}{T}}$. Ubi quantitates omnes sunt Geometricæ de-

terminatæ præter unam g, quæ cum C A = h intelligitur Rectan-

gulum comprehendere æquale Quadrilineo C A O A; eaque ipsa

pro-

Fig. 323, 324. proximatione quamlibet accuratâ determinatur prop. 31. hujus Cap. V. Sed & hinc similiter habetur ejusdem ab O T distantia; adeoque ratio superficiei ab AO curvâ circa O T conversâ descriptæ, ad Cylindricam rectâ AD sic conversâ descriptam. Aliâque de ejusmodi aliis curvæ parabolicæ conversionibus; quæ hic ulterius prosequi non est animus, ne nimis divagarer.

6. Si eadem curva Parabolica AO circa tangentem verticis AT ut axem convertatur, Conoidis Parabolici Acuti superficiem curvam describens; rectâque AD sic conversâ describat circulum: Erit, Ut Ungula Quadrilinei Hyperbolici CΔOA, aciem habentis CA, momentum respectu aciei suæ CA; ad Ungula Trianguli CΔM, aciem item habentis CA, momentum respectu ejusdem CA: Sic superficies curva Conoidis parabolici acuti ab AO circa AT descripti; ad circulum rectâ AD ut radio circa A us centrum conversâ descriptum. Quod etiam in eodem De *Evdision* tractatu demonstratur. Manente scilicet Magnitudinum ratione oo, dd, in Parabola, ut s o, s m, in Hyperbola; distantia to, t o, sunt (non ut d o, d o, arithmetice proportionales, sed) ut quadrata arithmetice proportionalium: adeoque comparantur (non cum Quadrilinei CΔOA, & Trilinei CΔM, Ungulis seu Momentis respectu CA rectæ, sed) cum Momentis Ungularum CΔOA & CΔM respectu communis aciei CA. Eademque (quæ factorum à conversione) est ratio momenti curvæ AO, ad momentum rectæ AD, respectu AT rectæ. Atque, ex hac momentorum ratione, si eximatur ratio magnitudinum, (vel hujus conversâ cum eâ componatur,) habetur ratio distantia centri gravitatis Curvæ parabolicæ AO, ad distantiam Centri rectæ AD (quod est ipsius punctum medium,) ab AT eadem tangente verticis. Adeoque (propter habitam istius Centri distantiam à duabus rectis non parallelis) habetur ipsum curvæ Parabolicæ AO Centrum gravitatis; & quæ inde dependent.

Fig. 210. 7. Figura ex Primariorum Reciprociis conflata, est Spatium Hyperbolicum, Curva & Asymptotis interjectum, rectâ Asymptotarum alteri parallelâ terminatum. Ut ASHhσ fig. 210. Hoc demonstravimus prop. 94, 95. Arithmet. Infnit. iterumque prop. 31. hujus Cap. V.

8. Idemque spatium Hyperbolicum, est Figura Secantium, sinibus rectis complementorum (aut arcuum suorum sinibus versis) arithmetice proportionalibus respondentium. Hoc insinuat est, § B. prop. 17. hujus Cap. V. iterumque occurrit § E. pr. 30. (Nam quæ illic occurrunt rectæ

re $\frac{R^2}{x}$ sunt hæ Secantes.) Estque obvium & demonstratu facile.
Cum enim sit, in fig. 327. Ut sinus complementi $CV=x$, ad
radius $CB=R$; sic radius $CA=R$, ad secantem $CT=\frac{R^2}{x}$: Sumptis
Sinibus complementi $CV=x$ arithmeticè proportionalibus (adeoque
& sinibus versis $AV=v$ arithmeticè item proportionalibus;) si ponan-
tur (fig. 325, 326.) rectis CBT secantibus, æquales ordinatim- Fig. 325,
applicatæ VBO ; (quæ itaque erunt totidem $\frac{R^2}{x}$, ipsis x arithme- 326.

ticè proportionalibus reciprocarum, *Figuram Secantium* complentes;) erit, eadem Figura Secantium, spatium illud Hyperbolicum, (per modo dicta;) utpote Figura ex Primariorum Reciprocis constata.

Nempe, ut $CAHOM$: Ubi hyperbolæ Centrum, C , Asymptotæ CM , & CA , Vertex, H . (Quæ autem de C, A, H, O, M , dicta sunt; pariter intelligantur de $\kappa, \alpha, \eta, \sigma, \mu$.)

Et quidem, si sumatur AH , æqualis semidiametro Circuli CA , (ut fig. 325, 326.) ordinatim ad Asymptotam applicatæ VO sunt ipsis secantibus CT æquales; eritque H Vertex Axis. Si verò brevior sit AH quàm AC , in eadem ratione breviores erunt VO , quàm CT , respectivæ Secantes ad Radium CA : neque erit H vertex Axis, sed alterius alicujus diametri; Axis autem vertex situs erit propius ad Asymptotam, (nempe ubi recta bifecans angulum C , occurrit curvæ.) Sin longior sit AH quàm AC , etiam in eadem ratione longiores erunt VO quàm CT , (utrobique scilicet æquales Secantibus ad Radium AH , live longior sit live brevior quàm AC .) Nec erit H vertex Axis sed alterius diametri, Vertex autem Axis nusquam comparet, quippe qui ibi futurus esset ubi recta angulum C bifecans occurreret curvæ ultra H productæ. Quippe recta Angulum C bifecans, in figurâ *Primariâ*, (ubi AH ipsi AC æqualis,) occurrit rectæ AH , in H : Secus autem in *Secundariis*: Nempe, In *Contractâ*, (ubi AH brevior quàm AC ,) ultra H , intra Hyperbolam: In *Protractâ*, (ubi AH longior quàm AC , citra H (inter H & A) extra Hyperbolam.

Si verò Duo Circuli Quadrantes componantur, (ut fig. 325.) semicirculum absolventes; erunt duæ Hyperbolæ HOO , $\eta\sigma\sigma$, situ inverso positæ communem habentes Asymptotam CM , ut & $AC\alpha$: Sin quadrantes duo inversis verticibus componantur, (ut fig. 326.) Hyperbolæ duæ, HOO , $H\sigma\sigma$, communem verticem H habentes, Asymptotas habebunt oppositas CM , $\kappa\mu$, communem vero $CA\kappa$.

D d d d

Duæ

Duæ autem Hyperbolæ, $HO O$, $H^{\circ} O$, sic compositæ, utut similes sint, & quidem quamvis (ut in *Primariâ*, fig. 326.) communem habeant Axis Verticem H ; non tamen eandem continuant Curvam hyperbolicam; sed Angulum in H faciunt (productæque, se mutuo secabunt,) Rectum quidem in *Primariâ*; Acutum, in *Protractâ*; Obtusum, in *Contractâ*; magisque vel Acutum vel Obtusum, quo magis vel Protracta vel Contracta fuerit: adeo ut, in valde contractis, fere videantur unam facere continuam curvam.

Ponuntur enim (fig. 326.) $HO O$, $H^{\circ} O$, semihyperbolæ, situ distorto; propter dirempta puncta C, κ ; (quæ, ut OH° foret una Hyperbola, idem essent punctum, nempe commune centrum semihyperbolarum $HO O$, $H^{\circ} O$;) convergentibus punctis M, μ ; adeoque & O, o . Neque est AH utriusvis vel Axis vel Diameterum ulla: utpote quæ per C transire debent omnes quæ spectant $HO O$; & per κ , quæ $H^{\circ} O$ spectant.

Si vero, in figurâ *Primariâ*, (propter H verticem Axis,) manente communi puncto H , divaricari intelligantur curvæ $O o$; simulque Asymptotæ in M, μ , donec in unum coeant K, κ , puncta; evanescet angulus ad H , fietque HO una Hyperbola. Sed non item in *Secundariis*, (in quibus H non est vertex Axis:) Possunt quidem, etiam in his, manente H puncto, ita divaricari curvæ in $O o$, ut, evanescente angulo ad H , coeant in unam curvam, at non in unam Hyperbolam (sed duarum portiones.) Manifestum enim est (ex constructione) hyperbolas $HO O$ & $H^{\circ} O$ omnino similes esse & congruentes: fieri autem non potest in ullo hyperbolæ puncto, præter ipsum Axis Verticem, ut curvæ utrinque adjacentes congruant.

9. Verum hic cavendum est ne existimetur $HO O$ fig. 326. eadem Fig. 186. curva cum $o o o$ fig. 186. Quamquam enim $A o o o$ sit etiam figura Secantium, (sed Contracta, propter $A O$ minorem quam $A C$,) ut § B. prop. 17. insinuatum est: Sunt tamen illæ (non, ut hic, Secantes sinibus versis, seu complementorum rectis, sed) Sinibus Rectis, arithmetice proportionalibus respondentes. Sunt enim illic rectæ

$$V o = \frac{B R}{s} \quad (\text{sinibus rectis } s = V B, \text{ arenum } A B, \text{ reciproca;}) \text{ hic}$$

verò, $V O = \frac{R^2}{x}$, ipsis $\kappa = V C$ sinibus complementorum $B D$ reciproca. Hoc est; Sumptis $A V$ arithmetice proportionalibus; spatium complentes rectæ $V O$ fig. 326. sunt arcuum $A B$ secantibus

Fig. 327. $C T$ fig. 327. proportionales; sed $V o$ fig. 186. proportionales complementorum $B D$ secantibus $C T$.

10. Cúmque

PROP. I. *Epilogus, ex Miscellaneis.* 753

10. Cúmque sint $s = \sqrt{R^2 - x^2}$. Si sumantur $x = CV$ (adeoque & $v = AV$) arithmetice proportionales; erunt omnes s , ut rectarum in parabolâ, axi parallelarum radices quadraticæ, seu in ipsarum ratione subduplicatâ; putâ quæ sint in rectarum $V\beta$ fig. 164. semiparabolam complementium ratione subduplicatâ; (cùm enim rectæ $\beta\delta$ complentes semiparabolæ complementum sint ut x^2 , quadrata primanorum; erunt harum continuationes $V\beta$, axi parallelæ, ut $R^2 - x^2$; sumpto Axe ut R^2 ;) quæque ex istiusmodi radicum reciprocis conflatur figura, est ipsa $CAO\omega$ fig. 186. Omnesque s^2 sunt ut ipsæ rectæ axi Parabolæ parallelæ. Puta, ut ipsæ $V\beta$ fig. 164. (ut pr. 112. *Arithm. Infin.* & § V. pr. 15. hujus Cap. 5. ostenditur:) atque harum reciproca, $\frac{R^4}{s^2}$, sunt ut rectarum $V\omega$ (fig. 186.) $\frac{BR}{s}$ vel $\frac{R^2}{s}$ quadrata, seu ut earum momenta respectu $A\alpha$, aut circuli earundem conversione circa $A\alpha$ facti. Rectarum verò $VO = \frac{R^2}{x}$ fig. 326. (spatium hyperbolicum complementium) quadrata seu momenta, ut $\frac{R^4}{x^2}$, sunt ut ipsarum $\beta\delta$ (fig. 164.) rectarum reciproca. Quæ autem sunt ipsis $\beta\delta$ fig. 164. vel $V\beta$ fig. 178. ordinatim-applicatis in parabolâ reciproca, sunt ut $V\omega$ figuram $A\alpha O\omega$ (fig. 178.) complentes, curvæ Cycloidalis particulis (continûe sumptis) proportionales; spatiique (quod illæ complent rectæ) $A\alpha O\omega$ portiones, proportionales respectivis Curvæ Cycloidalis partibus quas illæ complent particulæ: ut § B, C. prop. 22. ostensum est. Sed rectæ $V\omega$ fig. 186. sunt peripheriæ circularis particulis (continûe sumptis) proportionales; spatiique quod illæ complent rectæ, proportionales respectivis peripheriæ partibus quas illæ complent particulæ: ut § B. prop. 17. ostensum est.

Multaque alia adjungi posset, nisi sic nimius essem.

PROP. II:

De Cissoide, addi possunt supra traditis hæc quæ sequuntur.

Nempe, in Parte hujus Operis secundâ, Cap. XXIX. (ubi de Cissoide agitur,) ad finem, (pag. 533. lin. 20.) hæc subjungantur.

Fig. 205. Sed & sic potest construi eadem Curva.

Ductâ rectâ $\alpha\beta T$, quæ tangenti TAT occurrat in T , erit ubique $\beta b = AT$. Est enim $\alpha V \cdot V\beta :: VA \cdot Vb :: \alpha A = \alpha V$.
 $\frac{1}{2} VA \cdot AT = V\beta + Vb = \beta b$.

Demonstratio D. Hugonii.

Quod autem *Spatia Cissoïdalia* $b\alpha A$, $b\alpha b$, $b\alpha T$, &c. sint tripla respectivorum in Semicirculo $\alpha B\alpha$, $B\alpha B$, $B\alpha A$, &c. & sic ubique. Demonstrationem Clar. Hugonii ingeniosam, (quam ab ipso, post impressam partem secundam, accepi nuper,) libet hic adjungere, ne peccat: cui subjungam meam.

Erat autem D. Hugonii Demonstratio ad hunc sensum; (verbis non-nihil, ipso insinuante, mutatis;) quàm potui proximè ad mentem suam descripta.

Fig. 328, 329. "Sit ACB , semicirculus, (cui Centrum Z , tangens BF) &

" $AVPE$ Cissoïdes Dioclis inde genita: Cujus hæc proprietas, ut
 "sit ubique $AC = EF$. Atque eidem Semicirculo (seorsum transcripto, quò vitetur linearum confusio,) circumponatur ABS circuli Quadrans (Centro A radio AB descriptus;) cui AC pro-

"ducta occurrat in K .

"Dico, *Spatium* $AVPEFB$ æquari Triplo segmento CBT .

"una cum Triangulo ACB : Hoc est, Sectori AKB una cum Spatio

" $CTBK$. Est enim Segm. $CBT = \text{Spat. } CTBK$. Nam (jun-

"cta CZ) erit Ang. $CZB = 2$ Ang. CAB . Adeoque Sect.

" $ZCB = \frac{1}{2}$ Sect. AKB . Ergo Sect. $ZCB = \text{Triang. } ACZ +$

"Spat. $CTBK$. Auferantur æqualia, hinc Triang. ACZ , inde Tri-

"ang. ZCB : Fit, Spat. $CTBK = \text{Segm. } CBT$.

"Ostendendum ergo, quòd Spat. $AVPEFB = \text{Sect. } AKB +$

"Spat. $CTBK$. "Præ-

“(Præsumitur autem, tanquam facile demonstratu, per notas
 “exhaustionum methodos, Sectori AKB Inscribi posse & circum-
 “scribi figuram Dentatam, ita ut altera alteram excedat spatio minore
 “quolibet dato: Et similiter, Spatio Cissoïdali AVPEFB.)

“Si dicatur Cissoïdis Spatium AVPEFB, minus esse quàm
 “Sect. AKB + spat. CTBK: Sit horum excessus Ω . Et inscri-
 “batur sectori AKB figura ordinatè, ut duplum omnium Trilineo-
 “rum KND sit minus quàm Ω . Et Cissoïdis Spatio AVPEFB,
 “figura inscribatur ex totidem trapeziis. Ostendetur Trapezium
 “EFGQ = Triang. AKN + Trapez. CN. Est enim Trapez.
 “EG ad Triang. ACL, ut FG + EQ ad CL, (quia eandem ha-
 “bent altitudinem;) Hoc est, ut FA + AE ad AC; Hoc est, ut
 “AF + FC ad AC; Hoc est, (demiſſâ perpendiculari CR), ut
 “AB + BR ad RA. Ergo, componendò, Trapez. EG + Triang.
 “ACL ad Triang. ACL, ut 2 AB ad AR; Hoc est, ut 2 Qua-
 “drat. AB ad Quadrat. AC; Hoc est, ut 2 Qu. AK ad Qu. AC;
 “Hoc est, 2 Triang. AKN ad Triang. ACL. Ergo, Trapez. EG
 “+ Triang. ACL = 2 Triang. AKN. Et, ablato utrinque Tri-
 “ang. ACL, manet Triang. AKN + Trapez. CN = Trapez.
 “EG. Et similiter de cæteris. Ergo, figura in Sectore Inscripta +
 “Omn. Trapez. CN, = Figuræ spatio Cissoïdis Inscriptæ. Sed fi-
 “gura in Sectore assumens omnia KND, item Trapezia CN assu-
 “mentia omnia KND, ista inquam omnia simul sumpta superant
 “Sectorem AKB + spat. CTBK. Ergo, figura in Sectore +
 “trapeziis CN (hoc est, figura in Cissoïde,) assumens spatium Ω ,
 “longe superabit Sectorem AKB + spat. CTBK. Sed ipsum Cissoï-
 “dis spatium AVPEFB + Ω æquatur ex hypotheli Sectori
 “AKB + spat. CTBK. Ergo figura in Cissoïde ipso Cissoïdis
 “spatio major erit. Quod est absurdum.

“Dicatur jam Spatium idem AVPEFB, majus Sectore AKB + spat. CTBK. Sicque excessus Ω . Et circumſcribatur Sectori
 “figura, ut omnia KND bis sumpta sint minora excessu Ω . Et
 “Cissoïdis spatio, figura ex totidem Trapeziis; (nisi quòd, pro ultimo
 “Trapezio, habeatur in Cissoïde Triangulum AHB = Triang.
 “AHB in Sectore.) Ostendetur, ut supra; Trapez. PQFG =
 “Triang. ADN + Trapez. LD. Ergo, tota figura circumſcripta
 “Cissoïdi, æqualis circumſcriptæ Sectori + omnibus Trapeziis LD.
 “Sed ab his si demantur bis omnia Trilinea KDN, residuum minus
 “erit quàm Sector AKB + spat. CTBK. (Nam primum auſe-
 “rendo omnia KDN, à figurâ circumſcriptâ Sectori, relinquitur
 “Sectore

Fig. 336.
331.

“Sector AKB: At eadem KDN auferendo à Trapeziis LD, residua
 “omnia simul minora sunt spatio CTBK: Quin additis rursus spatiis
 “LIC, omnia simul æquantur demum spatio CTBK.) Ergo,
 “Si ab his ipsis, à figurâ nimirum circa Sectorem $\frac{1}{2}$ Trapeziis LD;
 “Hoc est, à figurâ Spatio Cissoïdis circumscriptâ; Auferatur Ω : Re-
 “liquum multò minus erit Sectore AKB + spat. CTBK. Sed
 “spatium ipsum Cissoïdis dempto Ω æquale dicebatur his ipsis. Ergo
 “Cissoïdis spatium majus erit figurâ sibi circumscriptâ. Quod est ab-
 “surdum.

“Hoc itaque demonstrato, Quòd Spat. AVPEFB = 3 Segm.
 “CBT + Triang. ACB: facillè ostendetur, Quòd Spatium infi-
 “nitum AVPEYFB = 3 Semicirc. ACB.

“Item, Quòd Spatium AVPEB = 3 Segment. CBT.

Atque hæcenus Demonstratio D. Hugeni. Aliam se dicit ad
 D. Stussum olim misisse, (quam non vidi,) sed cui hanc præfert.

Idem aliter.

Huic D. Hugeni demonstrationi, libet etiam meam subungere, (Hu-
 geniana consulto accommodatam,) ad eandem fere formam quâ supra
 in Cycloide usus sum; retentis item eisdem Symbolis. Nempe;
 Fig. 169, Intelligatur (ut, in Cycloide, §. C, H. prop. 20. & alibi,) Semi-
 174, circuli Genitoris peripheria AD α , in punctis X, B, D, &c. in partes
 332. quotlibet æquales dividi; putà, XB, BD, vel XBD, &c. Quibus re-
 spondeant Sectores X α B, B α D, vel X α D, &c. semicirculum com-
 plentes: Seu (quod in partibus infinitè exiguis tantundem valet)
 Triangula figuram Inscriptam complementia, quorum unum sit B α P;
 vel complementia figuram Circumscriptam, quorum unum sit B α Y;
 vel denique (quod hic potissimum sequemur) complementia figuram
 partim inscriptam partim circumscriptam, quorum unum sit P α Y.
 Quibus respondeant Triangula (situ contrario) ad Circulum, BAP,
 BAY, PAV; ad Cissoïdem, bAp, bAy, pAy; ad Tangen-
 tem, β A π , β Av, π Av; & (Triangulorum ad Cissoïdem, & ad
 Tangentem, differentiarum) Trapezia b β π p, b β vy, pvy. Quæ
 quidem (figuras partim inscriptas partim circumscriptas spectantia)
 P α Y, PAY, pAy, π Av, pvy, representent axes sui α B, AB,
 Ab, A β , b β . Quamquam enim, in sectione definitâ, major sit BY
 quàm BP, adeoque by quàm bp, & bv quàm β π ; neque rectæ
 AX, α D, in eodem Y puncto præcisè coeant; aut rectæ α X, AD,
 in eodem præcisè puncto P: sectione tamen in infinitum continuatâ,
 differentiarum illarum evanescunt; adeoque hinc pro nullis habendæ, ipsaque
 recta

PROP. II. *Epilogus, ex Miscellaneis.* 757

recta $PB = BX$ arcui, & $BY = BD$, & $PBY = XBD$. Ut, ex
suprà traditis de Cycloide, liquet.

His ita constructis; Ponamus Triangulorum PaY , PAY , (seu aB ,
 AB), basin $PBY = B$; Adeoque (propter hujus altitudinem
 $AV = v$), erit Triangulum PaY , seu AB , $= \frac{1}{2}vB$. Sed, (propter
similia trianguia) ut recta AB , ad Ab , & ad $A\beta$; hoc est, ut $AV = v$,
ad $A\Sigma = aV = k$, & ad $A\alpha = 2R$; sic est $PY = B$, ad $\frac{hB}{v} = Py$,

& ad $\frac{2RB}{v} = \pi v$. Adeoque (propter altitudinem, illic $A\Sigma = k$,

hic $A\alpha = 2R$), erit Triangulum Apy , seu Ab , $= \frac{h^2B}{2v}$; &

$A\pi v$, seu $A\beta$, $= \frac{4R^2B}{2v}$; & (horum differentia) Trapezium $pyv\pi$,

seu $b\beta$, $= \frac{4R^2 - h^2}{2v}B$; hoc est (propter $h = 2R - v$, adeoque $h^2 =$

$4R^2 - 4vR + v^2$, & $4R^2 - h^2 = 4vR - v^2$), $\frac{4R - v}{2}B$. Et sic
ubique.

Urgitur, Omnia AB Trianguia, hoc est *Omn.* $\frac{1}{2}vB$, (sumptis
arcubus a arithmetice proportionalibus usque ad a maximum seu
arcum AB , quorum communis differentia B), complementia vel totum
Semicirculum ADa , vel illius Segmentum ABA , vel Sectorem BAa ;
ad Omnia $pyv\pi$, hoc est *Omn.* $\frac{4R - v}{2}B$, complementia vel totum
spatium Cissoïdale interminatum $QbbAa\tau$, vel ipsius partem (item
interminatam) $b\beta\tau Q$ arcum AB spectantem, vel partem reliquam
 $Abb\beta a$ arcum BA spectantem, (nam de toto & de partibus perinde
valet demonstratio;) vel (propter omnes $\frac{1}{2}B$ invicem æquales) ut
Omn. v , ad *Omn.* $4R - v$, eò spectantia; sic spatia illa *Circularia*,
ad respectiva *Cissoïdalia*.

Sunt autem (sumptis, ut dictum est, a arithmetice proportionalibus)
Omn. v arcum AB spectantes, (hoc est, AbK fig. 170.) $= eR$
(per § B. prop. 17.) & *Omn.* $4R - v = 4aR$. Adeoque Segmentum
 ABA , ad correspondens spatium Cissoïdale $b\beta\tau Q$, ut eR ad $4aR$
 $= eR$, hoc est, ut e ad $4a - e$, vel (propter $e = a - s$) ut $a - s$ ad $(4a$
 $- a - s =) 3a + s$. Est autem Segmentum ABA , $= \frac{1}{2}eR = \frac{1}{2}aR$
 $- \frac{1}{2}sR$ (per § G. prop. 16.) Ergo, Spatium Cissoïdale $b\beta\tau Q$,
 $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$. Et, additis Triangulis, illic aBA , hic $aB\beta$, (invi-

cent

cem æqualibus, propter æquales bases $AB, b\beta$, & altitudinem eandem, quorum utrumvis $= sR$; fiet Sector $B\alpha A = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, & Spatium Cissoidale $\alpha b Q\tau = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, Sectoris Triplum.

Similiter; Omnes v arcum $B\alpha$ spectantes, (hoc est $Kb\tau$ fig. 170.) $= \frac{1}{2}PR - eR = \frac{1}{2}PR - aR + sR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ (per § B. prop. 17.) & Omnes $4R = 4aR$. Adeoque Sector $B\alpha A$, ad correspondens Spatium Cissoidale $Abb\beta\alpha$, ut $aR + sR$ ad $(4aR - aR - sR =) 3aR - sR$, hoc est, ut $a - \frac{1}{2}s$ ad $3a - \frac{1}{2}s$. Est autem Sector $B\alpha A = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale $Abb\beta\alpha = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$. Et, sublati æqualibus Triangulis, (illic $\alpha B A$, hic $\alpha b\beta$), $= sR$; fiet Segmentum $\alpha B\alpha = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, & spatium Cissoidale $\alpha b b A = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$, segmenti Triplum.

Totum autem, quod $AD\alpha$ semicirculum spectat, Spatium Cissoidale $Abb\beta Q\tau\alpha$, utrovis modo consequemur, propter evanescentia Triangula $\alpha B A, \alpha b\beta$, seu $sR = 0$.

Eadem non multo aliter consequemur, ope Triangulorum $P\alpha Y$. Nam, ut (Omnia Triangula $P\alpha Y$ arcum AB spectantia, hoc est) Omnia $\frac{1}{2}hB$, ad (omnia respectiva Trapezia $pyv\pi$, hoc est) Omnia $\frac{4R-v}{2}B$; seu ut *Omn. h.* ad *Omn. h.* $(4R-v) = 2R - \frac{1}{2}h$; sic Sector (quem illa complent Triangula) $B\alpha A$, ad Spatium (quod ea complent Trapezia) $\beta b Q\tau$. Sunt autem *Omn. h.*, eo spectantia, (hoc est, $Abb\beta\alpha$ fig. 170.) $aR - \frac{1}{2}sR$ (per § B. prop. 17.) adeoque *Omn. 2R + h* respectiva, $2aR - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = 3aR - \frac{1}{2}sR$. Ergo, ut $aR - \frac{1}{2}sR$ ad $3aR - \frac{1}{2}sR$; seu ut $a - \frac{1}{2}s$ ad $3a - \frac{1}{2}s$; sic Sector $B\alpha A = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) ad Spatium $\beta b Q\tau = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$. Si huic itaque addatur Triangulum $\beta b\alpha = \alpha B A = sR$; fiet totum spatium $\alpha b Q\tau = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, Triplum Sectoris $B\alpha A$.

Item, ut *Omn. (Triang. P\alpha Y, seu) \frac{1}{2}hB* arcum $B\alpha$ spectantia, ad *Omn. (Trapez. pyv\pi, seu) \frac{4R-v}{2}B* respectiva; seu *Omn. h* ad *Omn. h* $(4R-v) = 2R - \frac{1}{2}h$ eò spectantia; sic Segmentum (quod illa complent) $\alpha B\alpha$, ad Spatium (quod hæc complent) $\beta b b A\alpha$. Sunt autem *Omn. h* arcum $B\alpha$ spectantes (hoc est, $b\beta\tau$ fig. 170.) $aR - sR$ (per § B. prop. 17.) adeoque *Omn. 2R + h* respectiva, $3aR - sR$. Ergo, ut $aR - sR$ ad $3aR - sR$; seu ut $a - s$ ad $3a - s$; sic Segmentum $\alpha B\alpha = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ (per § G. prop. 15.) ad Spatium $\beta b b A\alpha = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$. Unde si auferatur Triangulum $\beta b\alpha = \alpha B A = sR$; relinquitur Spatium $\alpha b b A = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$; Triplum Segmenti $\alpha B\alpha$.

Hinc

Hinc facilis esset ad Momenta, & Centra gravitatis (ubi habentur,) Solidâque conversione facta, & horum item (ubi habentur) Centra Gravitatis, transitus; per methodos suprà sæpius adhibitas.

PROP. III.

Inflatâ Vesicâ pondus elevare.

Experimentum hoc primùm vidi *Oxonia* institutum Anno (si rectè memini) 1651. (saltem non anno integro seriùs citiùsve) in Conventu studiosorum qui tunc temporis ibidem convenire solebamus stato die singulis septimanis, ad studia communicanda, instituenda experimenta, & rem philosophicam promovendam. Verùm non tum primùm inventum erat, sed (ut res jam ante cognita) repetitum. Idemque post id tempus in Societate Regiâ *Londini* repetitum fuit. Sic autem instituitur.

Sit B vesica; cujus cervix N pegmati seu fulcro alicui firmo figatur; Fig. 333. ita tamen ut per calamum seu fistulam Q inflari possit: fundoque affigatur pondus P. Experimento compertum est, flatu spiritûs humani, inflatâ vesicâ, adeoque lateribus distentis & longitudine contractâ, pondus librarum 50, 60, 70, aut etiam plurium (pro viribus pulmonum flantis) notabiliter elevari posse.

Id autem ne incredibile videatur; considerandum primò erit; vim spiritus humani, præsertim ubi summo nisu intenditur, non ita exiguum esse ut quis primâ vice existimet. Quod manifestum erit si consideremus, ad quantam distantiam, & quàm celeri fortique motu, globulus argillaceus flando expelli soleat ex Tubo oblongo, quali in occidentis avibus utuntur, etiam ad distantiam non exiguum.

Considerandum porro erit, (quod hic præsertim spectamus,) quàm accommodè ad motum hunc præstandum adhibetur vis illa; quippe non nisi magnâ spiritûs inflantis copîâ in vesicam immisâ pondus ad exiguum altitudinem elevatur.

In hunc finem consideranda erit Vesica Bubula, utut irregularis sit figurâ, ad Sphæroidem tamen proximè accedens, Ellipseos M N O P circa longiorem Axem N P conversione factam; cujus quidem Ellipseos Perimeter si eadem intelligatur vel sibi semper æqualis, Ellipseos Species continuè mutabitur prout vesica plus inflatur; auctâ solidâ capacitate, propter auctum axem brevior M O, dum longior N P

Eccce

contra-

contrahitur; sphæroide factâ latiore, sed breviorē, atque ad sphæram magis accedente. Quod cum fieri non possit retractâ cervice, ut quæ intelligitur stabili fulcro firmiter alligari, fit elevato Pondere; Cujus elevatio itaque tanta erit quanta est longitudinis NP contractionis.

Fig. 334. Hanc autem longitudinis contractionem, adeoque elevationem ponderis, quò aliquatenus æstimemus; sepositâ aliquantisper Ellipsi, substituamus Rhombum MNO P; adeoque, pro Sphæroide, Rhombum Solidum; intellige, Solidum conversione Rhombi circa longiorem axem NP factum; adeoque ex duobus conis similibus & æqualibus compositum, quorum communis basis sit MO circulus; & vertex N, P. Non quod hæc figura propius ad Vesicæ formam accedat; sed quòd ad calculum sit accommodatior, nec ita ab vesicæ formâ recedat quin præsentī negotio satis sit accommoda; non enim propter peculiarem vesicæ formam res ita miranda videtur, sed propter pondus tantum tantillâ vi elevatum.

Rectam NP (Rhombi diagonalem longiorem) appello *Solidi Altitudinem*: quæ quoniam pro variâ positione varia est, positionem primam eam suppono quâ, nullâ adhuc inflatione factâ, lineæ NMP, NOP, in rectas extenduntur, adeoque cum NP rectâ coincidunt; quo casu NP recta æqualis erit duobus Rhombi lateribus; puta NO, OP, vel NM, MP. Distantiamque punctorum N, P, in hac positione primâ appello *Primam Altitudinem*.

Calamus seu Fistula Q (per quam fit inflatio) intelligatur Cylindricè excavari, Cavique diameter ponatur, verbigratia, $\frac{1}{10}$ (pars Centesima) Primæ Altitudinis.

Vim Flatus (quò aer in vesicam impellitur) quasi æqualem reputo vi Musculorum pectus comprimentium, adeoque aerem ex pectore in vesicam impellentium. Utur enim Flatus humanus in libero aere inbellis videatur, eò quòd quam primum spiritus ex ore in aerem transeat undiquaque expandatur: quum tamen per fistulam impellitur, ejus lateribus cohibetur ne diffuset, vis ejus in fistulam eadem quasi est quâ ex Pectore detrudebatur. Dico tamen quasi eadem potius quam eadem præcisè; quoniam non negaverim quin virium aliquid pectus comprimentium impendi potuerit in comprimendo expulso aere, reliquumque tantum in expellendo.

Vim Flatus hanc (sive major fuerit sive minor) ponamus æquipollentem pressui ponderis in S (eavi Summo) incumbētis, subiectum aerem in Fistulæ spatiis 1, 2, 3, 4, &c. deprimentis, adeoque impellentis in Vesicam; unde Vesicæ lateribus distētis, capacitas augetur,

pro

pro ratione ingesti aeris; seu pro ratione descensus ponderis S. Nam dum pondus S per spatia 1, 2, 3, 4, &c. descendit (quæ sunt in Cylindro altitudinibus proportionalia) tantundem aeris in vesicam intruditur quantum illis spatiis continebatur, atque tantundem augetur vesicæ capacitas.

Quoniam verò negandum non est, quin aer, propter elaterem quem habet, compressionis capax sit; adeoque vesicæ extensio minor aliquantò sit quam spatium quod S descendens occupat, (virium parte aliquà in comprimendo aere impensâ, reliquâque tantum in extendendâ vesicâ:) Descensum ponderis S, utut reverà aliquantò major sit, tantum jam reputabimus quanta est illa Vesicæ extensio; hoc est, quantum oporteret descendere propter illam extensionem si aer non esset capax compressionis. Quod tamen facio potius ne sit objectioni color aliquis, quam quòd sit præsentis instituto necessarium. Nam (præterquam quod Calculo summè exquisito hic opus non sit,) quicquid id sit, non tam Quantitatem spectat quam Celeritatem ascensus ponderis P.

His ita Calculo præstructis, Altitudinem Primam NP, hoc est NM + MP in quolibet Rhombo, ponamus = n ; adeoque NM = $\frac{1}{2}n$. Item NP pro particulari aliquo Rhombo, = a ; adeoque NR = $\frac{1}{2}a$. Erit itaque in Rhombo illo MR = $\sqrt{NM^2 - NR^2}$ = $\sqrt{\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{4}a^2}$ = $\frac{1}{2}\sqrt{n^2 - a^2}$. Adeoque MO = $\sqrt{n^2 - a^2}$: cuius quadratum MO² = $n^2 - a^2$ in NR = $\frac{1}{2}a$ ductum, exhibet $\frac{1}{2}n^2a - \frac{1}{2}a^3$ æquale Parallelepipedo circumscripto Cono NMO; hujusque duplum $n^2a - a^3$ æquale Parallelepipedo quod toti solido Rhombo MNOP circumscribatur; Cui parallelepipedo si intelligatur Cylindrus inscribi, erit hic Triplus Rhombi solidi.

Intelligentur porro, Cylindri QN spatia 1, 2, 3, 4, &c. totidem esse Cylindros æque altos & super æquales bases: Et ponamus Basis diametrum QT = n = $\frac{1}{100}n$; atque altitudinem item TV = n , quæ in diametri basis quadratum ducta, exhibet n^3 æqualem Parallelepipedo circumscripto Cylindro QV.

Est autem, ut Parallelepipedum ad Parallelepipedum, sic inscriptus Cylindrus ad inscriptum Cylindrum (propter æquales altitudines & bases proportionales:) Estq; (per prius posita) Cylindrus QV æqualis solido Rhombo qui fit descensu ponderis S per spatium QV; hoc est, æqualis trienti Cylindri huic Rhombo circumscripti: Ideoq; & Parallelepipedum circumscriptum Cylindro illi, æquale trienti Parallelepipedum circumscriptum Cylindro QV est n^3 ; & Parallelepipedum circumscriptum

Eeeee 2

Fig. 335.

cumscriptum respectivo Rhombo solido MNO P; $n^2a - a^3$; cum itaque illud sit hujus trienti æquale, erit $u^3 = \frac{1}{3}n^2a - \frac{1}{3}a^3$; adeoque $3n^3 = n^2a - a^3$. Quæ quidem Æquatio respondet solido Rhombo facto ex descensu ponderis S per primum spatiorum 1, 2, 3, &c.

Et, consequenter; (cùm, propter illa spatia æqualia, æqualia etiam sint Rhomborum solidorum respectiva incrementa,) $6u^3 = n^2a - a^3$ respondebit descensui per spatia duo; $9u^3 = n^2a - a^3$ descensui per tria; & sic de cæteris. Hoc est, (posito $n = 100$ & $u = 1$)

Dum S descendit per spatia	1	Æquationes respectivæ erunt $n^2a - a^3 =$	3 n^3	Vel, 10000 $a - a^3 =$	3.
	2		6 n^3		6.
	3		9 n^3		9.
	4		12 n^3		12.
	5		15 n^3		15.
	6		18 n^3		18.
	7		21 n^3		21.
	8		24 n^3		24.
	&c.		&c.		&c.

Quibus æquationibus resolutis; propter cognitæ quantitates n , u , reperietur quantitas a ; hoc est, respectiva altitudo NP pro quolibet Rhombo: Et consequenter, quantum ea deficit ab altitudine primâ; hoc est, quantum ascenderit interea pondus P supra primam ejus positionem.

Æquationes illæ sic resolutæ exhibebunt nobis subjectam Tabellam: In quâ Columna S numerat spatia per quæ descendisse supponitur vis seu pondus S. A exhibet respectivas æquationes his spatiis respondentes. A, respectivas altitudines NP pro illis descensibus. P, harum complementa ad altitudinem primam 100; hoc est, mensuram ascensuum ponderis P, descensibus illis respondentium. D, differentias complementorum continuè consequentium; hoc est, quantum ascenderit P propter descensum S per singula spatia 1, 2, 3, &c. respectiva. Nempe,

Dum

Dum S descendit per spatia		Aequationes correspondentes sunt, $10000 A - 3 =$		Adeoque respectiva altitudines, $NP = A =$		A		Quarum complementa ad 100 (altit. primam) seu Elevatio ponderis supra positionem primam,		P		Complementorum differentia, seu elevatio P pro singulis spatii,		D	
1	1	1	3	3	99,999,849,999,66	99,999,849,999,66	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34	00,000,150,000,34
2	2	2	6	6	99,999,699,998,6	99,999,699,998,6	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4	00,000,300,001,4
3	3	3	9	9	99,999,549,997,0	99,999,549,997,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0	00,000,450,003,0
4	4	4	12	12	99,999,399,994,6	99,999,399,994,6	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4	00,000,600,005,4
5	5	5	15	15	99,999,249,991,6	99,999,249,991,6	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4	00,000,750,008,4
6	6	6	18	18	99,999,099,987,9	99,999,099,987,9	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1	00,000,900,012,1
7	7	7	21	21	99,998,949,983,4	99,998,949,983,4	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6	00,001,050,016,6
8	8	8	24	24	99,998,799,978,3	99,998,799,978,3	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7	00,001,200,021,7
9	9	9	27	27	99,998,649,972,6	99,998,649,972,6	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4	00,001,350,027,4
10	10	10	30	30	99,998,499,966,2	99,998,499,966,2	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8	00,001,500,033,8
11	11	11	33	33	99,998,349,959,2	99,998,349,959,2	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8	00,001,650,040,8
12	12	12	36	36	99,998,199,951,3	99,998,199,951,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3	00,001,800,049,3
13	13	13	39	39	99,998,049,943,3	99,998,049,943,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3	00,001,950,057,3
14	14	14	42	42	99,997,899,933,3	99,997,899,933,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3	00,002,100,067,3
15	15	15	45	45	99,997,749,923,3	99,997,749,923,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3	00,002,250,077,3
16	16	16	48	48	99,997,599,913,3	99,997,599,913,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3	00,002,400,087,3
17	17	17	51	51	99,997,449,902,3	99,997,449,902,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3	00,002,550,098,3
18	18	18	54	54	99,997,299,890,3	99,997,299,890,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3	00,002,700,110,3
19	19	19	57	57	99,997,149,878,3	99,997,149,878,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3	00,002,850,122,3
20	20	20	60	60	99,996,999,865,3	99,996,999,865,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3	00,003,000,135,3
49	49	49	147	147	99,992,949,25	99,992,949,25	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75	00,007,050,75
50	50	50	150	150	99,992,799,22	99,992,799,22	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78	00,007,200,78
99	99	99	297	297	99,985,146,69	99,985,146,69	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31	00,014,853,31
100	100	100	300	300	99,984,996,62	99,984,996,62	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38	00,015,003,38

Dum S descendit per spatia.				
S	Æ	A	P	D
149	447	99.977,642,503,	00.022,337,497,	00.000,150,101,
150	450	99.977,492,402,	00.022,507,598,	
199	597	99.970,136,624,	00.029,863,376,	00.000,150,135,
200	600	99.969,986,489,	00.030,013,511,	
299	897	99.955,119,789,	00.044,880,211,	00.000,150,200,
300	900	99.954,969,589,	00.045,030,411,	
399	1197	99.940,096,184,	00.059,903,816,	00.000,150,270,
400	1200	99.939,945,914,	00.060,054,086,	
499	1497	99.925,065,795,	00.074,934,205,	00.000,150,340,
500	1500	99.924,915,455,	00.075,084,545,	
999	2997	99.849,811,822,	00.150,188,178,	00.000,150,679,
1000	3000	99.849,661,143,	00.150,338,857,	
4999	14997	99.241,542,959,	00.758,457,041,	00.000,153,479,
5000	15000	99.241,389,480,	00.758,610,520,	
9999	29997	98.464,986,865,	01.535,013,135,	00.000,157,183,
10000	30000	98.464,828,682,	01.535,170,318,	
13595	40785	97.894,734,322,786,6	02.105,265,607,213,4	00.000,159,999,231,3
13596	40788	97.894,574,393,555,3	02.105,425,606,444,7	00.000,160,000,033,4
13597	40791	97.894,414,393,521,9	02.105,585,606,478,1	

Complementorum differentia, seu elevato P pro singulis spatia,

Compl. ad 100. seu Elevat. Pond. supra Alt. primam.

Adeoque respective altitudines, NP = a =

Aequationes correspondentes sunt, 10000 - a =

PROP. III. *Epilogus, ex Miscellaneis.* 765

Patet ex hac Tabellâ, dum S per Spatium 1 descendit, vix plus affurgere P quam $\frac{0.000,15}{1.000,00}$ istius altitudinis, (nempe tantillo plus, ut in decimalium fractionum loco inferius quarto ne quidem 1 habeatur, quod hic merito negligi poterit.) Adeoque, cum Descensus S sit ad Ascensum P, ut 100000 ad 15; si pondus seu vis flatûs S sit ad P pondus elevandum saltem ut 15 ad 100000, (hoc est, ut 3 ad 20000,) Vis Ponderi æquipollebit; si major, præpollebit, adeoque elevabit, saltem tantundem quantum Descensui S per spatium 1 respondeat.

Sed & illa proportio tam parum variatur pro spatiis subsequenter aliquam multis, ut donec S descendisse intelligatur ultra spatia 13596 (hoc est, donec per fistulam ingestum sit in velicam tantum aeris quantum impleat plusquam 13596 spatia ipsi QV æqualia) non opus erit tantâ vi in S quæ sit $\frac{0.00016}{1.00000}$ ponderis P, seu quæ sit ad P ut 16 ad 100000, hoc est, ut 1 ad 6250. Adeoque, si Vis Flatûs S sit ad pondus P saltem ut 16 ad 100000, seu 1 ad 6250: elevabitur P saltem tantundem quantum Descensui S per spatia 13596 respondebit; hoc est (ut ex Tabellâ liquet) plusquam $\frac{2.1}{100.0}$ altitudinis primæ.

Cum itaque non incongruum sit ut Vis Flatûs humani accedat saltem ad $\frac{16}{100000}$ seu $\frac{1}{6250}$ Ponderis satis magni; non mirum videri debet, ut Flatu hoc Pondus illud attollatur; & quidem, ultra $\frac{2.1}{1000}$ altitudinis primæ, vel (paulò rotundius) plusquam est $\frac{1}{50}$ (pars quinquagesima) semiperimetri NM — MP, quæ satis est notabilis. Quod ostendendum erat.

Patet hinc etiam, si ponamus vel S augeri vel P diminui, adhuc altius elevatum iri P, eâdem velicâ manente, eodémque fistulæ cavo.

Patet etiam, pro diminuto foramine fistulæ seu diametro ejus QT, diminui etiam proportionem S ad P necessariam ad pondus elevandum: Et quidem, si Mathematicè solummodo res consideretur, ad proportionem quantumvis exiguam, seu ut datum pondus datâ vi sic moveatur; Verum, si ad praxin Physicam deveniatur, non expectandum est ut res succedat; quoniam Aer per foramen valde exiguum non potest nisi magnâ vi protrudi etiam si non contrâ urgeret pondus P; sed neque ad exiguum istiusmodi foramen potest quis ita se accommodare ut totam flatûs potentiam eò excreat. Est itaque mediocris quædam foraminis

foraminis magnitudo necessaria ad praxin hanc efficacius exercendam; quæ, cum ex physicis circumstantiis dependeat, experimento potius quam demonstratione determinabitur. Sin Mathematicè tantum rem spectemus, (seclulis huiusmodi circumstantiis;) auctio vel diminutio diametri foraminis, contrariâ vice minuit augètque vim flatûs, in duplicatâ ratione istius auctiois-vel diminutionis diametri. Quod ex præmissis facile probaretur, si res tanti esset.

Facile item ostensu est, Ad quantam altitudinem (pro dato foramine) data vis flatûs datum pondus elevare posset: Et, vice versâ, quanta vis (pro dato foramine) requiratur ut datum pondus ad datam altitudinem (possibilem) elevetur: Sed &, datis altitudine (possibili,) vi flatûs, & pondere, quantillum foramen esse debeat.

Dico, *altitudinem Possibilem*: quoniam non ad quantamvis altitudinem hæc fiet; sed saltem ubi, ad maximam vasis capacitatem perventum est (ut alias omitam circumstantias Physicas) non ultra flando extendetur. Ea autem est (datâ perimetro MNOP) in Rhombo solido (quo hætenus uti sumus) quando quadratum lateris NM, æquat tria quadrata semialtitudinis NR, (hoc est $NM^2 = 3NR^2$, vel $\frac{1}{3}N^2 = \frac{1}{3}A^2$;) in Sphæroide verò (cui propius accedit vesica) ubi ex Sphæroide fit Sphæra, factâ peripheriâ transversâ MO æquali perimetro expositæ MNOP.

Verum quoniam hæc à præsentē proposito aliena sunt, demonstrationes horum omitto; quas tamen fusiùs olim, in scripto in Societate Regiâ Londini exhibito, Martii die 4. 1662. exposui.

Sed redibimus tandem à Rhombo solido ad Sphæroidem. Quamquam Sphæroides sit figura minùs ad calculum accommodata: Cum tamen constet, Ellipsin Rhombo (si ritè comparentur) capaciorē esse; adeoque & Sphæroidem Rhombo solido; non dubitandum est quin, quod de Rhombo solido ostendimus, de Sphæroide abundantius constet. Cum enim, positis utriusque figuræ perimetris MNOP æqualibus, maior sit Sphæroidis Sphæraque capacitas quam Rhombi in respectivis positionibus; adeoque, quo extendantur, plus Aeris illic quàm hic ingerendum, quod majori descensui S æquipollet; contrâ verò major sit hic quàm illic altitudinis contractio, adeoque ascensus P; (quæ ex figurarum naturâ satis constant:) Erit, propter majorem descensûs ad ascensum rationem in Sphæroide (adeoque in Vesicâ) quàm in Rhombo rationem, faciliior quidem (utut tardior & ad minorem altitudinem) Ponderis per Vesicam quàm per Rhombum elevatio. Adeoque abundantius constat propositum. Siquis verò existimet, in inflatâ Vesicâ, non modò ambitum transversum MO, sed & erectum MNOP,

PROP. IV. *Epilogus, ex Miscellaneis.* 767

MNOP, augeri: Utut ego contrarium potiùs putem, contrahique non tantum altitudinem NP sed & ambitum MNOP ob distentum ambitum NO; illud tamen si concedatur, non officit jam positis, sed prodest potiùs: nam & sic augebitur Vesicæ capacitas, ascensus P minuetur, adeoque facilitabitur, propter minorem altitudinis NP contractionem, dummodo tamen contractio fiat. Unde fortiùs adhuc confirmatur propositum; ne mirum sit, (quod experimento comperimus,) inflatâ Vesicâ sat grave Ponderus elevari.

PROP. IV.

Solvuntur aliquot aliæ Quæstiones Mechanicæ:

Multa alia sunt ad rem Staticam & doctrinam de Motu spectantia, quæ vel Capitibus superioribus interferi possent, vel pluribus adhuc capitibus materiam suppeditare, nisi quod operis moles jam nimium excreverit. Sed ea ex suprâ traditis pleraque non difficulter elici possunt ad rem præsentem ritè accommodatis. Nonnulla tamen hic strictim attingam; quæ utut res ludicræ non nemini forsitan videri possint, seriam tamen in staticis causam habent.

Verbi gratiâ. Si quærat, Cur, qui ad erectum murum stat erectus, dorso & utrisque calcibus murum attingens, non potest, nisi promotò pedum altero, nunquam humi jacentem prorsum incurvatus tollere, quin præcipitabitur: Ratio petenda à situ Centri gravitatis. Quippe, cum fulcrum corporis sit in pedibus, qui cadere non volet hoc curare debet ut totius Corporis Centrum gravitatis pedibus emineat, saltem non extra eorum extrema hac vel illac ulterius deflectat quam ut musculorum & tendinum vires sic positum sustinere valeant & revocare. Hinc, qui erectus stat, stat firmus, utpote qui totam corporis molem habet pedibus supereminentem. Qui verò quid humo tollere velit, dum demissum Caput protendit antrosum, Nates retrorsum tendit, quò fiat æquilibrium, centrûmque totius pedibus seu fulcro supereminet, saltem extra pedum ambitum vel non omnino vel tantillum deflectat. Qui autem propter murum à tergo hoc non possit, dum (quò quid humo tollat) protendit Caput non retractis Natibus, præcipitatur, (propter totius Centrum positum extra fulcrum seu fulcrorum extremum ambitum, & quidem magis quàm ut valeant tendines id oneris ferre iterumque sublevare;) saltem, nisi vertebrarum tendines, musculique eò spectantes, admodum robusti fuerint.

ffff

Hinc

Hinc item est, quòd *Alii* fortius, alii mollius terram ambulando feriant, adeoque sonitum majorem minoremque sonoro pavimento incedentes edant. Nempe, duo sunt incedendi modi, utut pauci id animadvertant. Quippe, Alii, dum pedem promovendum attollunt, corporis centrum gravitatis à reliqui pedis perpendicularo non prius amoveant quàm pes promotus terram iterum attingat: (Atque hoc *Chorodidascali* seu *Saltatorie artis Magistri*, si rem suam intelligant, inprimis curare debent discipulis insinuandum, quò saltem uni pedi insistens corpus agile in omnem partem prout opus erit convertere paratus sit:) Alii vero festinantiores, dum pedem promovent, promovent simul & Centrum gravitatis, quod itaque, relicto priore fulcro, procidere statim incipit, donec pes promotus terram iterum attingens casurum sustineat; (apud quos itaque Incessus est quasi Casus & Sustentatio se mutuo continuè excipientes:) Hi itaque, propterea procidentem corporis molèm pondusque, fortius terram feriant & cum majori sonitu, quam qui (sustento à pede altero totius Centro gravitatis & onere) pedem promotum mollius demittunt; & quò præcipitan- tius Centrum gravitatis sic promovent, eò fortius solum feriunt.

Hinc item reddenda est ratio cur *Alii aliis sapius titubent, & titubant cadant*: Nempe, postquam relicto priori fulcro Centrum promovetur, promotus pedis mox statuminando confidens, si pes promotus vacillet aut infida terra se committat aut expectato fulcro destituitur, decidit corpus, saltem casui proximum est; pariterque si inexpectato pes impingat, ut non possit sat citò eatenus promoveri ut valeat cadenti corpori maturè ferre suppetias. Qui verò perstantis pedis fulcrum non prius deserunt quàm pes promotus iterum firmetur, minùs sunt his periculis obnoxii: Adeoque, qui incedunt erecti, minùs quàm qui prono Capite.

Hinc porro est (quod Funambulos maximè spectat) quòd *Qui Dextrorsum casuri sint, protendant brachium Sinistrum; qui Sinistrorsum, Dextrum; qui Retrorsum, alterum vel utrumque Porrigant; qui Prorsum, Retrahant*. Nam qui Dextrorsum casurus (ob corporis centrum dextrorsum propendens) Sinistram protendit, sinistra gravitationem auget (utpote remotius à fulcri perpendicularo posita) adeoque commune totius Centrum gravitatis sinistrorsum retrahit, quò vel non omnino vel minùs ad dextram propendear, & casum molliatur. Et in cæteris similiter.

Atque ad idem intenti sunt *Athletæ coluctantes*. Quippe qui, Antagonistæ corporis variè torquendo, Centrum gravitatis extra fulcrum ambitum longius dimoverit, faciliè illum subvertet.

Hinc

Huc item referenda erit, quod, *Qui promissis brachiis incedunt, dum pedem dextrum promoveant, promoveant sinistram brachium; dum sinistram pedem, brachium dextrum.* Quippe hac alternatione totius Centrum melius retinetur in perpendicularo duobus pedibus seu fulcris intermedio; nequa propendat, totique casum minuetur.

Item (quæ inter *Aristotelis* Quæstiones Mechanicas occurrit) Cur, *Qui sedet, non potest se in rectum erigere, nisi vel protenso Capite, vel Pedibus retractis.* Nempe, qui sedet, (puta, in situ $CNGP$, factis *Fig. 336.* in N & G angulis rectis,) longè majorem corporis partem habet à G versus N positam (nempe totam partem CNG , à Capite ad genua,) adeoque Centrum gravitatis (ejusve perpendicularum) procul à G versus N . Cum itaque stanti futurum sit Fulcrum in Pedibus P , adeoque (manentibus ut prius cruribus GP in situ perpendiculari) revocandum sit totius CNG Centrum ad perpendicularum GP , ut ipsi G supereminet; vix aut ne vix illud fiet nisi supra modum robustos supponamus musculos tendinésque eò spectantes. Erigendus enim est, rotationis Centro G , vectis GN (& ipse gravis,) onere NC in extremo onustus. Si verò retrahantur pedes à P ad π , quò Fulcrum Centro gravitatis subjiciatur, vel protendatur caput à C ad π , quò Centrum gravitatis propius ad P fulcrum Centrumque motus G feratur, aut etiam ipsis imminet; vel partim hoc, partim illud: magno onere liberantur muscoli tendinésque.

Hinc item respondendum quæstioni, (quæ quamvis ridiculè proponi soleat, seriam tamen meretur responsionem,) Cur *Anser horrei ostium intrans utcumque altum, (quod plaustrum demesso tritico onustum admittere possit,) Caput demittat.* Cui ridiculè respondere solent (acutè forsan, ut ipsi cogitant,) Quoniam Anser est, (hoc est, animal simplex & imprudens,) id factum reputantes, quali metuerit anser ne caput superliminari (in tantâ distantia remoto) impingeret. Sed (nisi illud quandoque fiat, quò anser etiam ab ipso statim horrei introitu grana quærat quibus pascatur,) vera causa est, quò ad horrei ostium (sicut ad ostia minora) poni soleat Limen (seu quod liminis instar sit) ab anseris superandum quo horreum ingreditur: Quod ut fiat, pedum antecedente limini superimposito, circa quod itaque ut fulcrum seu motus Centrum rotandum erit corporis totius Centrum gravitatis, rotationem illam faciliat porrecto capite ultra limen, adeoque auctâ ipsius gravitatione, Centrum totius propius ad fulcrum admovet. (Sin dicatur, non semper esse ad ostium horrei quod Liminis instar sit, sive Ascensus; dicendum, nec Anserem semper introeuntem caput demittere.)

F i f f f

Quòdque

Quodque Anser ipsis ridiculus, idem faciunt ipsi, atque ob eandem causam; Nempe, *Dum scalam, gradus, montemve ascendant, caput protendant.* Causa est, quod, hoc facto, facilius fiat circa pedem anteriorem, gradui scandendo impositum, rotatio, (quæ omnino facienda erit ut fiat ascensus,) ob porrectum capitis pondus ultra fulcrum. Saltem, si hoc nondum faciant, ab Anseri discant.

Item, *Cur Bajuli, si onus Humeris seu Tergo gestant, se antrorsum incurvant; si Ulnis, reirorsum: & Ancilla, si aqua sinulam promisso brachio sinistro ferat, dextrorsum se incurvat, (extento etiam brachio dextro;) si dextro, sinistrorsum; si utroque, recta incedit; similiterque si capiti impositam ferat.* Nempe his modis omnibus efficitur, ut Corporis Onerisque commune Centrum gravitatis communi fulcro superemineat, saltem extra fulcrorum ambitum minus recedat.

Vidique ipse non neminem, *Qui cum pondus, manibus latum, antrorsum projecit, cecidit ipse reirorsum.* Nempe; Quod Corporis Ponderisque commune Centrum gravitatis fulcro immineret, Corporis sui Centrum gravitatis nonnihil retro motum erat; quod itaque ipsum post separatam quod manibus gestaverat pondus, ita retraxit, ut antequam se in debitum situm restituere posset, retro ceciderit.

Aliæque multa, quæ à mutato totius Centro gravitatis ob mutatum situm dependent, (quorum exempla innumera, ne longè abeamus, animalium incessus aliique motus suppeditabunt,) solutionem ex eodem fonte sortientur.

Et quidem, de motibus purè Staticis (quæ à solâ Gravitate dependent) vel efficiendis vel non efficiendis, iudicium fiet ex illo generali principio (à Torricellio aliisque passim adhibito;) *Si, effecto motu proposito, Gravis movendi Centrum gravitatis, vel Aggregati ex pluribus conjunctis Commune Centrum, descendendum sit; Motus consequetur: sin minus; non consequetur.* Quod nos Universaliùs effecerimus, (quò ad alios etiam motus res extendatur,) *Si Processus Secundum directionem moventis, (vel aggregati processuum plurium,) Magnitudo (ex Virium gradu, & Altitudine processus, æstimanda,) præpollent Magnitudini (similiter æstimanda) Regressus (regressumve aggregati) Contra moventis directionem; Motus efficietur: Sin minus; non efficietur.* Ut ex prop. 2, 5 6. Cap. 2. liquet. In motibus autem facilitandis, seu minori Vi perficiendis, *Pro diminutis Viribus effectricibus, in eadem ratione diminuitur Celeritas, (adeoque Virium defectus Temporis dispendio redimendum:)* per prop. 27, 28, Cap. 1.

Atque

PROP. IV. Epilogus, ex Miscellaneis. 771

Atque hæc Principia, ad Quæstiones Mechanicas innumeras live apud *Aristotelem* live alios occurrentes, live in communi vitâ humanâ passim obvias, solvendas, facile esset accommodare. Sed, crescente volumine, alicubi tandem sistendum erit, ne nimii simus; totiû operi finis imponendus.

F I N I S.

E M E N D A N D A.

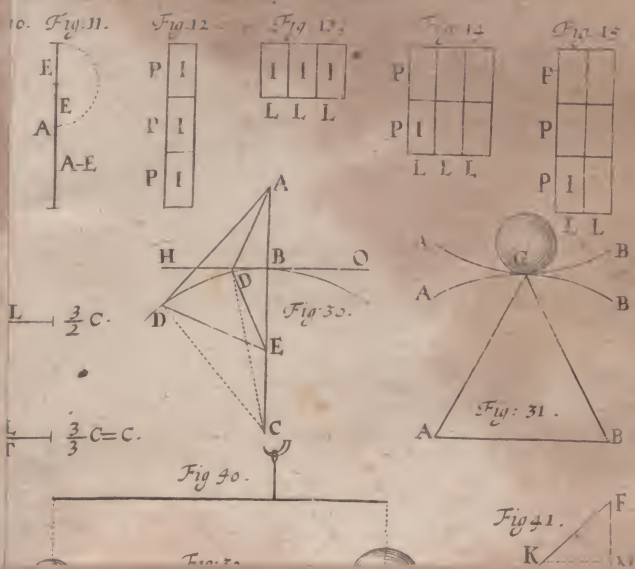
IN Parte Secundâ (post priûs notata) p. 258. l. 26. atque à $\tau\alpha$.
 p. 263. l. 22. $\frac{1}{2}aR^2$. p. 271. l. 2. (bis) $3eR^2P - 3svRP$. p. 275.
 l. 13. quo. p. 297. l. pen. estque. p. 286. l. 11. Atque hinc. l. 19.
 rentur. p. 287. l. 2. Semiperiphæria. l. 5. (ex una parte) $\xi\theta, \zeta\upsilon, \delta\kappa$.
 l. 6. $\alpha\kappa\tau$. l. 16. occurrunt rectæ zV . l. 18. AD, AE. l. 25. $x\xi z$.
 l. 37. rectis XO. l. ult. XIa. p. 288. l. 18. propterea. l. 21. suo
 XO. l. 25. trianguli. p. 290. l. 20. quam bk CA. p. 291. l. 13.
 sinum. p. 294. l. 10. $+\frac{1}{2}as^2 =$. l. 27. (infra) pro R, lege $2R$. p. 296.
 l. ult. dicatur S. p. 308. l. 2. $-\frac{1}{2}v^3R$; Respectu $A\alpha, av^2R - evR^2$; re-
 p. 311. l. 18. respectivas rectas. p. 315. l. ult. $Omn. \frac{1}{4}sR^2$. p. 319.
 l. 4. $\beta\alpha = a$. l. 20. $3R^2P - 6eR^2$. p. 329. l. 1. & 5 hujus. p. 335.
 l. 5. $5asR - ash$. p. 344. l. 20. ut YP. p. 345. l. 33. magnitudi-
 nem. p. 348. l. 13. $\frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R$. l. 20. $h = 2R - v$. p. 352. l. 1.
 Omnes s. p. 354. l. 16. a, seu $\tau\beta = a$. l. 18. $Omn. -\frac{1}{4}sR^2$. p. 355.
 l. 16. dele momentum. l. 27. $Ab\beta\alpha$. l. 30. $Bb\beta\alpha$. p. 359. l. 29
 relinquuntur. p. 361. l. 21. sic expeditis. p. 363. l. 4. super ipsa
 l. 10. marg. O. p. 364. l. 8. Ungulæ $\alpha\delta\kappa$. l. 13. $v = 2R$. p. 367.
 l. 18. marg. H. p. 369. l. 9. $-\frac{1}{3}s^3$; Distantia Centri gravitatis à TA,
 $\frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR - 3sv}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR - 3sv}$; à BV, $v - \frac{1}{2}R +$
 $\frac{s^3}{3eR - 3sv}$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{4}a^2R$. l. 11. $8vK^2$
 $+ 3a^2R$. p. 370. l. 11. comprehensam. p. 374. l. ult. $-\frac{1}{2}fR$. p. 375.
 l. 4. marg. 168, 173, 174. p. 176. l. 3. quod æquale. p. 380. l. 12.
 Trapeziorum illorum. p. 385. l. ult. $\frac{1}{4}a^2R$. p. 386. l. 3. $8vK^2$
 $+ 3a^2R$. p. 392. l. 10. $-\frac{1}{2}v^2R^2$. p. 396. l. à fine 6. Basesque. p. 399.
 l. 8. $\frac{1}{24}fR^3$. p. 404. l. 26. $\frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$. p. 405. l. 17. lis. p. 406.
 l. 28, 31. eorundem. p. 422. l. 25. eisdem rectis. p. 432. l. 3. in-
 ventam. p. 436. l. 30. plam. p. 437. l. 27. distantia sint. p. 438.
 l. 28. exhibita. p. 449. l. 26. = $\xi\delta$ fig. 170. p. 454. l. 5. prop. 6.
 hujus)

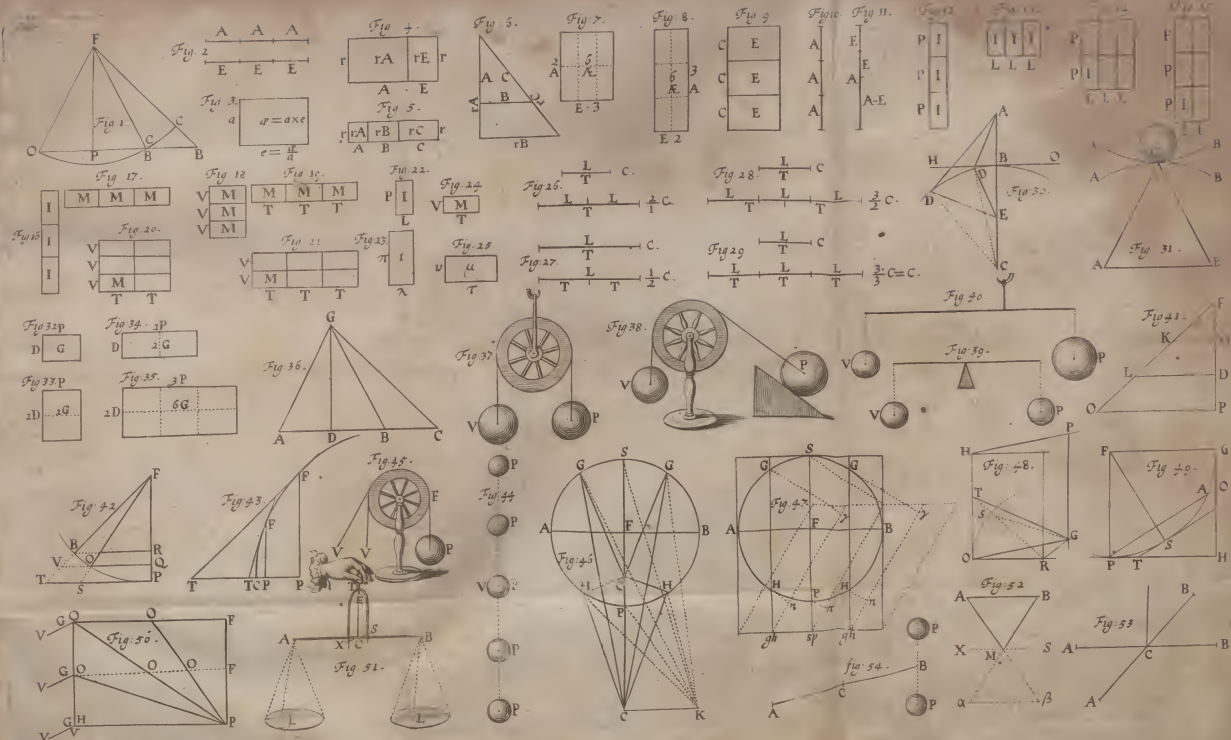
Emendanda.

huius) p. 458. l. 17. ipse b C. p. 466. l. 18. si dentur. p. 483. l. 32.
ad C B. p. 486. l. 6. 7966955. p. 487. l. 10. à fine. = 0.0127154.
p. 504. l. 2. infini- l. 12. discriminis. p. 516. l. 13. Spiralem. p. 520.
l. 24. enim M B. p. 521. l. 5. limiliter. l. 6. dele quæ. p. 522. l. 11.
prius feceram. p. 533. l. 10. componuntur ex. p. 529. l. 20. $\sqrt{\frac{1}{2}AP}$
 $-\frac{1}{2}A^2$: p. 534. l. 2. applicatur. p. 535. l. 1. marg. Fig. 206. p. 537.
l. 27. linibus verlis A V. p. 539. l. 33. semi-quadrantalem. p. 540.
l. 9. semi-quadrantalem. p. 545. marg. l. 15. M. l. 18. N. p. 551.
l. 31. X S & S A. p. 552. l. 7. A O V, H D X. l. 8. A C I, H d x.
p. 556. l. 24. Genitricis, aut hyperbolam hanc ubivis tangat. p. 558.
l. 9. transiturum. p. 560. l. 28. $\frac{b^2L - n^2T}{b^2 - n^2}$. p. 561. l. 5. $\frac{b^2L - n^2T}{n^2 - b^2}$.
p. 564. l. 7. m vel M. p. 565. l. 11. non attingat, Axis conjugatus:
sin curvam tangat, perinde est ad utrumvis casum referas; quippe
tum Hyperbolæ degenerant in opposita Triangula, quorum communis
vertex est O punctum contactus, evanescente latere recto. l. 23.
 $\frac{n^2 - b^2}{L}T$. l. 24. axis est.

In Parte Tertia. p. 574. l. 23. quæ componitur ex. p. 575. l. 22.
premat. p. 577. l. 2. nitendo. p. 579. l. 1. distantias. l. 6. major sit.
p. 580. l. pen. pre. p. 581. l. 22. rationemque. p. 585. l. 31. labatur.
p. 586. l. 28. fulcri C. p. 599. l. 15. semi-onus. l. 18. dele plusquam.
l. 19. Tignorum fere *Quatuordecim*: Nempe $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. l. 20. = $1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$.
p. 603. l. 4. semi-tigno. l. 6. $+\frac{1}{2}$. l. 7. $18\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$ = $18\frac{1}{2}\frac{1}{2}$. l. 13. Qua-
tuordecuplum. p. 611. l. pen. par erit. p. 612. l. 35. amoliendum.
p. 619. l. 37. Asperitas. p. 621. l. 23. angulus C O P. p. 622. l. 28.
Rotam. p. 626. l. 11. absimilis. p. 628. l. 23. Declivitas. p. 632.
l. 13. motuum. p. 635. l. antepen. cuiusque. p. 637. l. 4. *in* ∞ . p. 650. l. 5.
B C 3. p. 659. l. 1. Scholium. p. 661. l. 26. habent. p. 681. l. 10. abstrusiori-
bus. p. 685. l. 11. accommodari. l. ult. ad hanc. p. 697. l. antepen.
mrPC =. p. 699. l. 31. quæ mis- p. 700. l. 5. fuerint. l. 14. Phæ-
nomenum. l. 22. marg. Fig. 301. p. 721. l. 16. sed quod. p. 724.
l. 5. vi altius. p. 737. l. 12. ni factum. p. 738. l. 34. aliquandiu.
p. 742. l. 1. depressum. p. 756. l. 30. B A Y, P A Y. p. 760. l. 33.
est ei.

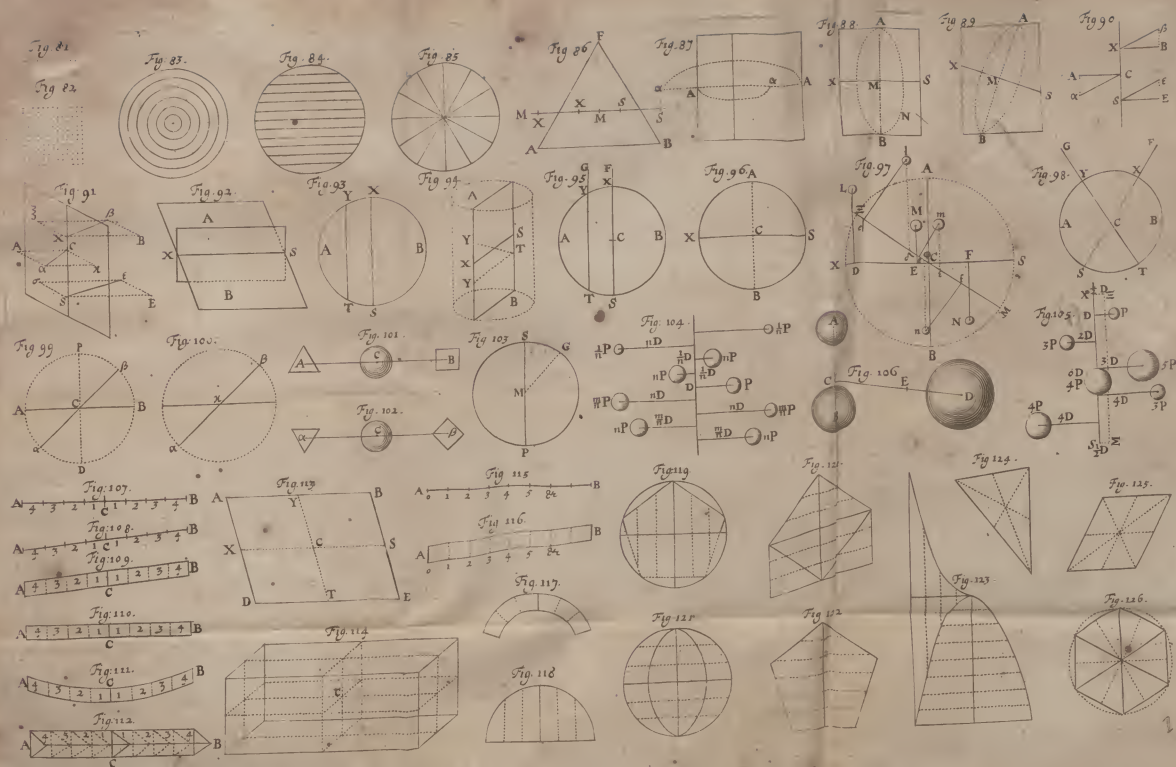
*Emendandorum numerum facile excusaret difficultas operis, etiamsi
plura essent. Sed eorum plurima sunt non nisi menda unius literæ, quæ
in alio opere negligi possent, & solent: hic autem magni sape sunt mo-
menti, adeoque in Lectorum gratiam studiosius collecta, numerum augere
videantur.*

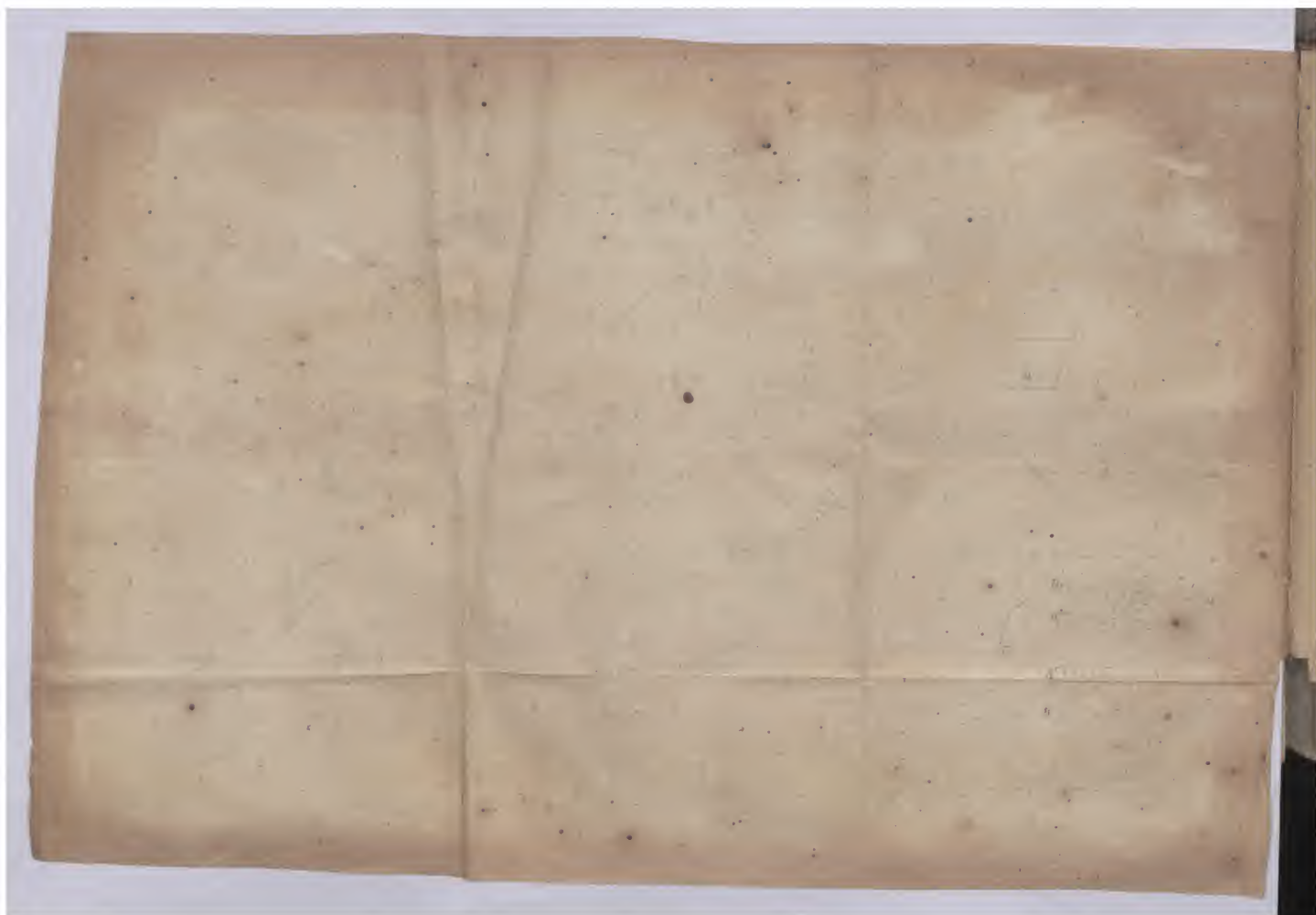


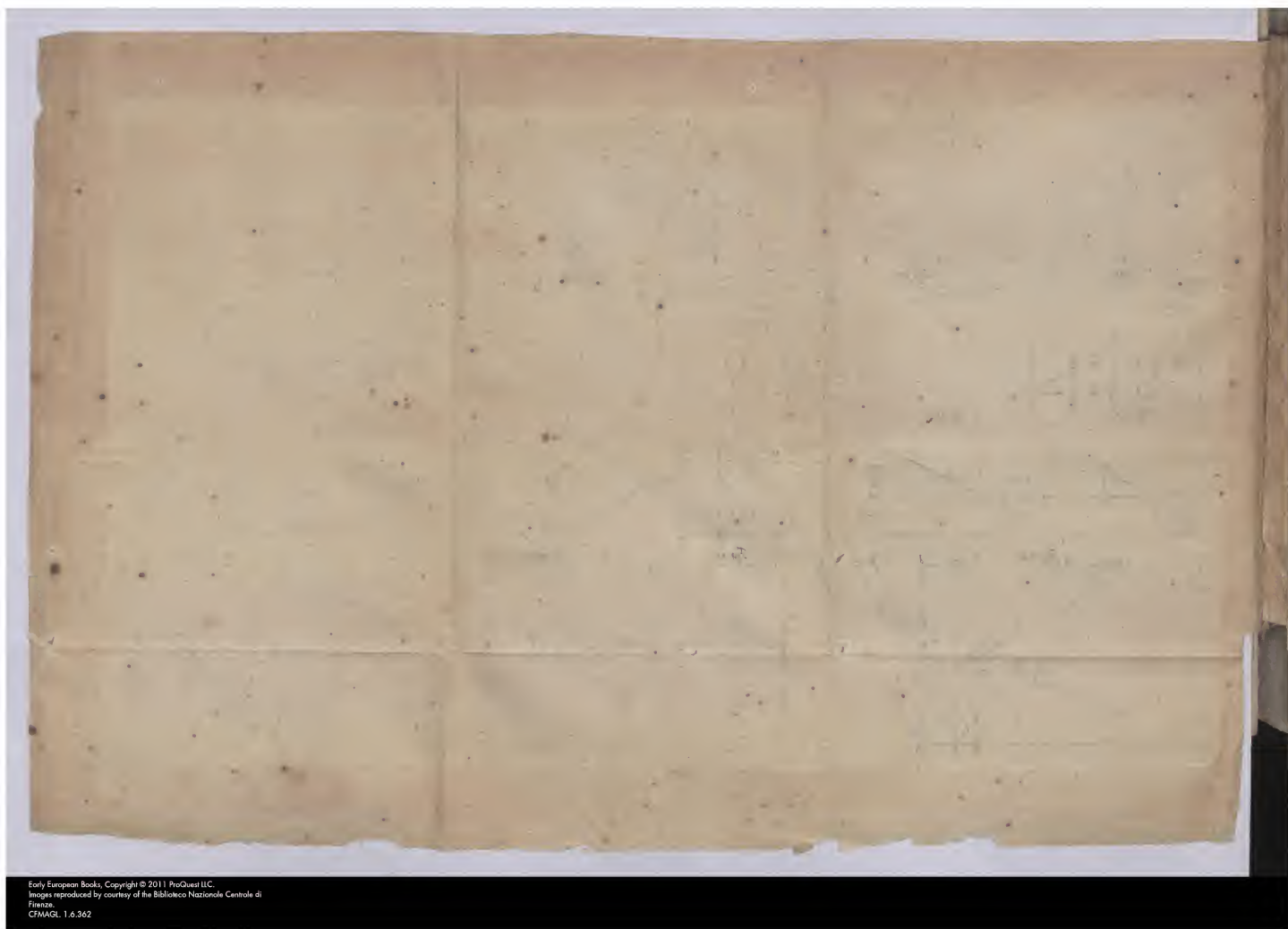


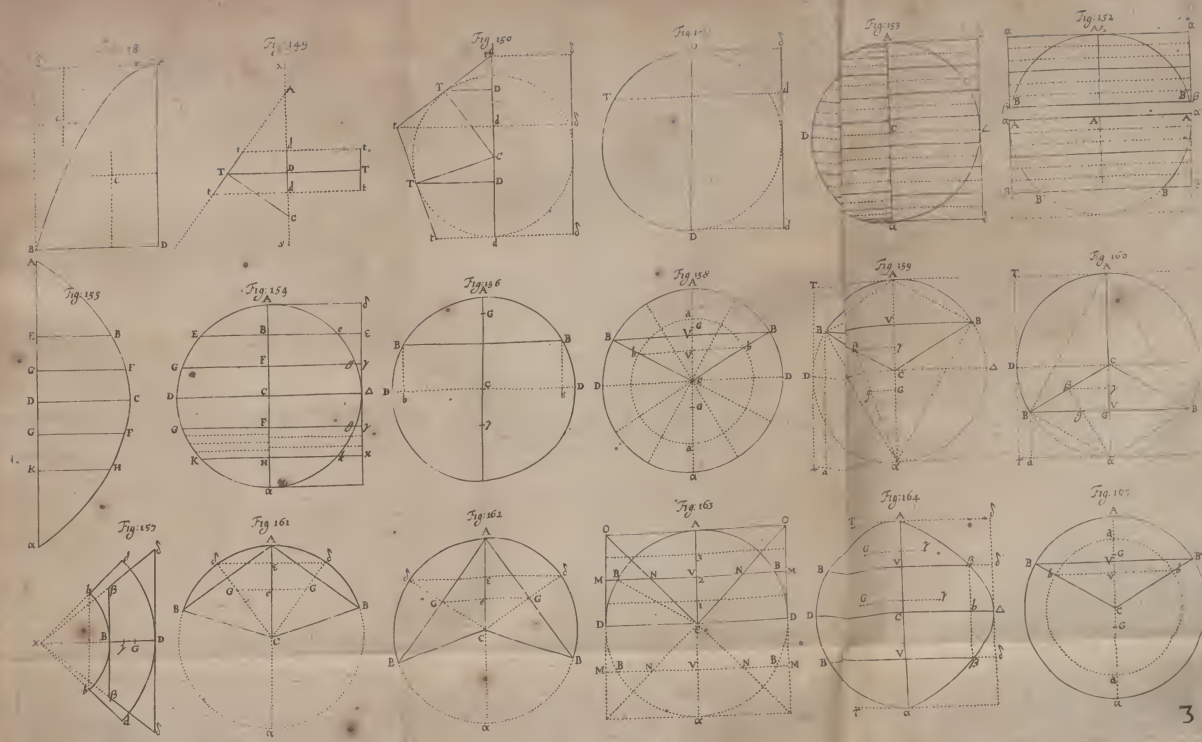


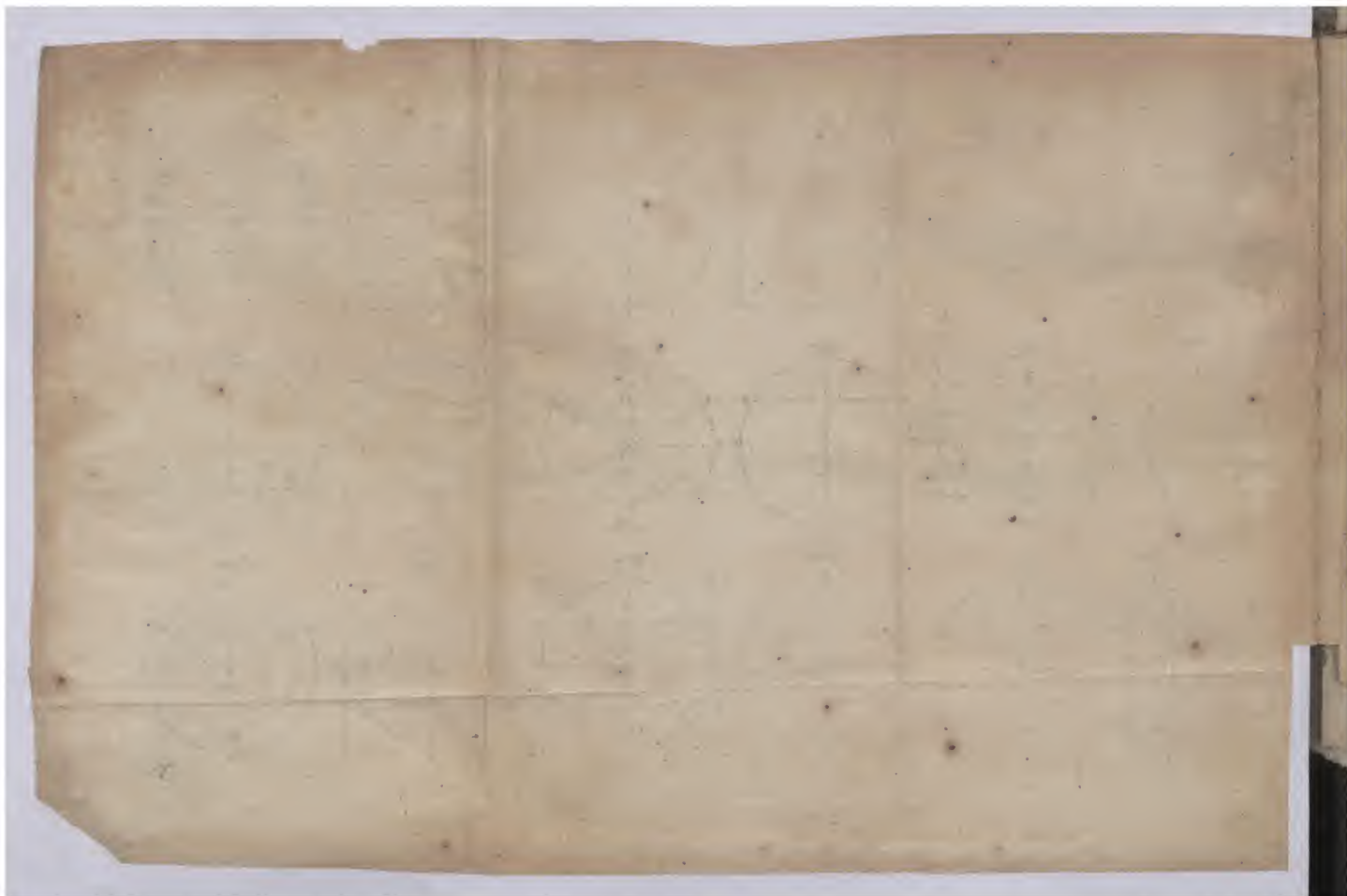


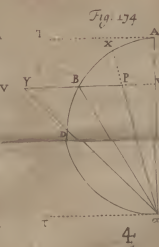
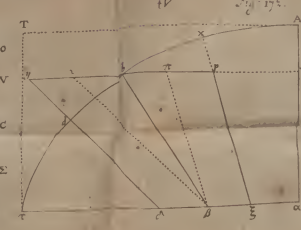
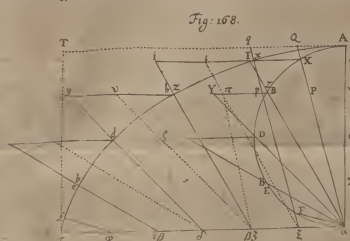
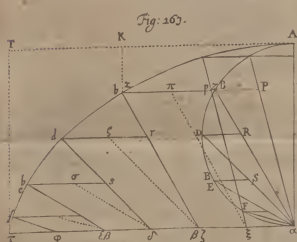
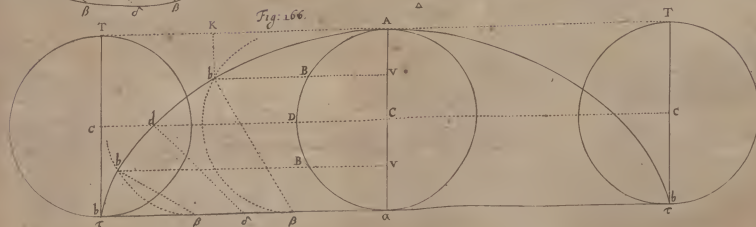
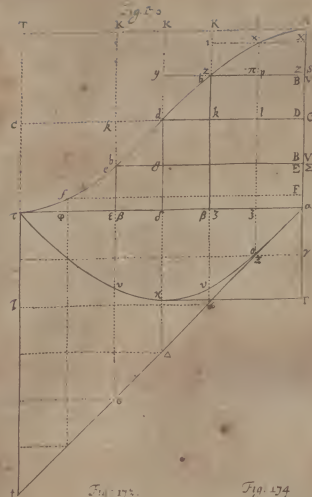
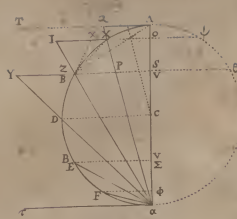
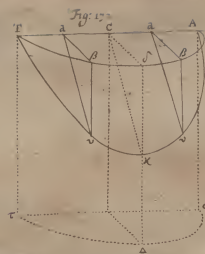
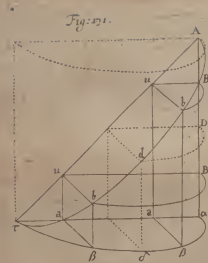




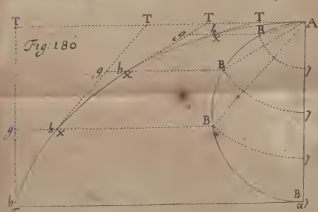
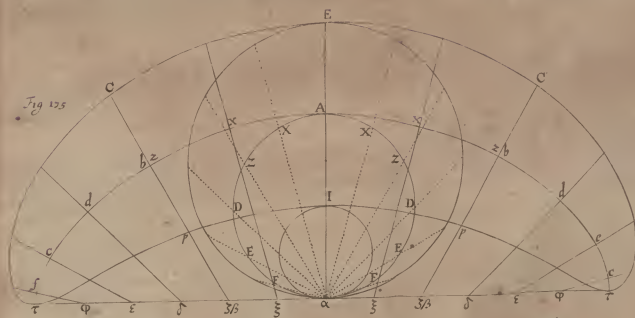


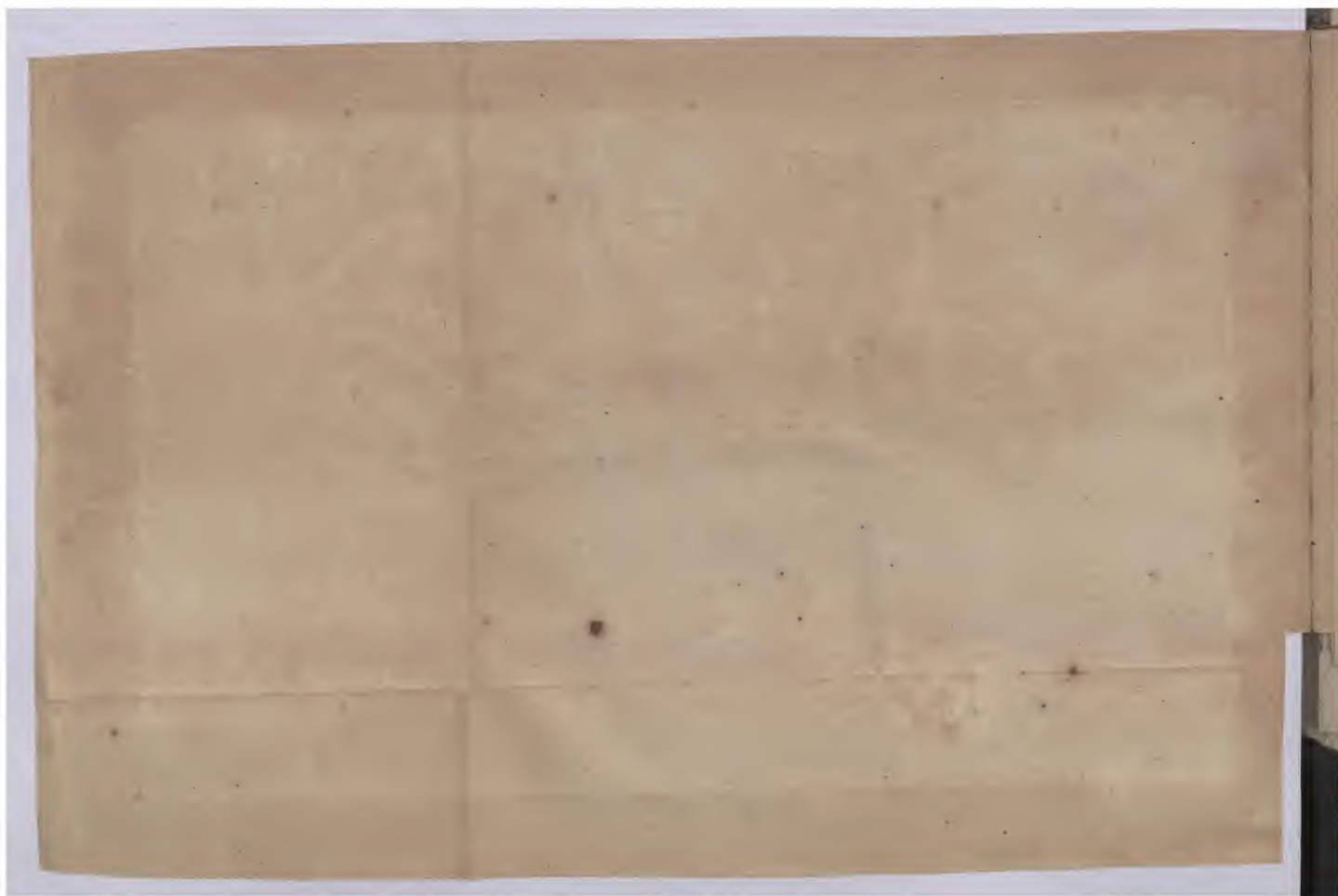


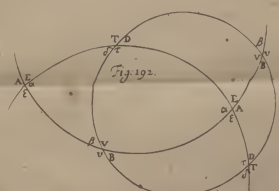
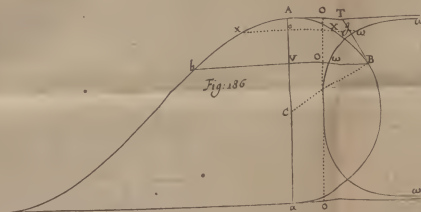
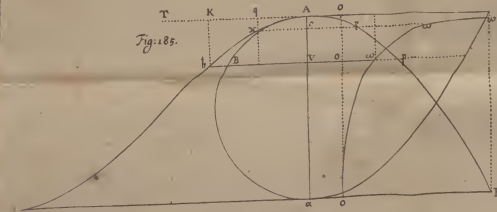
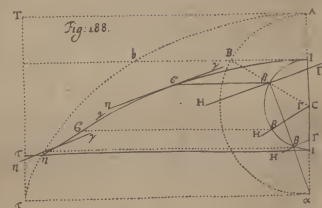
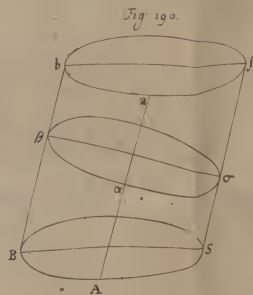
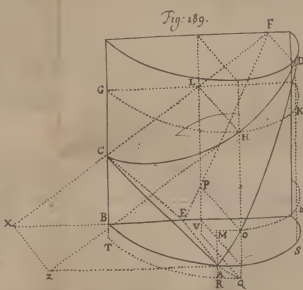
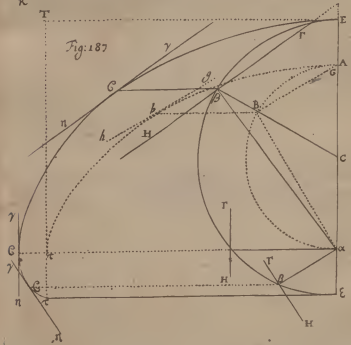
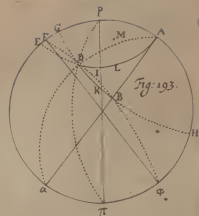
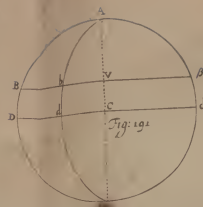
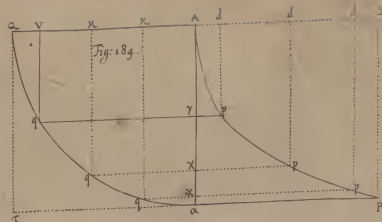
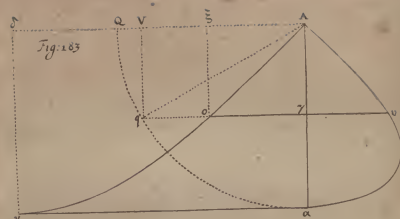




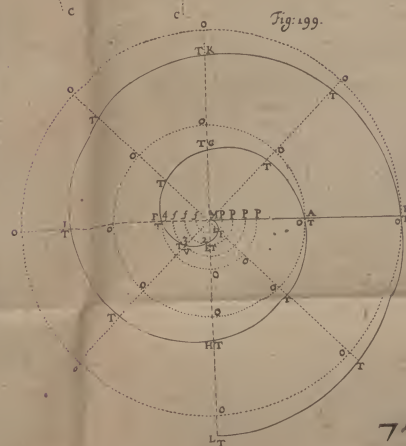
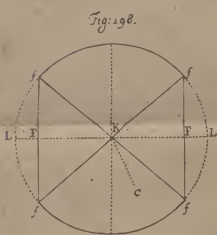
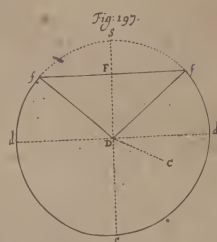
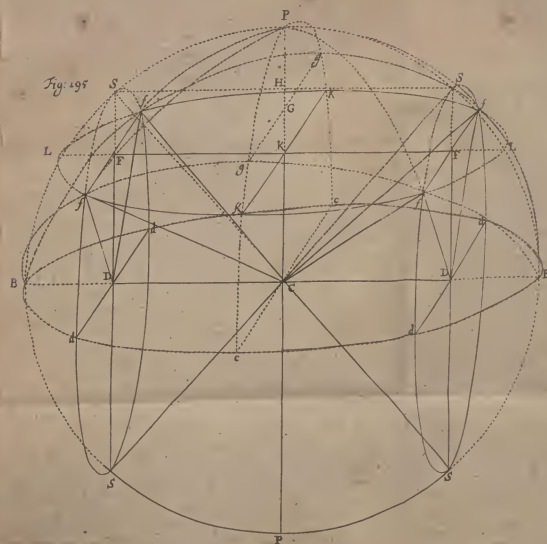
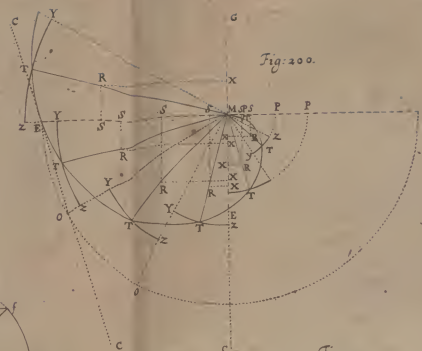
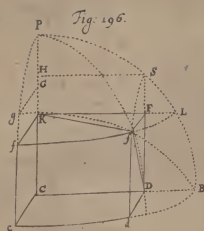
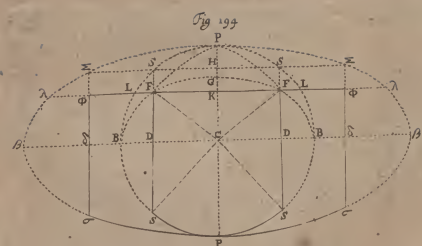




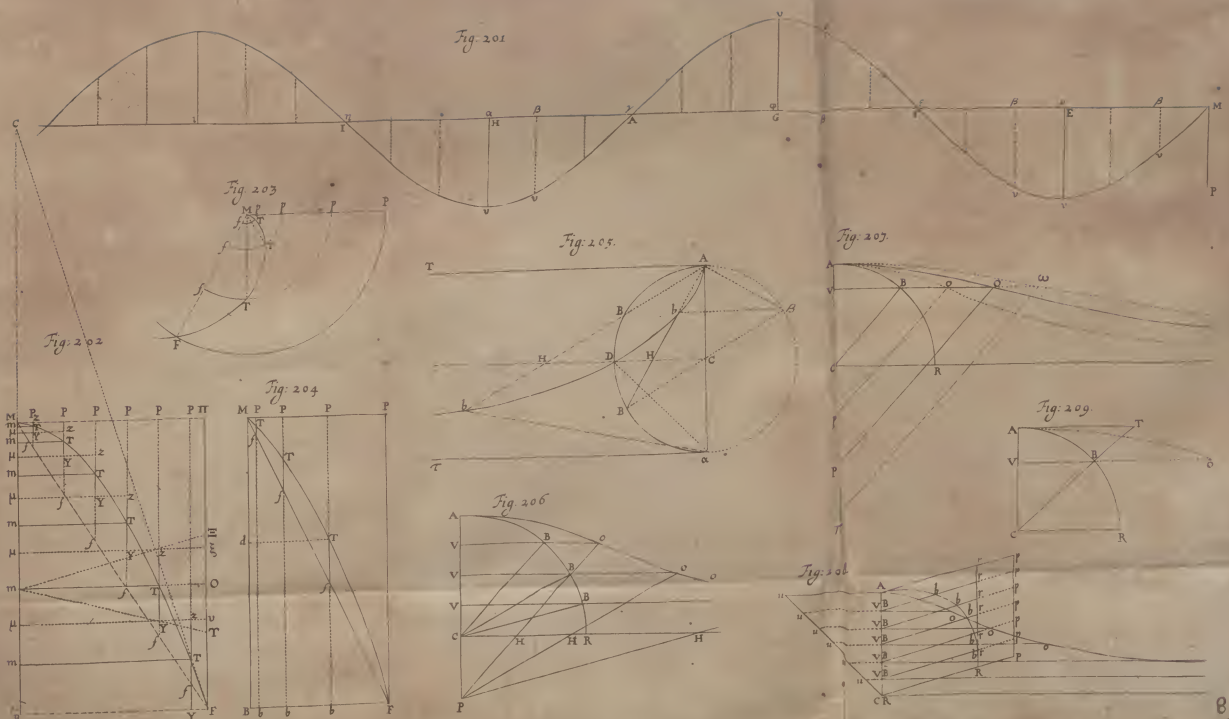






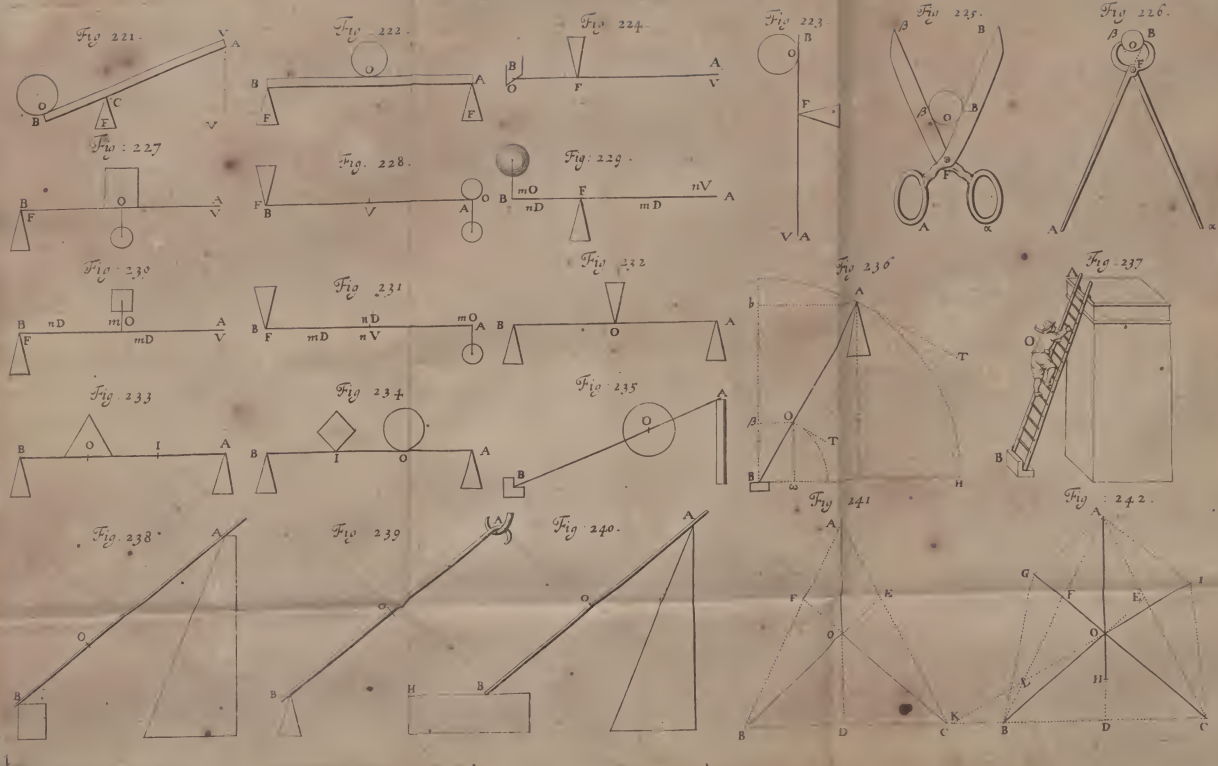


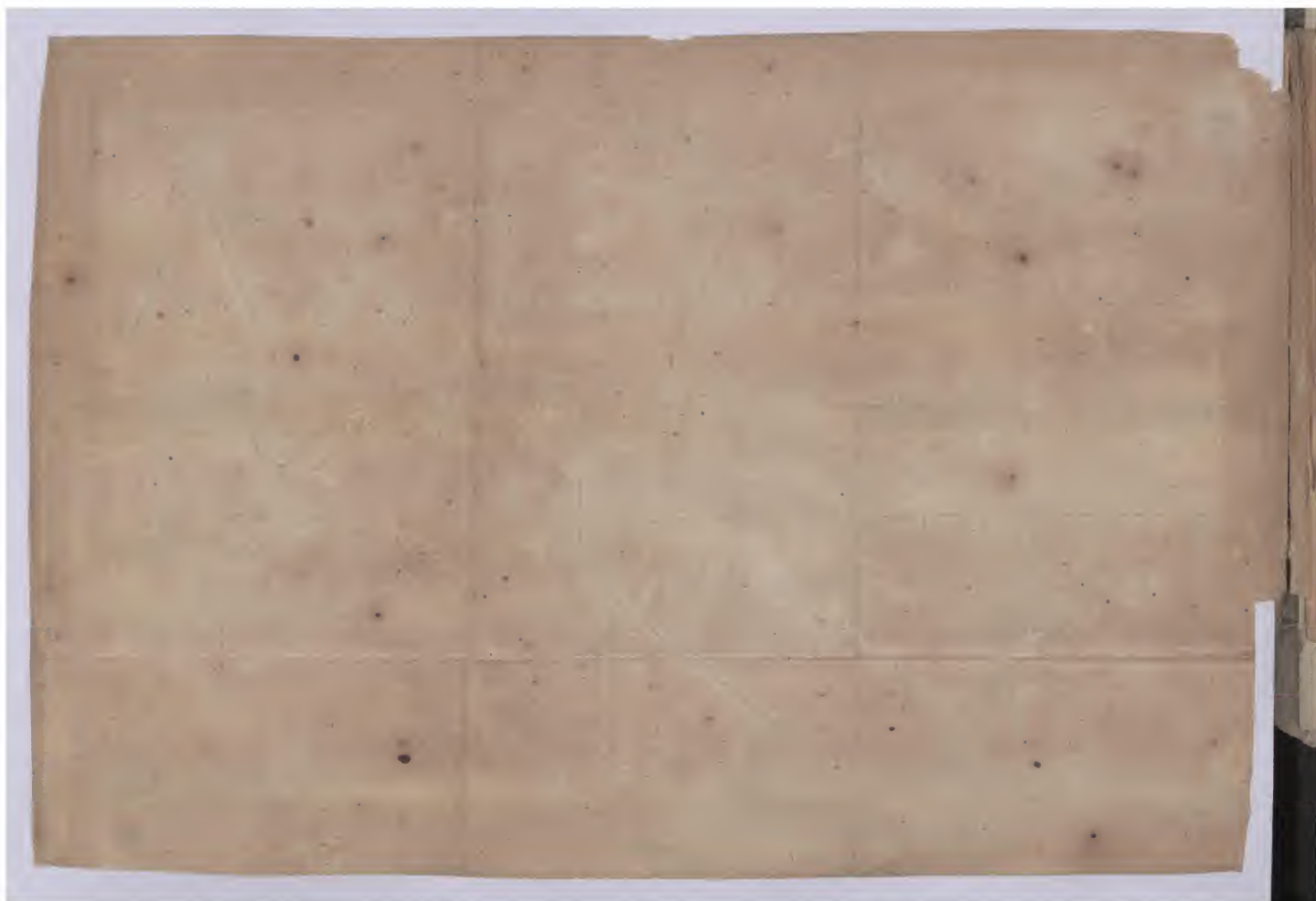












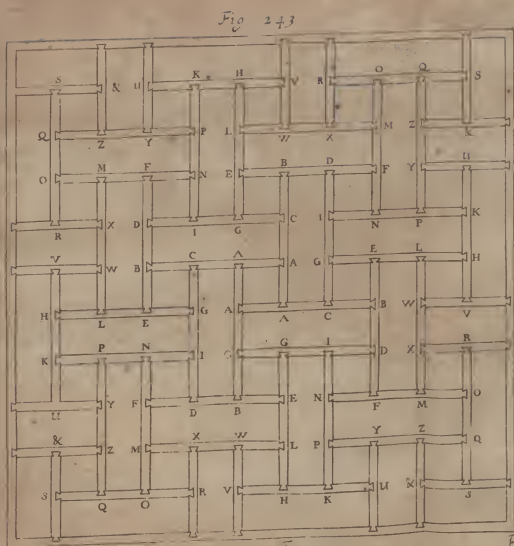
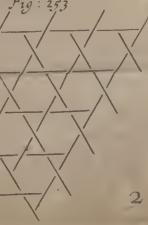
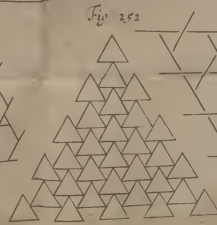
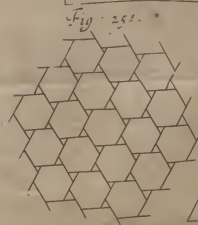
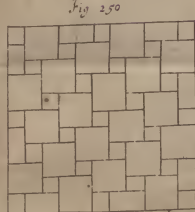
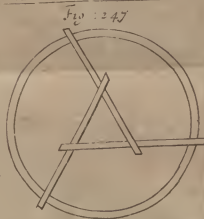
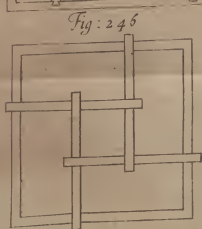
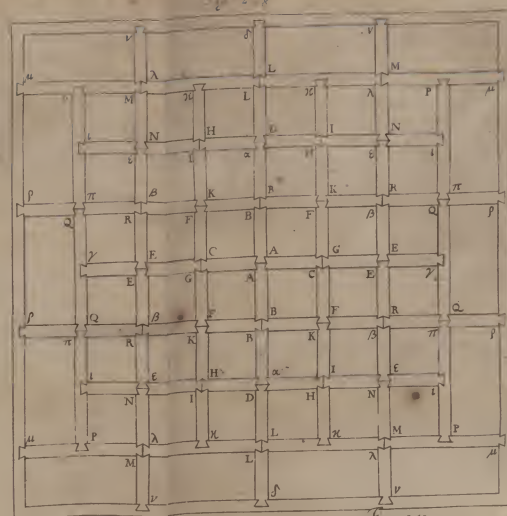


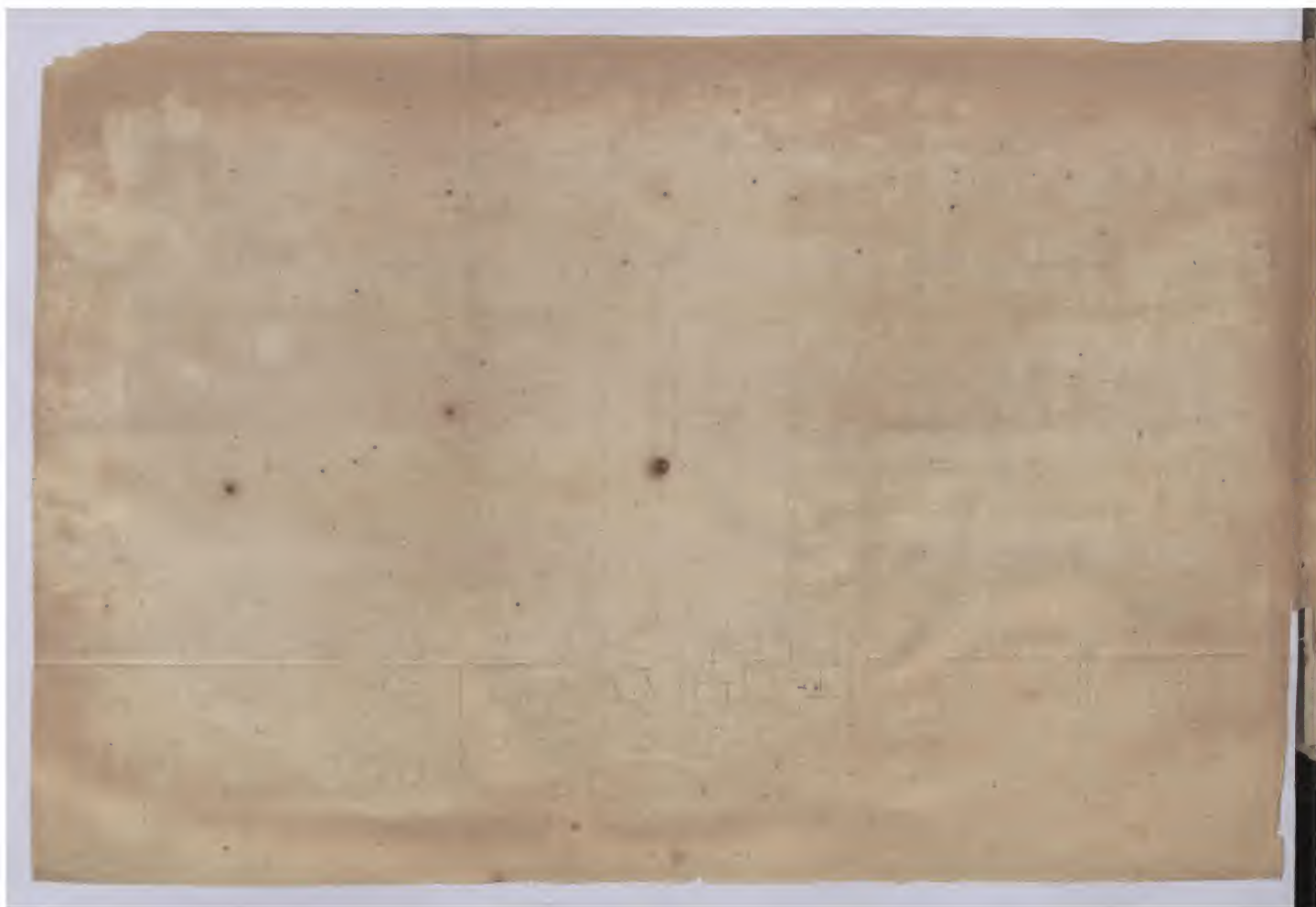
Fig. 244.

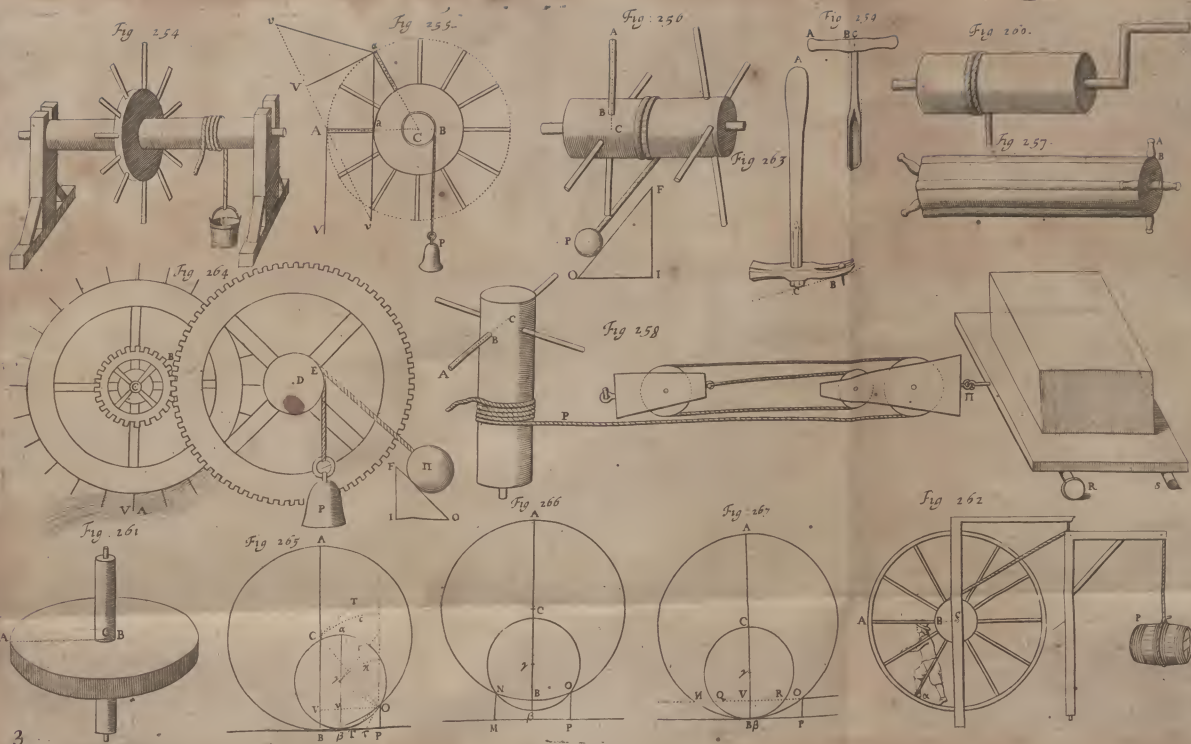


Fig. 249.

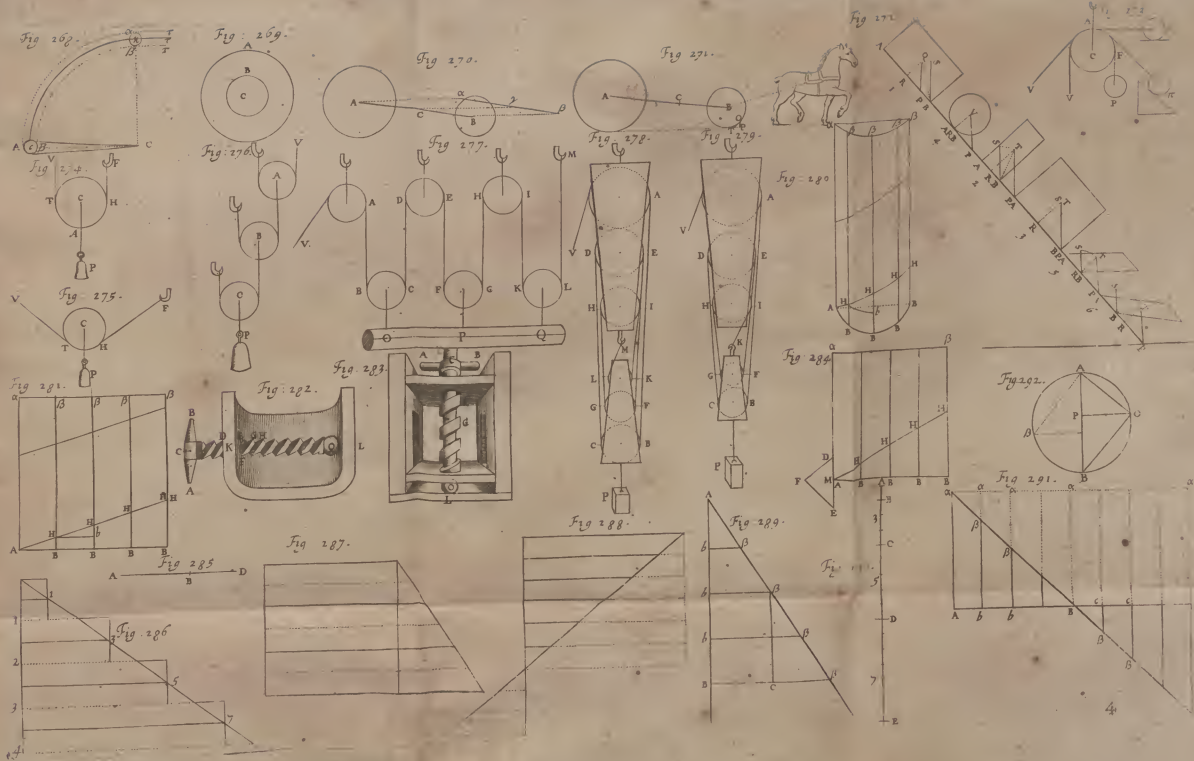
Fig. 245.



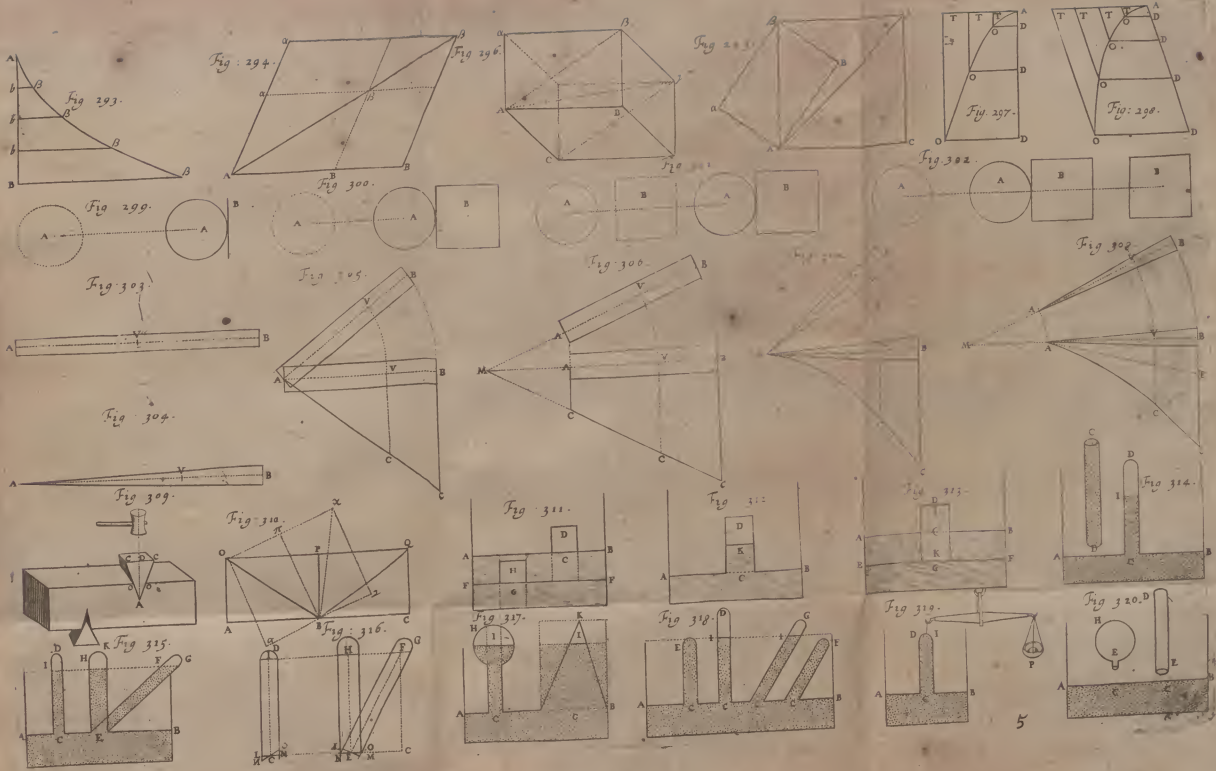




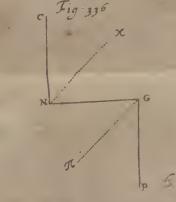
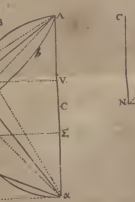
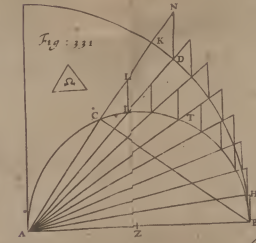
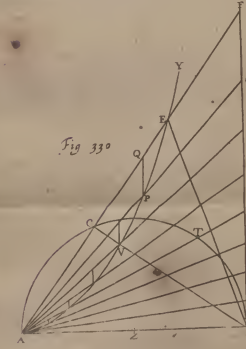
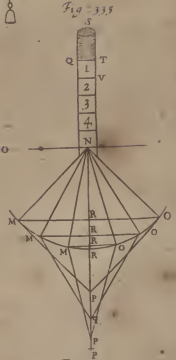
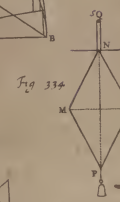
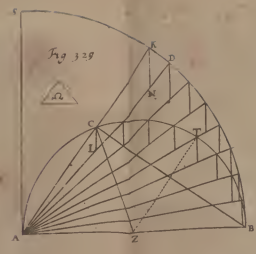
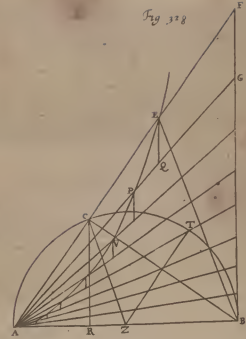
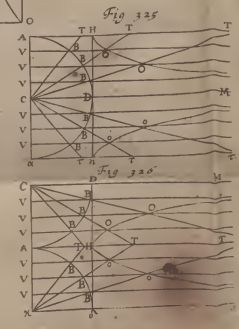
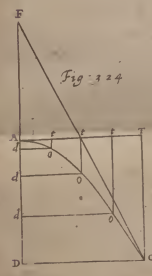
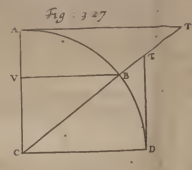
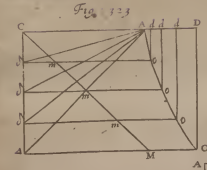
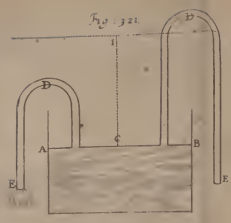




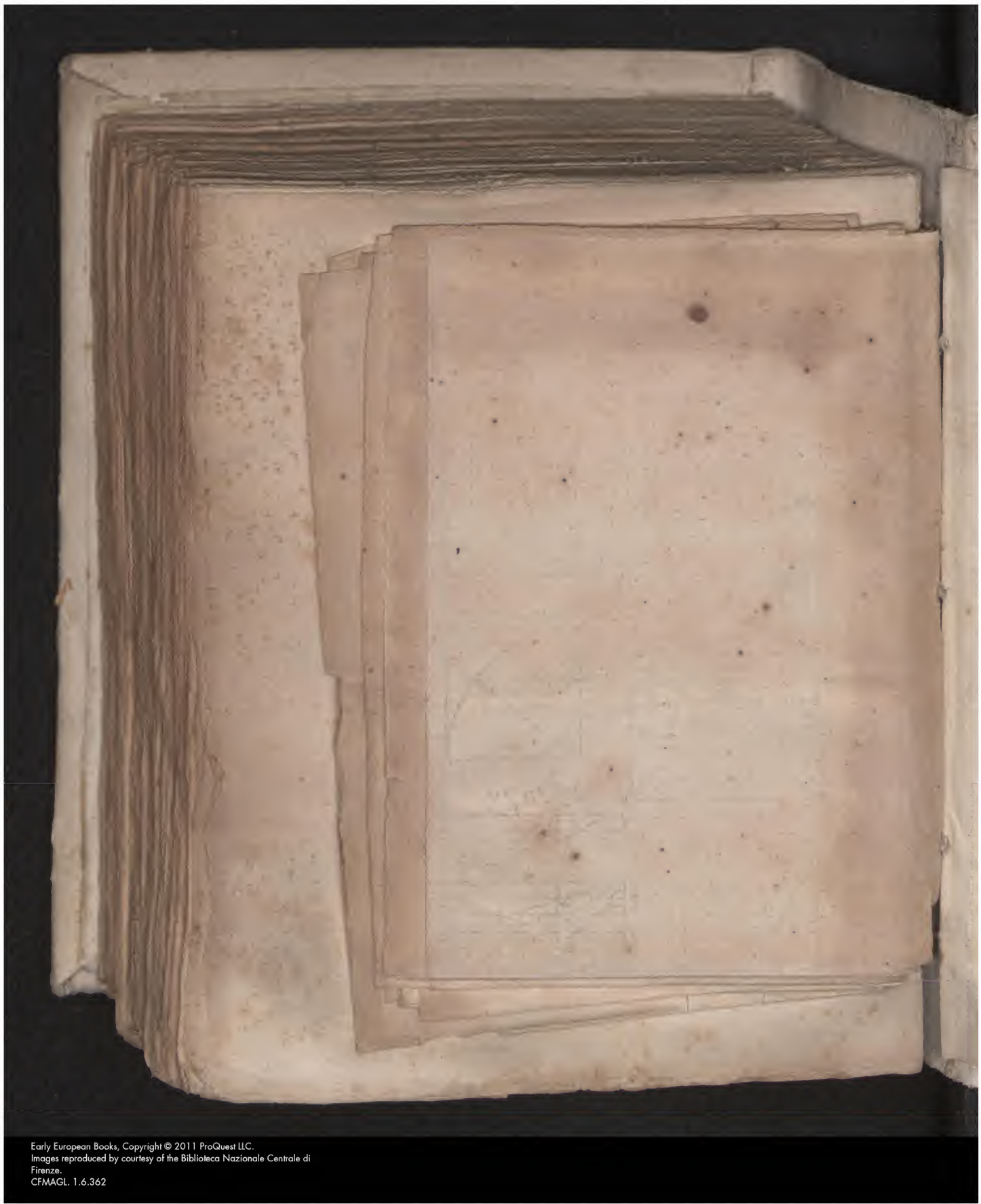


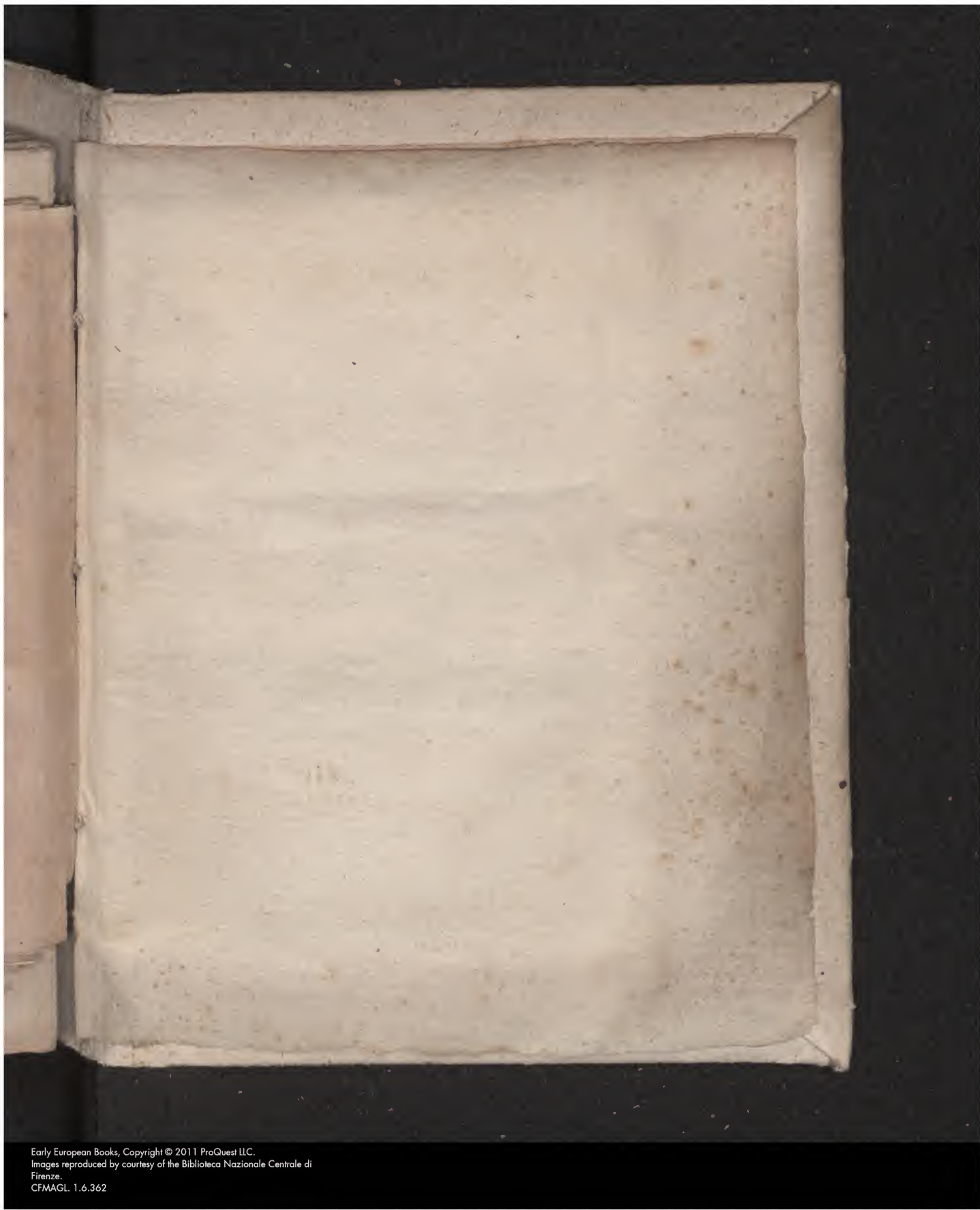


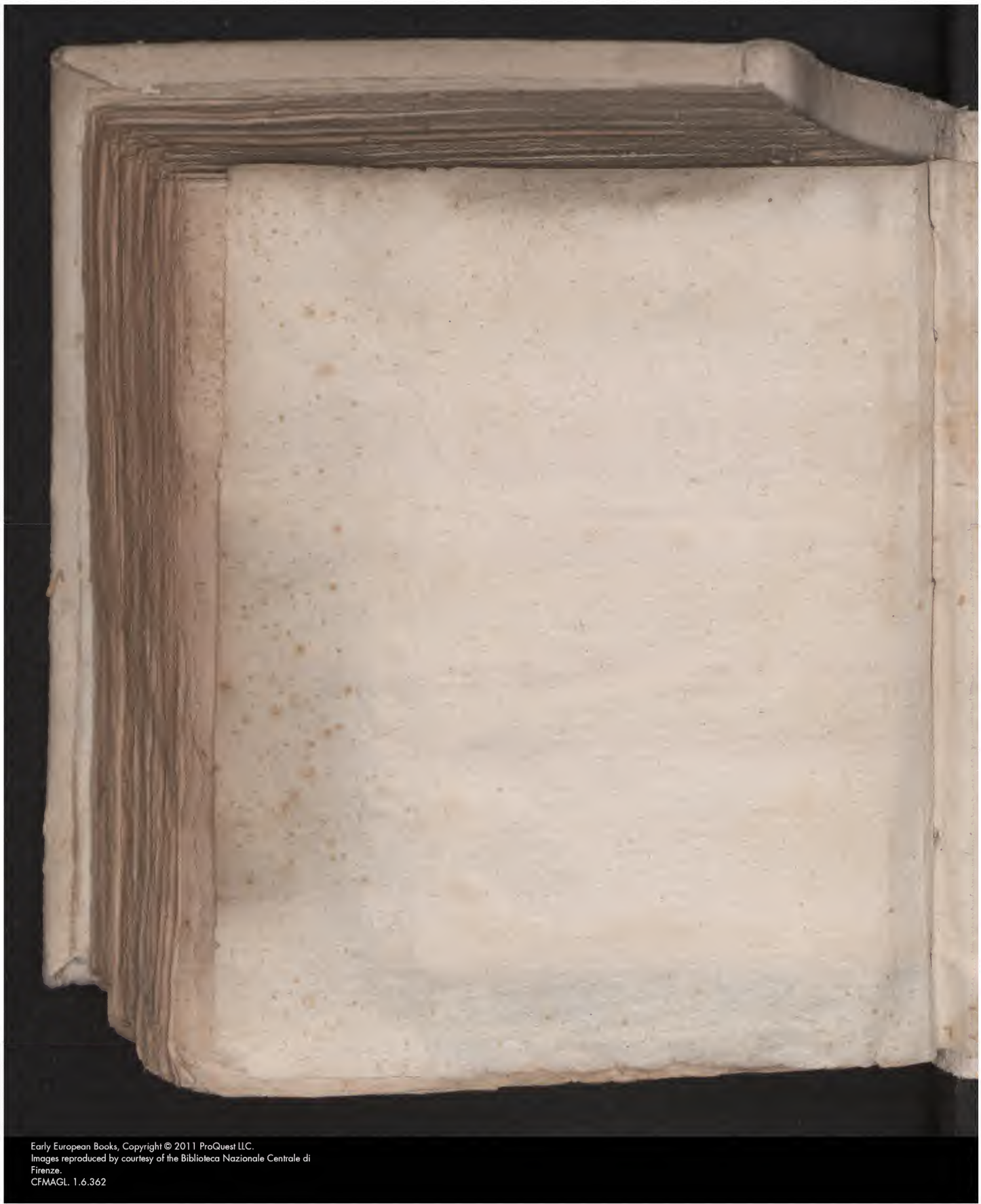












005643801